森林資源経済学
5. 森林資源を含むマクロ経済モデル

赤尾 健一
akao@waseda.jp
http://www.f.waseda.jp/akao/forest/index.html

1 はじめに

これまで、個別の森林所有者の意思決定問題を扱ってきたのに対して、これからの授業では、経済全体での森林利用について考察する。いかなる森林利用が行われるか（実証分析）、その森林利用は望ましいものか（規範分析）、もし望ましくなければどのように改善可能か（経済政策）、が基本的な問いである。

経済の動向は、個々の経済主体の意思決定によって形成される。一方で、個々の経済主体の意思決定は経済全体に依存する。そのようなミクローマクロ関係をどのように抽象化、モデル化するかがマクロ経済分析の第一歩となる。ここでの基本的想定は「競争（市場）経済」である。そこでは経済主体は、財・サービスの価格を意思決定の材料とし、各々、各財の需要量と供給量を決める。それら各財の需要量と供給量の社会集計値が一致するように各財の（競争均衡）価格が決まる。

経済主体にとって所与であるべき価格が、経済主体の行動で決まる、というのは不思議な感覚を受けると思う。このような自己言及的構造は、何らかの調整の極限としての均衡（＝平衡）状態で生じる。競争経済の場合、適当な価格の組に対して需要と供給が決まり、その社会集計値に対して、市場が新たな価格の組を決める。その価格の組を利用して新たな需要と供給が決まる。... このプロセスを繰り返すことで、もはや再調整の必要のない価格の組＝競争均衡価格が決まる[1]。

ここでは、各時点時点でこのような調整プロセスが瞬時に生じると考える。その他の重要な仮定は、各経済主体は価格のみを行動の材料とすること（プライス・テーカーの仮定。注 2 も参照）、現在から無限の将来にわたる競争均衡価格を予想できること（完全予見の仮定）、そして完全資本市場の仮定である。

ファウストマン問題では、木をきるタイミングが問題となった。マクロモデルでは一本の木ではなく、経済に存在する数多くの木を扱う。このことは森林資源の年齢分布を考慮する必要があることを意味する。しかしその扱いは複雑なので、ここでは年齢構造の問題は明示的には取り上げない。代わりに、一般的な再生可能資源の経済モデルを利用する。それは資源をストック量で表し、その関数としてストック量の増加が決まるというものである。また、同じく分析の複雑さ

[1] 適当な価格から競争均衡価格への収束がどのような条件の下で生じるか、また、そもそも競争均衡価格が存在するのかは一般均衡論の重要な課題である。その基本的結果は、西村和雄「ミクロ経済学」東洋経済のような中級のミクロ経済学のテキストを参照。

を理由に、不確実性を捨象する。さらに次の授業で導入するものの、ここでは森林資源が社会に提供する環境サービスも考慮しない。

2 経済の記述:記号と仮定

- 経済は、森林を所有する L の数の家計と n の数の企業から構成される[2]。各家計はそれぞれ面積 1 の森林を所有する。

- 各家計は次の意味で同質である。(1) 家計は各時点 $t \in [0, \infty)$ での消費 $c(t)$ から効用を得るが、その（瞬間的）効用と消費の関係を表す効用関数は同じである。つまり、各家計は共通の瞬間的効用関数 $U(c)$ をもつ（ここではさらに効用関数は時間を通じて不変であり、家計は無限の寿命をもつーーつまり家系であるーーことも想定している）。(2) 異時点間の効用は、時間不変で各家計で共通の割引率 $\rho > 0$ で割引かれる[3]。(3) 各家計の所有する森林の初期ストック量 $x_0 > 0$ は等しく、その森林の自然成長関数 g は等しい[4]。(4) 各家計は等しい労働を所有し、各時点で等しく 1 単位の労働を供給する。この労働はすべて企業に供給される。一方で、(5) 森林からの収穫物の抽出は労働を含めて一切のコストなしに行うことができる。

- 各企業は次の意味で同質である。企業は、家計から供給される労働 l と森林収穫物 h を用いて（生産要素として）、消費財 c を各時点で生産する。その生産技術は各企業で共通で、共通の生産関数 $c = F(h, l)$ で表現される[5]。

- 効用関数 $U(c)$ は、狭義単調増加、狭義凹関数で、$c \in (0, \infty)$ で 2 回微分可能、と仮定する。つまり、$U'(c) > 0, U''(c) < 0$ all $c > 0$。

  - 狭義凹関数の定義は、任意の y, z と任意の $\lambda \in (0, 1)$ に対して次の不等式が成立することである。以下の “with...” の部分を除くと凹関数の定義となる。

$$U[\lambda y + (1-\lambda) z] \geq \lambda U(y) + (1-\lambda) U(z) \text{ with equality if and only if } y = z. \tag{1}$$

  - 微分可能な狭義凹関数では、任意の $y > 0, z \geq 0$ に対して次が成立する：

$$U(y) - U(z) \geq U'(y)(y - z) \text{ with equality if and only if } y = z. \tag{2}$$

---

[2]厳密には、数え切れない無数の家計（各家計は測度 0）を仮定する。そうすることで、個々の家計は社会に影響を及ぼさず、したがって家計は価格を所与と見なすことになる。企業についても同様。そうでないケース、家計の数が有限のケースはゲーム論的設定となる。これは後に共有地の悲劇を講義するときに扱う。

[3]したがって、家計の生涯効用は、その消費経路が $c(t)$ ならば、$\int_0^\infty u[c(t)] e^{-\rho t} dt$ と表される（積分がうまく定義できるとして）。

[4]自然成長関数 g とは、もし家計が森林から採取をしなければ、森林ストックの成長率が、$\dot{x} = g(x)$ で表される、というものである（$\dot{x}$ は dx/dt の慣習的な略記）。もし h だけ森林から収穫物を家計が採取するならば、その成長率は $\dot{x} = g(x) - h$ で表される。家計の森林からの採取経路が $h(t)$ で表されるとき、森林ストックの経路 $x(t)$ は、初期森林ストック $x(0) = x_0$ の初期条件のもとでの、微分方程式 $\dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t)$ の解として表される（解がうまく定義できるとして）。

[5]家計および企業の同質性は議論を単純化するためのものである。表記の煩雑さを厭わなければ、（ある程度の）異質性を導入することは議論の本質に何ら影響しない。

$\rightarrow$ 以上の凹関数の定義・性質は経済理論を理解する上で不可欠。かつ、これだけで経済数学の６割は理解できる（例：西村清彦「経済学のための最適化理論入門」東大出版会）。

- 森林はそのストック量 x で表現され、ストック量とストック増加量の関係が自然成長関数 $g(x)$ で表現される。$g(x)$ は、微分可能な狭義凹関数（$g''(x) < 0$ all $x > 0$）と仮定する。さらに、$g(0) = g(1) = 0$ と $\lim_{x \searrow 0} g'(x) > \rho$ を仮定する[6]。

- 生産関数 $F(h, l)$ は狭義単調増加、連続微分可能、凹、かつ（正）一次同次関数で、$F(0, l) = F(h, 0) = 0$ for all $l \geq 0, h \geq 0$ を満たすと仮定する。

  1. 一次同次とは、任意の $\lambda, h, l \geq 0$ に対して、
  $$F(\lambda h, \lambda l) = \lambda F(h, l) \tag{3}$$
  が成立することを意味する。

  2. F は微分可能なので、上の等式の両辺を $\lambda > 0$ で微分し $\lambda = 1$ で評価することで、次の関係が成立することがわかる（オイラーの定理）：
  $$\begin{aligned} \left.\frac{\partial F(\lambda h, \lambda l)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} &= \left. h\frac{\partial F(\lambda h, \lambda l)}{\partial h} + l\frac{\partial F(\lambda h, \lambda l)}{\partial l}\right|_{\lambda=1} \\ &= h\frac{\partial F(h, l)}{\partial h} + l\frac{\partial F(h, l)}{\partial l} = F(h, l). \end{aligned} \tag{4}$$

  3. 一方で、(3) を h で偏微分すると
  $$\lambda\frac{\partial F(\lambda h, \lambda l)}{\partial h} = \lambda\frac{\partial F(h, l)}{\partial h}, \textit{i.e.}\ \frac{\partial F(\lambda h, \lambda l)}{\partial h} = \frac{\partial F(h, l)}{\partial h} \text{ all } \lambda > 0. \tag{5}$$
  つまり、ふたつの生産要素の投入比が同じならば、F の偏導関数は同じ値をとる。l に関しても同様の関係が得られる。この性質は、0 次同次と呼ばれる。

- 以下では、偏導関数を $F_h(\lambda h, \lambda l) \equiv \partial F(\lambda h, \lambda l)/\partial h$ のように略記することがある。１変数の微分の場合は、プライム "$'$" を使う。

3 社会的最適化問題

最初に述べたように、いかなる森林利用が行われるか（実証分析）、その森林利用は望ましいものか（規範分析）、もし望ましくなければどのように改善可能か（経済政策）、が森林資源に関するマクロ経済分析の基本的な問いである。この節

[6] 以上の設定で、$f(x) > 0$ iff $x \in (0, 1)$。資源ストックの水準 $x = 1$ は環境収容力を意味する。つまり $x_0 \neq 0$ で、収穫がまったくなければ、森林ストックは $x = 1$ の水準に収束する。なお、ストック量で森林を表現していることは、森林の年齢を捨象していることを意味することに気づくこと。

では、規範分析を行うことにし、各家計の効用（その時間集計割引現在価値）の総和を最大にする資源利用を導出する：

$$\max \sum_{i=1}^{L} \int_0^{\infty} U(c^i(t))e^{-\rho t}dt,$$

ここで $U(c^i(t))$ は、第 $i \in \{1, ..., L\}$ 番目の家計の各時点での効用を表す。各 $c^i(t)$ は次の消費財需要に関する実行可能性条件を満たす必要がある：

$$\sum_{i=1}^{L} c^i(t) \leq \sum_{j=1}^{n} F(h_j(t), l_j(t)),$$

ここで $h_j(t)$, $l_j(t)$ は、第 $j \in \{1, ..., n\}$ 番目の企業の t 時点投入要素量であり、それぞれ収穫物と労働需要に関する次の実行可能性条件を満たす必要がある：

$$\sum_{j=1}^{n} h_j(t) \leq \sum_{i=1}^{L} \left[g(x^i(t)) - \dot{x}^i(t)\right], \quad \sum_{j=1}^{n} l_j(t) \leq L,$$

ここで $x^i(t)$ は第 i 家計の t 時点森林ストック量であり、$\dot{x}^i(t) = dx^i(t)/dt$ である。

決めるべきことは、各時点で各家計はどれだけ森林から収穫するか（$g(x^i(t)) - \dot{x}^i(t)$）、各企業に家計から供給される労働と収穫物をどれだけ配分するか（$(h_j(t), l_j(t))$）、そして各企業が生産した消費財を各家計にどれだけ配分するか（$c^i(t)$）、である。

考察を見通しよく行うために、最初に予備的考察を行う。

3.1 予備的考察

以下の考察は、任意の時点 $t \in [0, \infty)$ で成立するので、時間を表す変数 t はここでは省略する。

3.1.1 森林ストックについて

任意のふたつの家計（$i = 1, 2$）を取り上げ、両家計が所有する森林ストックの合計量を $\bar{x}$ で表す。問題として、$\bar{x}$ がふたつの家計のあいだでどのように配分されれば、両家計の集計森林成長率が最大になるかを考えよう。資源ストック一定の下で森林の集計成長率を最大にすることは、最適資源利用の必要条件である。（なぜか？）

家計 1 のストック量を x_1 で表せば、家計 2 のストック量は $\bar{x} - x_1$ である。集計森林成長率は $g(x_1) + g(\bar{x} - x_1)$ で表される。これを x_1 で微分すると、

$$g'(x_1) - g'(\bar{x} - x_1) = 0, \quad g''(x_1) + g''(\bar{x} - x_1) < 0$$

より、$x_1 = \bar{x}/2$ で最大値をとることがわかる。つまり両家計が等しい森林ストックを持つとき、集計森林成長率は最大になる。家計は任意に選ばれているから、このことは、L 戸の全家計についていえる。つまり、一定の森林ストック量の下で集計成長率を最大にするには、各家計の森林ストック量を等しくすればよい。

さらに、初期資源ストックはすべての家計で等しいから、このことは各家計の各時点での森林資源採取率を同じにするとき、集計資源成長率が最大になることを意味している。よって社会的最適計画を考える上で、

$$g(x^i(t)) - \dot{x}^i(t) = g(x(t)) - \dot{x}(t) \text{ all } i \in \{1, ..., L\}$$

としてよい。

3.1.2 各家計に分配される消費財の量について

やはり任意のふたつの家計（$1,2$）を取り上げ、これら家計に一定量の消費財 $\bar{c}$ をどのように分配すれば、ふたつの家計の瞬間的効用の合計が最大になるかを考える。集計効用が最大になることは、最適資源利用の必要条件である。

家計 1 の消費量を c_1 で表せば、家計 2 の消費量は $\bar{c} - c_1$ である。両家計の合計効用は $U(c_1) + U(\bar{c} - c_1)$ で表される。

$$U'(c_1) - U'(\bar{c} - x_1) = 0, \quad U''(c_1) + U''(\bar{c} - x_1) < 0$$

より、$c_1 = \bar{c}/2$ で最大値をとることがわかる。家計の選び方は任意であり、したがって、消費財は各家計に均等に分配することが最適性の必要条件である：

$$c^i(t) = c(t) \text{ all } i \in \{1, ..., L\}.$$

3.1.3 各企業に分配される生産要素の量について

これまでと類似の議論を、任意のふたつの企業に対して行う。生産要素 $\bar{h}, \bar{l}$ をどのように分配するとき消費財の生産量は最大になるかを調べる。問題は、

$$\max_{h,l} F(h,l) + F(\bar{h} - h, \bar{l} - l)$$

とかける。最適解の必要条件は、

$$F_h(h,l) = F_h(\bar{h} - h, \bar{l} - l), \quad F_l(h,l) = F_l(\bar{h} - h, \bar{l} - l)$$

である。生産関数の偏導関数の 0 次同次性 (5) によって、これは $h/l = (\bar{h} - h)/(\bar{l} - l)$ が成立していることを意味する。等式を整理すると、$\bar{h}/h = \bar{l}/l$ 。この比の値を $1/\alpha(> 1)$ とおけば、$h = \alpha\bar{h}, l = \alpha\bar{l}$ を得る。もう一方の企業の投入量は、$h = (1 - \alpha)\bar{h}, l = (1 - \alpha)\bar{l}$ となる。これが生産要素の分配に関する最適性の必要条件である。生産関数の一次同次性 (3) から、このとき両企業の集計生産量は、

$$F(\alpha\bar{h}, \alpha\bar{l}) + F((1 - \alpha)\bar{h}, (1 - \alpha)\bar{l}) = F(\bar{h}, \bar{l})$$

である。つまり、ふたつの企業は消費財生産を最大にする限り、ひとつの企業が生産要素 $\bar{h}, \bar{l}$ で生産を行っているのと同一になる。以上の議論を、この合体した企業と第三の企業との間で行えば、3 つの企業は最適な生産を行う限り、やはりひとつの企業と同一視できる。さらに同じ議論を繰り返せば、社会全体でひとつの企業が存在して、その企業は F という生産関数で消費財生産を行っているとみなしてよいことになる。すなわち、最適計画における社会全体の消費財生産量は次のように表される。

$$F(Lh(t), L) = LF(h(t), 1),$$

ここで $h(t) = g(x(t)) - \dot{x}(t)$ は各家計（共通の）資源採取量であり、右辺は一次同次性 (3) による。

3.2 問題の定式化

以上の予備的考察によって、最適な消費と生産が行われるとき、各家計の資源採取率と消費量は同じとなる（$\big(h^i(t), c^i(t)\big) = (h(t), c(t))$ all i）。家計が社会に供給する資源採取量と労働の総量は、それぞれ $Lh(t), L$ である。企業はあたかもひとつのものとみなしてよいので、それが社会に提供する消費財の量は、$F(Lh(t), L) = LF(h(t), 1)$ である。したがって各家計の消費量は $c(t) = F(h(t), 1)$ となる。これは資源採取率のみの関数なので、労働 1 単位あたり生産量を表す関数 f を次のように定義する。

$$f(h) \equiv F(h, 1). \tag{6}$$

f は F の性質から、狭義単調増加凹関数で、$h > 0$ で連続微分可能、また $f(0) = 0$ を満たす。以上で、社会にとって最適な資源利用を記述する準備が整った。それは次の問題の解である。

$$\max_{h(t)} L \int_0^\infty U[f(h(t))] e^{-\rho t} dt, \tag{7}$$
$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t), x(t) \geq 0, h(t) \geq 0 \text{ each } t \in [0, \infty),$$
$$x(0) = x_0 > 0 \text{ given.}$$

ここで無限計画期間の積分が上に有界の値でうまく定義できる（＝無限大に発散しない）のは、$\rho > 0$ であることと自然成長関数 g が環境収容力をもつことによる。

この問題はもっと簡単に表すことができる。まず、目的関数にかけられている L は省略してよい。つまり各家計の効用の和を最大にする問題の代わりに、個々の家計（あるいは代表的家計と呼んでよい）の効用を最大にする問題を考えても、最適な資源利用は同じである。次に、家計は資源フローと労働からつくられた最終財を消費し、資源フローを直接、消費するわけではない。しかし上の定式化では、あたかも資源フローを「食べて」効用を得るという形式的な解釈が可能である。つまり、次のように（簡約された reduced form[7]）効用関数 u を定義することで表現はいっそう簡潔になる：

$$u(h) \equiv U[f(h)]. \tag{8}$$

u は狭義単調増加狭義凹関数である[8]。したがって、問題は次のようになる。

$$\max_{h(t)} \int_0^\infty u[h(t)] e^{-\rho t} dt, \tag{9}$$
$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t), x(t) \geq 0, h(t) \geq 0 \text{ each } t \in [0, \infty),$$
$$x(0) = x_0 > 0 \text{ given.}$$

[7] "reduced form" は経済学の文献では "誘導型" と訳されることが多い。特に計量経済学。しかしその意味は、簡約された、縮約された、というものである。

[8] ここで狭義単調増加性は $u' = U'f' > 0$ による。狭義凹性は $u'' = U''(f')^2 + U'f'' < 0$ による。

4　競争均衡経路

社会的最適経路が社会にとって望ましい資源利用を表すのに対して、現実の社会ではどのような経路が選ばれるだろうか。われわれが生きている社会は複雑なので、一概に述べられない、というのが常識的かつ妥当な答えだろう。しかし、それでは話は進まない。経済学では、少なくとも社会全体については、次のように定義される “競争経済 competitive economy” によって、現実の社会がうまく記述できると考える。

[競争経済：定義]
　人々は価格を与えられたものとして、そのもとで各目的を実現している。ここで目的とは、家計については（生涯）効用の最大化であり、企業については利潤の最大化である。そのような目的を実現できるために、人々にとって所与となる諸財の価格は、各時点で需要と供給を一致させるもの（競争均衡価格）となっている。そしてその競争均衡価格の現在から将来にわたる経路を人々は正確に予想できる。

　この節では、競争経済で実現される資源利用のパターン（競争均衡経路 competitive equilibrium path）を明らかにする。社会的最適化問題と異なり、競争経済では、各財の価格が存在する。ここでは価格を、新たな変数として、考察に加えなければならない。価格とは各財の交換比率のことである。よって、ある財（価値尺度財＝ニュメレール numéraire）を選んでその価格を 1 と基準化し、その財 1 単位に対する交換比率として他の財の価格を定義できる。ここではニュメレールとして最終消費財を定め、各時点でのその経常価値 current value 価格を 1 とする。

　予備的考察として、各家計が所有している森林について、前もって考察しておく。競争経済では、採取物だけでなく、森林資源（林地を含めた）という資産を売買する市場も存在するだろう。しかし、各主体はその選好と初期資産の両面で同質であると仮定されており、また、共通の価格のもとで意思決定を行う。このことは、ある家計にとって森林を売却することが効用を高めるならば、他のすべての家計にとってもそうであることを意味する。このとき森林の買い手は存在せず、森林は超過供給の状態になる。同様に、ある家計にとって森林を購入することが効用を高めるならば、社会には森林の超過需要が発生することになる。そのいずれも、競争均衡（需要と供給が一致した状態）ではない。競争均衡状態では、各家計は森林を売買することで（最大化された）効用に変化は生じないはずである。ややこしいが、森林の市場は存在するが、そこで形成されている均衡価格は、各家計に森林を売る気にも買う気にもさせないものとなっている、ということである。この状況は、各家計は初期時点で与えられた森林を常に所有している状況と同じである。したがって、以下では家計は所有する森林を売買しない、という想定のもとで競争均衡を考える。そして、事後的に、森林が売買されない価格を導出することにする。このような段取りをとるのは、森林の売買を含めて問題を定式化すると、いっそうややこしい議論を追加しなければならなくなるためである。

4.1 記号の追加

- $p(t)$ で収穫物の価格を、$w(t)$ で賃金率を表す。これらの価格はすべて経常価値で表されている。
- $r(t)$ で各時点での利子率を表す。
- $M(t)$ で任意の i 家計 $i \in \{1, ..., L\}$ の預金残高を表す。預金残高はマイナスの値の場合、借金を表す。

4.2 企業の利潤最大化

各企業は各時点で次の利潤最大化問題を解いている：

$$\max_{h,l \geq 0} F(h,l) - p(t)h - w(t)l$$

その最適な要素投入量を h^*, l^* で表すと、1 階の条件は、

$$F_h(h^*, l^*) - p(t) = 0, \quad F_l(h^*, l^*) - w(t) = 0 \tag{10}$$

である。これを利潤の式に代入すると、(4) より

$$\begin{aligned} &F(h^*, l^*) - p(t)h^* - w(t)l^* \\ &= F(h^*, l^*) - h^* F_h(h^*, l^*) - l^* F_l(h^*, l^*) = 0 \end{aligned}$$

を得る。つまり、競争均衡では、企業利潤は（生産関数が一次同次であるという仮定のもとで)、すべての企業、そしてすべての時点で 0 である。

1 階の条件はまた、すべての企業で F の偏導関数は同じ値、つまり各生産要素の価格をとることも表している。(5) より、このことは各企業の生産要素の投入比が同じであることを意味している。以前の考察によって、この状況ではどのような数の企業が存在するかにかかわらず、あたかも社会に一つの企業が存在して、生産を行っていると見なしてよい。すなわち、$H^s(t)$ で家計から社会に供給される資源採取物の総量を表すと、総労働供給量は L なので、社会全体で、利潤最大化企業によって $F[H^s(t), L]$ の消費財が生産される。さらに、生産関数の偏導関数の 0 次同次性 (5) によって、各時点で、集計生産関数と各生産要素価格とのあいだに

$$F_h[H^s(t), L] = F_h[H^s(t)/L, 1] = p(t), \quad F_l[H^s(t), L] = F_l[H^s(t)/L, 1] = w(t) \tag{11}$$

の関係が成立していることがわかる。

4.3 家計の生涯効用最大化

任意の i 家計 $i \in \{1, ..., L\}$ の効用最大化問題は次のように表される：

$$\max_{c(t), h(t) \geq 0} \int_0^\infty U[c(t)] e^{-\rho t} dt,$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to } & \dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t),\ h(t) \geq 0, \\
& \dot{M}(t) = r(t)M(t) + p(t)h(t) + w(t) - c(t), \\
& \lim_{t \to \infty} M(t) e^{-\int_0^t r(s) ds} \geq 0 \\
& M(0) = 0 \text{ and } x(0) = x_0 > 0 \text{ are given.}
\end{aligned}$$

ここで、2 番目の制約条件は、家計の預金残高に関する状態方程式である。このように、社会的最適化問題とは異なり、ここではふたつの状態方程式を考えることになる。3 番目の不等式は現在価値で評価した無限の将来での預金残高が負にならないこと（永遠に借金し続けることはできないこと）を示している。この制約条件がないと、家計にとって、借金をしその返済を無限の将来に後送りすることが最適になる。そのようなことは明らかに許されない。この条件は、No Ponzi game condition と呼ばれるものである。

4.4 市場クリア条件

競争均衡では、以上の企業と家計の効用最大化が実現されるとともに需要と供給の一致が実現されている。各家計がある均衡価格の組 $(p(t), w(t), r(t))$ のもとで効用最大化を実現する制御と経路を、$c^e(t), h^e(t), x^e(t), M^e(t)$ と表すことにする。（各家計は選好と初期資産が同じであり、効用を最大化する経路は一意的なので、各時点での選択は同じとなることに注意。）

これらの記号を用いると、このとき $c^e(t), h^e(t)$ に関して、各 $t \geq 0$ で消費財の需給均衡および企業の利潤最大化条件

$$c^e(t) = F\left[Lh^e(t), L\right]/L = F\left[h^e(t), 1\right] = f\left[h^e(t)\right], \tag{12}$$

$$F_h\left[Lh^e(t), L\right] = F_h\left[h^e(t), 1\right] = f'\left[h^e(t)\right] = p(t), \tag{13}$$

$$F_l\left[Lh^e(t), L\right] = F_l\left[h^e(t), 1\right] = w(t) \tag{14}$$

が成立しているはずである。ただし、f は (6) で定義された労働 1 単位あたりの生産関数である。また、生産関数の一次同次性から導かれる (4) と (5) の性質を使っている。

以上の 3 つの方程式より

$$\begin{aligned}
c^e(t) &= F\left[h^e(t), 1\right] = F_h\left[h^e(t), 1\right] h^e(t) + F_l\left[h^e(t), 1\right] \\
&= p(t)h^e(t) + w(t)
\end{aligned}$$

を得る。つまり

$$p(t)h^e(t) + w(t) - c^e(t) = 0 \text{ all } t \geq 0. \tag{15}$$

(15) は、預金残高が

$$M^e(t) = 0 \text{ all } t \geq 0 \tag{16}$$

を満たすことを意味している。実際のところ、森林の売買の議論と同様に、ある時点である家計にとって借金（貯金）をすることが効用を増加させるならば、それはすべての家計についてそうであり、貨幣市場は均衡しない。均衡価格の組 $(p(t), w(t), r(t))$ は、利子率が適当な水準に選ばれることによって、借金（貯金）が家計の効用を増加させない状況、その結果、この 0 預金残高を家計に選択させる状況を生み出しているのである。

4.5 競争均衡経路と最適経路の一致

以上の結果 (12) と (16) を、家計の効用最大化問題に代入する。競争均衡経路上での家計の効用最大化問題は次のように書ける。

$$\max_{h(t)} \int_0^\infty u[h(t)]e^{-\rho t}dt,$$
$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t), x(t) \geq 0, h(t) \geq 0 \text{ each } t \in [0, \infty),$$
$$x(0) = x_0 > 0 \text{ given,}$$

ただし、$u[h(t)] = U[f(h(t))]$。これは (9) の社会的最適化問題である。つまり、競争均衡経路は社会的最適経路と一致する。この結果は、アダム・スミスの見えざる手の議論、すなわち

> 彼は公共の利益を推進しようと意図してもいないし、どれほど推進しているかを知っているわけでもない。彼はただ彼自身の安全だけを意図しているのであり、彼自身の儲けを意図しているのである。そして、彼はこのばあいにも、みえない手に導かれて、彼の意図のなかにまったくなかった目的を推進するようになるのである。自分自身の利益を追求することによって、彼はしばしば、実際に社会の利益を推進しようとするばあいよりも効果的に、それを推進する。(『国富論』, 1776 年初版, 水田洋監訳・杉山忠平訳、岩波文庫）

を確認するものとなっている。より正確には、それは “厚生経済学の第一基本定理” と呼ばれるものの一例である：

厚生経済学の第一基本定理：競争均衡は効率的である。

ここで効率的とは、いずれかの家計の効用を低下させることなしにどの家計の効用も上昇させることができない状態を意味する[9]。(9) の解がこの条件を満たすことを確認すること。

[9] 効率性の実現は、経済学が考える社会のゴールの一つである。その望ましさを理解するには、効率的ではない状態を考えればよい。そこでは、誰も不幸にすることになく誰かをより幸せにできる（パレート改善可能）。効率的な状態とは、パレート改善をし尽くして、もはや改善の余地がない状態である。詳細は経済学のテキストを参照。

注意として、この定理は競争経済で全ての財が市場で取引されているときに成立する。たとえば森林資源の環境サービスは、一般に取引する市場をもたない（そのような財が存在することを外部性が存在するという：外部性＝市場の「外」）。外部性が存在すると、第一基本定理は成立せず、最適経路と均衡経路とは乖離する。今回の授業では森林の環境サービスを考慮していないために上の結果が得られた、ということに注意が必要である。次の授業では、森林の環境サービス（外部性）を導入し、実際に最適経路と均衡経路が乖離することを見る。

5　経済動学のための最適化理論

この節では、上で得られた最適＝均衡経路の性質を調べるために必要となる数学を概説する。関連する数学分野は、変分法、最適制御理論、動的計画法である。これらはいずれも時間を通じての最適化問題を扱う。特に無限計画期間問題を扱う点が経済学の特徴である。再び、(9) を示す。

$$\max_{h(t)} \int_0^\infty u[h(t)]e^{-\rho t}dt,$$
$$\text{subject to } \dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t), x(t) \geq 0, h(t) \geq 0 \text{ each } t \in [0, \infty),$$
$$x(0) = x_0 > 0 \text{ given},$$

これは典型的な（そして最も簡単な）経済動学モデルであり、このタイプの問題をはじめて扱った経済学者の名をとって Ramsey 問題、あるいはその後にこの問題に対する重要な理論的貢献を果たした経済学者の名を加えて、Ramsey-Cass-Koopmans 問題と呼ばれる。

5.1　用語

- 最大化されるもの（max 記号のかかっている部分）を目的関数 objective function[10]、
- 最大化するために制御する（選択する）変数を制御変数 control variable、
- 制約条件（subject to 以下の部分）のなかで、微分方程式で表現されているものを状態方程式 state equation、
- 状態方程式でその時間変化が表されるものを状態変数 state variable、そして
- 初期時点での状態変数の所与の値を初期条件 initial condition

と呼ぶ。また経済モデルの多くでは、制御変数と状態変数が 0 以上の値をとることを制約条件に含めるが、これを

- 非負条件 non-negativity condition

という。

[10] この場合、数値ではなく関数 $h(t)$ を求める問題になっているので目的汎関数 objective functional と呼ぶこともある。

- 状態変数が各時点でとることのできる値の範囲（集合）は状態空間 state space

と呼ばれる。上の問題では、状態空間 X は非負実数 R_+ と一致する。ただし初期条件を $x_0 \in [0,1]$ の範囲に制限するならば、どのような制御でも状態変数は環境収容力 $x=1$ を超えることはない。したがって、状態空間を区間 $X=[0,1]$ と設定してもよい。

さらに以下では、

- 問題の解は最適制御 optimal control、
- 最適制御によって発生する状態変数の時間経路を最適経路 optimal path

と呼ぶ[11]。ここで経路 path とは時間の関数をいう。特に

- 状態変数の経路を、軌道 trajectory と呼ぶ

ことがある。ややこしいが、

- 軌道から時間の次元を無視したものを軌跡 orbit と呼ぶ。

たとえば、状態変数の軌道 $x(t)\ t \in [0,\infty)$ に対して、その軌跡とは、状態空間の部分集合

$$Y = \{x \in X | \text{ there exists some } t \in [0,\infty) \text{ such that } x(t) = x\}$$

で与えられるものである（軌道の状態空間への射影 projection）。軌跡と軌道は言葉が似ているため混乱しやすいので、状態変数の経路（軌道）を、ここではカタカナ書きでトラジェクトリと表す。

状態変数が状態空間に含まれていなければならないように、制御変数もまた一定の条件を満たさなければならない。非負条件はその一つである。しかしそれだけでなく、以下のような条件を制御は満たす必要がある。それらの条件を満たす制御は、

- 実行可能 feasible あるいは許容可能 admissible

と呼ばれる[12]。すなわち、実行可能な制御 $h(t)$ とは、非負条件とともに、次のふたつの条件を満たすものである。第一は目的関数の（ルベーグ）積分がうまく定義できることであり、制御 $h(t)$ は（ルベーグ測度に関して）可測関数でなければならない。第二に、対応する状態変数の経路 $x(t)\ t \in [0,\infty)$ がうまく定義できることが必要になる。そのためには、初期条件 $x(0)=x_0$ のもとで、状態方程式（微分方程式）$\dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t)$ に一意的な解が存在し、それによって誘導される

[11] 最適制御も時間の関数だから、これもまた最適経路と呼ぶことができる。このため、正確には「状態変数の」最適経路、「制御変数の」最適経路、という方が混乱を招かなくてよいのだが、言葉が長くなるので、ここで最適経路といえば状態変数に関するものと決めておく。

[12] ここで重要なことは、実行可能あるいは許容可能という “おまじない” の言葉で以下の条件が非負条件とともに満たされるということを意味する、ということである。以下の条件を正確に理解するには、測度論（ルベーグ積分）と微分方程式の知識が必要となる。気にならない人は無視してよいが、気になる人は、関連する数学のテキスト（学部学生向けで十分）を勉強すること。

経路 $x(t)$ は状態空間から飛び出してはいけない。前者はたとえば $h(t)$ が（局所的に）リプシッツ連続 (locally) Lipschitz continuous であればよいが、最適制御がこれを満たす保証は一般にはない。慣例として、制約としてはより弱い連続性として、区分的に連続な piecewise continuous 関数のクラスで最適制御を探すことが行われている。問題 (9) の場合、その最適制御は実行可能であることが容易に確認できる。通常、社会的最適化と競争均衡の経済モデルでは、このパラグラフで述べている数学上のややこしい条件は満たされる（ようにモデルが設定される)。しかし、後に講義する共有地の悲劇のモデル（微分ゲーム）では、必ずしもそうとは限らない。

5.2 諸結果

ここでは Ramsey 問題を考察するために有用な一連の命題を提供する。ただし、証明や表現は雑である。厳密さを好む人は、“可測”、“ほとんどいたるところ”、“区分的に連続” といった言葉を適宜、補なってほしい。証明に興味のない人は結果だけを知ればよい[13]。いくつかの結果は、問題 (9) という特殊なモデルだけでなく、より一般的なモデルでも成立する。ここでより一般的とは、たとえば状態変数や制御変数が複数存在する、瞬間的効用が状態変数によって影響される、瞬間的効用関数、状態方程式、状態空間、制御変数に関する制約が時間を通じて変化する、といった内容を含む。そうした一般的なケースでも命題の証明方法は同じである。また、各命題の後の Remark に挙げた文献には、そうしたより一般的なモデルに対する証明がある。

5.2.1 最適性の十分条件

Proposition 1 u と g は凹とする。実行可能な制御とそれから生じるトラジェクトリのペア $(h^*(t), x^*(t))$ に対して、ある時間の（絶対連続非負）関数 $\lambda(t)$ が存在して、次の 3 条件を満たすならば、$(h^*(t), x^*(t))$ は問題 *(9)* の最適制御と最適経路である。

$$u[h^*(t)] + \lambda(t)\{g[x^*(t)] - h^*(t)\} = \max_{h\geq 0} u(h) + \lambda(t)\{g[x^*(t)] - h\} \ \ \textit{each}\ t \geq 0, \tag{17}$$

$$\dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = -\frac{\partial[u[h^*(t)] + \lambda(t)\{g[x^*(t)] - h^*(t)\}]}{\partial x} \ \ \textit{each}\ t \geq 0, \tag{18}$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)x^*(t) = 0. \tag{19}$$

Proof. 証明には少し準備が必要になる。まず、ハミルトン関数 Hamiltonian と呼ばれる関数 H と 最大化ハミルトン関数 maximized Hamiltonian と呼ばれる関数 H^* を定義する：

$$H(h, x, \lambda) = u(h) + \lambda[g(x) - h], \tag{20}$$

$$H^*(x, \lambda) = \max_{h\geq 0} u(h) + \lambda[g(x) - h]. \tag{21}$$

[13]余談だが、命題だけを覚えておけばよい、といってもなかなか頭に入らない。苦労して証明してはじめて何が言いたいのかわかる。ジレンマなのは、苦労して証明してもしばらく使わないと証明を忘れてしまうことである。しかし、命題が何を言いたいのかは頭に残ると思う。

この定義によって、(17), (18) はそれぞれ

$$u[h^*(t)] + \lambda(t)\{g[x^*(t)] - h^*(t)\} = H^*[x^*(t), \lambda(t)] \tag{22}$$

$$\dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = -\frac{\partial H^*[x^*(t), \lambda(t)]}{\partial x} \tag{23}$$

と表されることに注意。

次に maximized Hamiltonian が x に関して凹関数であることを確認する。$h(x)$ で Hamiltonian を最大化する h を表す。$z, y \geq 0$ と $\mu \in (0, 1)$ を自由に選ぶ。このとき

$$\begin{aligned}
&H^*[\mu y + (1-\mu)z, \lambda] \\
&= u\{h[\mu y + (1-\mu)z]\} + \lambda\{g[\mu y + (1-\mu)z] - h[\mu y + (1-\mu)z]\} \\
&\geq u[\mu h(y) + (1-\mu)h(z)] + \lambda\{g[\mu y + (1-\mu)z] - [\mu h(y) + (1-\mu)h(z)]\} \\
&\geq \mu u[h(y)] + \lambda[\mu g(y) - \mu h(y)] + (1-\mu)u[h(z)] + \lambda[(1-\mu)g(z) - (1-\mu)h(z)] \\
&= \mu H^*(y, \lambda) + (1-\mu)H^*(z, \lambda)
\end{aligned}$$

が得られる。つまり H^* は x に関して凹である。なお、上の式で 3 行目の不等号は、最適な $h[\mu y + (1-\mu)z]$ を、必ずしも最適とは限らない $\mu h(y) + (1-\mu)h(z)$ に置き換えたことによる。4 行目の不等号は u と g の凹性、および λ の非負性から成立する。

以上の準備のもとで、ここで示すことは、共通の初期条件 $x(0) = x_0$ からはじまる任意の実行可能な制御とそれから生じるトラジェクトリのペア $(h(t), x(t))$ は、決して $(h^*(t), x^*(t))$ 以上の生涯効用を生まないことである。

まず、maximized Hamiltonian の定義から $H[h(t), x(t), \lambda(t)] \leq H^*[x(t), \lambda(t)]$ が成立する。他方、今みたように H^* は x に関して凹なので、

$$H^*[x^*(t), \lambda(t)] - H^*[x(t), \lambda(t)] \geq \frac{\partial H^*[x^*(t), \lambda(t)]}{\partial x}[x^*(t) - x(t)]$$

が成立する（(2) を思い出すこと。また右辺の偏微分が可能なことは (18) あるいは (23) で仮定されている）。これらふたつの不等式を組合せることで、次を得る。

$$H[h(t), x(t), \lambda(t)] \leq H^*[x^*(t), \lambda(t)] - \frac{\partial H^*[x^*(t), \lambda(t)]}{\partial x}[x^*(t) - x(t)].$$

(20), (22), (23) をこれに代入すれば

$$\begin{aligned}
&u[h(t)] + \lambda(t)\{g[x(t)] - h(t)\} \\
&\quad \leq u[h^*(t)] + \lambda(t)\{g[x^*(t)] - h^*(t)\} + [\dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t)][x^*(t) - x(t)].
\end{aligned}$$

さらに、$\dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t), \dot{x}^*(t) = g[x^*(t)] - h^*(t)$ を代入し、両辺に $e^{-\rho t}$ を乗じて整理すると

$$u[h(t)]e^{-\rho t} \leq u[h^*(t)]e^{-\rho t} + \{\lambda(t)[\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t)] + [\dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t)][x^*(t) - x(t)]\}e^{-\rho t} \tag{24}$$

が得られる。ここで

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\{[\lambda(t)e^{-\rho t}][x^*(t)-x(t)]\}}{dt} \\
&= [\lambda(t)e^{-\rho t}][\dot{x}^*(t)-\dot{x}(t)] + [\dot{\lambda}(t)-\rho\lambda(t)][x^*(t)-x(t)]e^{-\rho t} \\
&= \{\lambda(t)[\dot{x}^*(t)-\dot{x}(t)] + [\dot{\lambda}(t)-\rho\lambda(t)][x^*(t)-x(t)]\}e^{-\rho t}
\end{aligned}
$$

であることに気付けば、(24) の不等式は

$$
u[h(t)]e^{-\rho t} - u[h^*(t)]e^{-\rho t} \leq \frac{d\{[\lambda(t)e^{-\rho t}][x^*(t)-x(t)]\}}{dt}
$$

と書きなおせる。次にその両辺を $[0, T]$ にわたって積分する。ここで $T > 0$ は任意に選ばれている（のちに $T \to \infty$ を考える)。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T u[h(t)]e^{-\rho t}dt - \int_0^T u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt \\
&\leq \int_0^T \frac{d\{[\lambda(t)e^{-\rho t}][x^*(t)-x(t)]\}}{dt}dt \\
&= [\lambda(T)e^{-\rho T}][x^*(T)-x(T)] - \lambda(0)[x^*(0)-x(0)] \\
&= [\lambda(T)e^{-\rho T}][x^*(T)-x(T)],
\end{aligned}
$$

最後の等式は、$x^*(0) = x(0) = x_0$ による。

最後に、$T \to \infty$ とする。(19) によって、上式の右辺で、

$$
\lim_{T\to\infty} \lambda(T)e^{-\rho T}x^*(T) = 0
$$

となる。$\lambda(T)$ と $x(T)$ はともに非負なので、残された右辺の部分は

$$
\lim_{T\to\infty} \lambda(T)e^{-\rho T}x(T) \geq 0
$$

でなければならない。以上より、

$$
\int_0^\infty u[h(t)]e^{-\rho t}dt - \int_0^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t} \leq 0.
$$

これで、同じ初期条件からはじまる任意の実行可能な制御 $(h(t), x(t))$ に対して $(h^*(t), x^*(t))$ はそれ以上の生涯効用を生むこと、つまり最適制御と最適経路であることが示された。 ■

[Remark]

1. 以上の証明は、Arrow, K. J. and M. Kurz (1970) *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Johns Hopkins Press, Chapter 2 によっている。基本的な証明のアイデアは、Mangasarian, O. L. (1966) Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems, *SIAM*

Journal of Control **4**, 139-152 で与えられており、この命題は Mangasarian's sufficient condition と呼ばれることがある。十分条件のより進んだ解説は Dockner, E., S. Jørgensen, N. V. Long, and G. Sorger (2000) *Differential Games in Economics and Management*, Cambridge University Press を参照。

2. 最適制御理論の用語では、命題に現れた 3 つの条件はそれぞれ、(17): 最大値条件 maximum condition、(18): 随伴方程式 adjoint equation、(19):横断性条件 transversality condition、と呼ばれる。また、これら条件の全体を、ポントリャーギンの最大値原理 Pontryagin's maximum principle という。また、$\lambda(t)$ を共役状態変数 costate variable と呼ぶ。経済学ではそれを資源の潜在価格 shadow price と呼んでいる。

3. 変分法の用語では、(17) と (18) を合わせたものをオイラー方程式 Euler equation と呼んでいる。もう少し正確にいうと、問題 (9) をさらに縮約した形（制御変数を消去した形）で表現して、

$$
\begin{aligned}
&\max_{h(t)} \int_0^\infty u\{g[x(t)] - \dot{x}(t)\}e^{-\rho t}dt \\
&\text{subject to } g[x(t)] - \dot{x}(t) \geq 0, x(t) \geq 0, \text{ each } t \in [0, \infty), \\
&\qquad x(0) = x_0 > 0 \text{ given}
\end{aligned}
$$

と表し、最適経路 $(x^*(t), \dot{x}^*(t))$ 上で、時間の関数 $p(t), q(t)$ を

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \frac{\partial[u\{g[x^*(t)] - \dot{x}^*(t)\}]}{\partial x}, \\
q(t) &= -\frac{\partial[u\{g[x^*(t)] - \dot{x}^*(t)\}]}{\partial \dot{x}}
\end{aligned}
$$

で定義する。Euler equation とは次をいう：

$$
\dot{q}(t) - \rho q(t) = -p(t) \text{ for each } t \geq 0.
$$

この条件と、(17) と (18) を合わせたものは、最適制御が $h^*(t) > 0$ for each $t \geq 0$ を満たす限り同値である。(17) は、この場合、

$$
\lambda(t) = u'[h^*(t)] = q(t) \tag{25}
$$

となる。この結果を (18) に代入すると $\dot{q}(t) - \rho q(t) = \dot{\lambda}(t) - \rho\lambda(t) = -\lambda(t)g'[x(t)] = -u'[h^*(t)]g'[x(t)] = -p(t)$ と Euler equation が得られる。

4. 上記の命題は、最適制御、最適経路の十分条件を与えるものである。一定の仮定のもとで、ポントリャーギンの最大値原理は問題の必要条件となる。つまり $(h^*(t), x^*(t))$ が解であるならば、ある非負関数 $\lambda(t)$ が存在して、(17), (18), (19) を必ず満たす。厳密には、無限計画期間問題に関して (19) は一定の条件の下でのみ必要条件となる[14]。

[14] 興味のある人は上東貴志「横断性条件の必要性と十分性」、西村和雄・福田慎一編著「非線形均衡動学」東大出版会、第 4 章を参照。

[命題の直接的応用：最適定常状態]　もし、$g'(x_0)=\rho$ ならば、x_0 の持続：

$$x^*(t)=x_{ss}=x_0,\quad h^*(t)=h_{ss}=g(x_0)\ (\text{constant})$$

は最適経路と最適制御である。

Proof. まず、

$$\dot{x}^*(t)=g(x_{ss})-h_{ss}=0$$

であることに注意する。次に $\lambda(t)=\lambda_{ss}=u'(h_{ss})$ とセットする。ハミルトニアンは

$$H(h,x,\lambda)=u(h)+\lambda[g(x)-h]$$

と書ける。よって、次の最適性の十分条件が得られる。

$$\begin{gathered}\partial H\left(h_{ss},x_{ss},\lambda_{ss}\right)/\partial h=u'(h_{ss})-\lambda(t)=0,\\ \dot{\lambda}(t)=0=\rho\lambda_{ss}-\lambda_{ss}g'(x_{ss})=0,\\ \lim_{t\to\infty}e^{-\rho t}\lambda_{ss}x_{ss}=0.\end{gathered}$$

■

→ ここでの特別なモデルに関してだが、最適定常状態 x_{ss} は自然成長関数 g と割引率 ρ によってのみ決まり、生産関数 F と効用関数 U には依存しない。

5.2.2 最適経路の一意性

Proposition 2 u が狭義凹で g が凹のとき、問題 *(9)* に最適経路（最適資源経路）$x^*(t)$ が存在すれば、それは一意である。

Proof. 最適経路 $x^*(t)$ を生成する最適制御を $h^*(t)$ で表す。それとは別の最適経路と最適制御のペア $(x(t),h(t))$ が存在して、$x^*(t)\neq x(t)$ となる時点があることを仮定する。このことは、$h^*(t)\neq h(t)$ となる時点が（正の測度で）存在することを意味する。$\lambda\in(0,1)$ を自由に選び、（最適とは限らない）トラジェクトリ $z(t)=\lambda x^*(t)+(1-\lambda)x(t)$ を考える。明らかに $z(t)$ は非負制約を満たす。その時間微分は $\dot{z}(t)=\lambda\dot{x}^*(t)+(1-\lambda)\dot{x}(t)$ で与えられる。このトラジェクトリを生む制御 $y(t)=g[z(t)]-\dot{z}(t)$ が非負制約を満たすことをまず確認する。g が凹関数であることを利用して、

$$\begin{aligned}\dot{z}(t)&=\lambda\dot{x}^*(t)+(1-\lambda)\dot{x}(t)\\ &=\lambda\{g[x^*(t)]-h^*(t)\}+(1-\lambda)\{g[x(t)]-h(t)\}\\ &\leq g[\lambda x^*(t)+(1-\lambda)x(t)]-[\lambda h^*(t)+(1-\lambda)h(t)]\\ &=g[z(t)]-[\lambda h^*(t)+(1-\lambda)h(t)]\end{aligned}$$

を得る。これより、

$$y(t)=g[z(t)]-\dot{z}(t)\geq[\lambda h^*(t)+(1-\lambda)h(t)]\geq 0.$$

次にこの不等式を利用して、以下の計算を行う。u が狭義単調増加かつ狭義凹関数であることと、正の測度で $h^*(t) \neq h(t)$ となる時点が存在することに注意すると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u[y(t)]e^{-\rho t}dt &\geq \int_0^\infty u[\lambda h^*(t) + (1-\lambda)h(t)]e^{-\rho t}dt \\ &> \int_0^\infty \lambda u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt + \int_0^\infty (1-\lambda)u[h(t)]e^{-\rho t}dt \\ &= \int_0^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt\end{aligned}$$

を得る。つまり $z(t)$ はより高い総効用をもたらすことになり、$x^*(t)$ の最適性と矛盾が生じる。なお上式 3 行目の等号は、$h^*(t)$ と $h(t)$ がともに最適制御であり、

$$\int_0^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty u[h(t)]e^{-\rho t}dt$$

であることによる。■

[Remark]

- この命題が述べていることは、初期条件 x_0 に対して、最適経路が存在するならば、それはただ一つしかないということである。初期条件が異なれば、（当然のことながら）その最適経路は異なる。
- 上で、最適定常状態（$g'(x_{ss}) = \rho$ を満たす x_{ss} の持続）を求めた。ここでの命題から、初期資源状態が x_{ss} であるとき、他に最適経路は存在しないことを意味している。

5.2.3 位相図

最適制御が内点（$h^*(t) > 0$）であるとき、最大値条件 (17) は、$u'(h^*(t)) = \lambda(t)$ と表される。u は狭義凹関数（u' は狭義減少関数）なので、共役状態変数 $\lambda(t)$ が決まれば $h^*(t)$ が決まり、u' の逆関数を $h[\cdot]$ と表すと

$$h^*(t) = h[\lambda(t)]$$

と書けることがわかる。このようにして制御変数を消去することで、状態変数と共役状態変数に関する連立微分方程式が得られる：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= g[x(t)] - h[\lambda(t)], \\ \dot{\lambda}(t) &= \{\rho - g'[x(t)]\}\, \lambda(t).\end{aligned}$$

この連立微分方程式のベクトル場を $x-\lambda$ 平面に描いたものを位相図と呼ぶ。位相図は、（一状態変数モデル）の最適経路を知るために有用である。

位相図を得るには、それぞれの微分方程式がゼロとなるような $(x(t), \lambda(t))$ の組を $x-\lambda$ 平面に描く（その軌跡はアイソクラインと呼ばれる）とよい。二つの軌跡の交点は、最適定常状態と対応する共益状態変数の組 (x_{ss}, λ_{ss}) である。第一行目について、そのアイソクラインは $\lambda = u'(g(x))$ であり $d\lambda/dx = u''(g(x))g'(x)$ より図 1 (a) のベクトル場が得られる。第二行目のアイソクラインは $\rho = g'[x(t)]$ であり、図 1 (b) が得られる。これら二つを合わせた図 1 (c) が位相図である。

そこには 定常状態 (x_{ss}, λ_{ss}) に至る唯一の曲線（一次元多様体と呼ばれる）があることがわかる。この線上に乗っている限り、$(x(t), \lambda(t))$ は定常状態に収束する。このことは横断性条件 (19) が満たされることを意味している。随伴方程式 (18) は上の連立微分方程式の 2 行目であり、満たされている。以上から、Proposition 1 により、この一次元多様体を辿ることは最適であることがわかる。さらに Proposition 2 により、ほかに最適経路は存在しない。よって、それは唯一の最適経路である。別の言い方をすると、初期資源ストック $x(0) = x_0$ が与えられると、一意的に $\lambda(0)$ が定まって、最適経路 $(x^*(t), \lambda(t))$ が決まる。よって最適収穫 $h^*(t) = h(\lambda(t))$、最適生産・消費量 $c^*(t) = f(h^*(t))$ も定まる。反対に適切でない $\lambda(0)$ を選ぶと、馬の鞍から滑る落ちるように最適でない経路を辿ることになる。このような状況をさして、均衡点 (x_{ss}, λ_{ss}) は鞍点安定 saddle-point stable と呼ぶ。

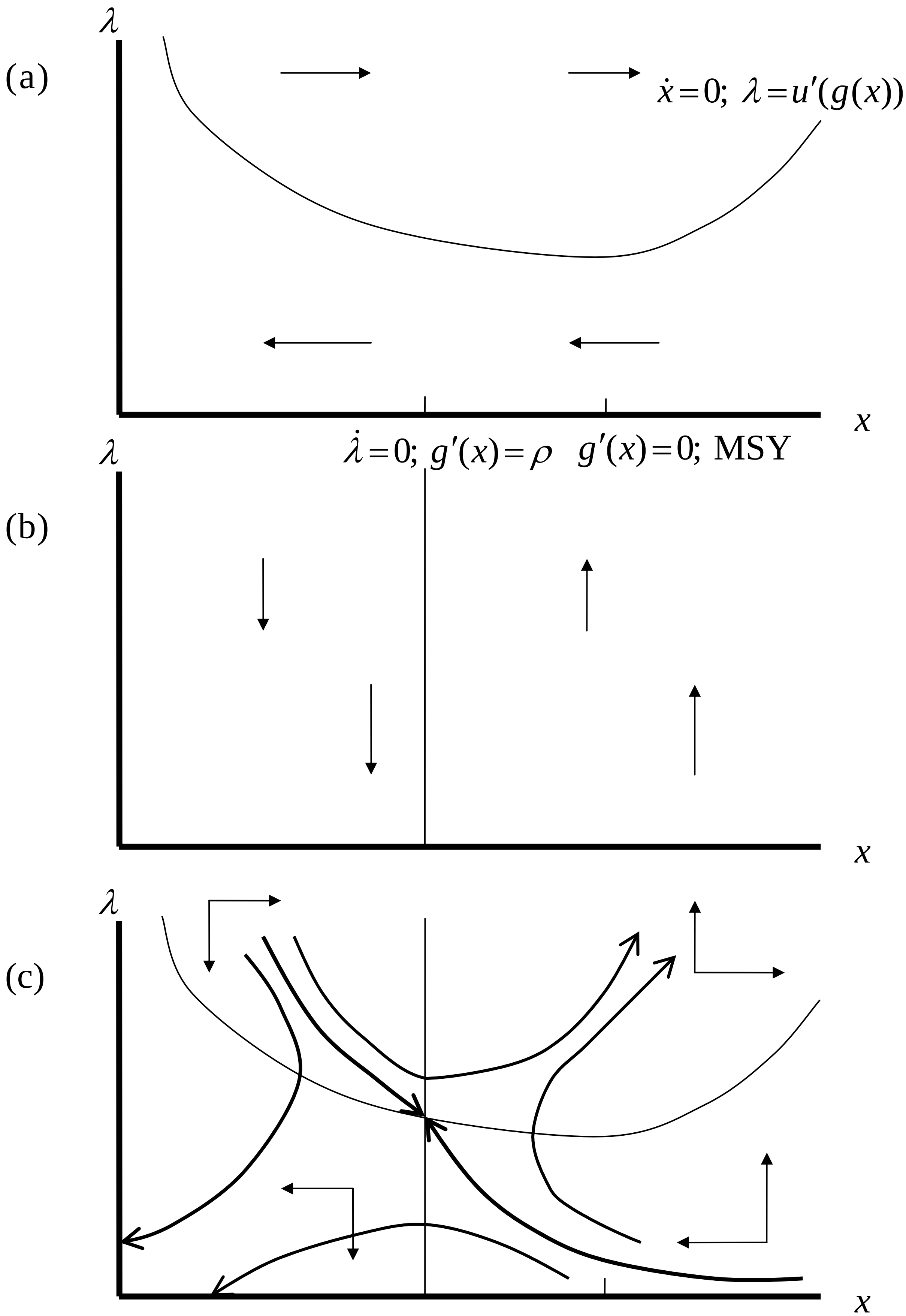
最後に最適経路が単調であることを確認しよう。このことは補論の Proposition 3 に沿う結果である。

Remark

1. 最適経路は最適定常状態 x_{ss} に収束するが、到達に要する時間は無限大である。$\dot{x}_{ss}(t) = 0$ なので、$x^*(t)$ が x_{ss} に近づけば近づくほど、そのスピード $\dot{x}^*(t)$ は 0 に近づくことに注意。

2. x^*_{ss} があらゆる内点初期条件 $x_0 > 0$ からの最適経路の収束先になっていることを、x_{ss} は大域的に漸近安定である globally asymptotically stable という。経済学では、その性質をターンパイク性 turnpike property と呼ぶことがある。

3. 安定性のその他の概念として、リャプノフ安定 Lyapunov stable がある。x^*_{ss} がリャプノフ安定とは、そこに近づかないかもしれないが、少なくとも x^*_{ss} からある一定の範囲にとどまってそれ以上離れることはない、という性質である。経済学では、これを近傍ターンパイク性 neighborhood turnpike property と呼ぶことがある。



(a)
λ
ẋ=0; λ=u′(g(x))
x
λ̇=0; g′(x)=ρ
g′(x)=0; MSY
(b)
λ
x
(c)
λ
x

6　最適経路と均衡経路の特徴づけ

6.1　社会的最適資源利用

社会にとって望ましい資源の利用は、次のように要約できる。

- 資源の限界生産性 $g'(x)$ が人々の時間割引率 ρ と一致する水準 x_{ss}: $g'(x_{ss}) = \rho$ に収束するような経路 $x^*(t)$ を辿ることが社会にとって最適な資源利用（人々の生涯効用を最大化する資源利用）である。もし現在の資源ストック量が $x_0 \in (0, x^*_{ss})$ であれば、最適経路は資源量を単調に増加させるものとなり、反対に $x_0 > x^*_{ss}$ であれば単調に減少させるものとなる。

時間割引率 ρ は、人々が将来得られる効用をどのように評価するかを表す。その値が大きいほど将来の効用を（現在の効用と比較して）低く評価する。時間割引率が高い人々から構成される社会では、最適経路の収束先となる資源ストック x_{ss} はより低い水準となる。

最適経路を辿るとき、資源の収穫量、つまり最適制御 $h^*(t)$ がどのようなものになるかは、位相図からもわかる。しかしここでは、Proposition 1 で示した最大化条件と随伴方程式からそれを導出する。随伴方程式 (18) は整理すると、$\dot{\lambda}(t)/\lambda(t) = \rho - g'[x^*(t)]$ となる。一方、最大化条件 (17) は資源を収穫することが最適である限り[15]、$u'[h^*(t)] = \lambda(t)$ と同値である。この最大化条件の両辺に対数をとって時間微分すると、

$$\frac{u''[h^*(t)]\dot{h}^*(t)}{u'[h^*(t)]} = \frac{d \log \lambda(t)}{dt} = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \rho - g'[x^*(t)]$$

を得る。$\dot{h}^*(t)$ について解けば、

$$\frac{\dot{h}^*(t)}{h^*(t)} = \frac{u'[h^*(t)]}{h^*(t)u''[h^*(t)]}\{\rho - g'[x^*(t)]\} = \frac{1}{\sigma[h^*(t)]}\{g'[x^*(t)] - \rho\} \tag{26}$$

を得る。$u' > 0, u'' < 0$ なので、$\rho < g'[x^*(t)]$ であるとき $\dot{h}^*(t) > 0$、$x^*(t) > x_{ss}$ ならば、$\dot{h}^*(t) < 0$。つまり、次がいえる。

- $x^*(t) < x_{ss}$ ならば、すなわち最適経路が単調増加のとき、最適な資源採取量も時間とともに増加する（狭義単調増加）。反対に、$x^*(t) > x_{ss}$ ならば最適な資源採取量は時間とともに減少する（狭義単調減少）。最適資源採取量は時間とともに単調に変化して、$g(x_{ss})$ の水準に収束する。

なお (26) 式で現れた収穫量に対する限界効用の弾力性 $\sigma(h) = -hu''(h)/u'(h)$ は、異時点間代替弾力性の逆数と呼ばれる[16]。収穫量の成長率 $\dot{h}^*/h^*$ は、異時点間代替弾力性が大きいほど大きく、また割引率が小さいほど大きくなる。

---

[15] $\lim_{c \searrow 0} u'(c) = \infty$ という仮定をおくとき、これは成立する。この仮定が意味しているのは、人々は各時点での消費がゼロになることを決して望まないこと、仮にその代わりに他の時点でいかに多くの消費が実現できるとしても、ということである。

[16] 通時的経済モデルで非常によく用いられる効用関数として、

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}, & \sigma > 0 \\ \log c, & \sigma = 0 \end{cases}$$

6.2 競争均衡経路

ここでは競争均衡価格を特徴づけする。要素価格 $p(t), w(t)$ については (11) で示されている。つまりそれらはそれぞれ、最適経路上での収穫物、労働の限界生産性に等しい。残されているのは利子率 $r(t)$ と森林の均衡価格 $R(t)$ である。各時点での家計の所有している森林面積を $A(t)$ で表す。初期条件は $A(0) = 1$ であり、均衡上では $A^e(t) = 1$ for all $t \geq 0$ が成立している。同様に家計の資産残高 $M(t)$ は、その初期条件が $M(0) = 0$ であり、均衡上では $M^e(t) = 0$ for all $t \geq 0$ が成立している。このような均衡をサポートする $r(t), R(t)$ を導出することがここでの課題である。

6.2.1 発見的考察

競争均衡経路上では、森林として資産を保持することと銀行に預金することが無差別になっているはずである。さもなければ、銀行に預金か借金ができることになり、$M^e(t) = 0$ に反する。このことを使って、発見的 heuristic に $r(t), R(t)$ を導出してみよう。

利子率　はじめに収穫物に注目する。任意の $t \geq 0$ 時点で収穫物を均衡から微少量 Δh だけ増やして、それを銀行に預けることを考える。このとき、得られる利子は $r(t)p(t)\Delta h$ である。一方、そうした収穫をしないならば、森林資源は $\dot{p}(t)\Delta h + p(t)g'(x^*(t))\Delta h$ だけ資産が増加する。ここで第一項は価格変化によるキャピタル・ゲイン（ロス）を表し、第二項は森林の成長による増加分を表す。両者は一致する必要があるから、

$$r(t) = g'(x^*(t)) + \dot{p}(t)/p(t) \tag{27}$$

を得る。なおこの等式からわかるように利子率は最終的に割引率 ρ に収束する。

森林価格　次に森林それ自身の売買について考える。任意の $t \geq 0$ 時点で均衡から微少量の森林 Δa を販売する場合、それによって得られる収入は $R(t)\Delta a$ である。一方、販売しない場合、その美少量の森林から無限の将来にわたって得られる収入は

$$\int_t^\infty p(\tau)h^*(\tau)\Delta a \exp\left[-\int_t^\tau r(s)ds\right] d\tau$$

である[17]。よって次を得る。

$$R(t) = \int_t^\infty p(\tau)h^*(\tau) \exp\left[-\int_t^\tau r(s)ds\right] d\tau \tag{28}$$

がある（c は消費量を表す）。この関数は、異時点間の消費の代替弾力性が一定（σ^{-1}）でありCIES(constant intertemporal elasticity of substitution) 型と呼ばれる。なお、授業のモデルは $u(h) = U[f(h)]$ であり、収穫量に対する reduced form utility function の異時点間代替弾力性を考えていることになる。

[17]各時点 τ （タウと読む）での収入 $p(\tau)h^*(\tau)\Delta a$ を利子率で割り引いて t 時点での現在価値に直したもの。時間とともに利子率が変化するケースの割引計算（積分）については、一番最初のレジメの「瞬間的利子率の導出」を参照のこと。

6.2.2 形式的考察

以上の結果を数式によって確かめておく。各時間での森林（土地付き）の販売量（負の値ならば購入量）を $a(t)$ で表す。森林の売買を許すと家計の効用最大化問題は、次のように書きなおされる：

$$
\begin{aligned}
&\max_{c(t),h(t),a(t)\geq 0} \int_0^\infty U[c(t)]e^{-\rho t}dt, \\
\text{subject to } & \dot{x}(t) = g[x(t)] - h(t), \\
& \dot{M}(t) = r(t)M(t) + p(t)h(t)A(t) + w(t) - c(t) + R(t)a(t), \\
& \dot{A}(t) = -a(t) \\
& \lim_{t\to\infty} M(t)e^{-\int_0^t r(s)ds} \geq 0 \\
& M(0) = 0, A(0) = 1, \text{ and } x(0) = x_0 > 0 \text{ are given.}
\end{aligned}
$$

ここで、1 行目の資源ストックの状態方程式は単位面積の森林に関するものであり、その面積が $A(t)$ のときに得られる実際の収穫量は、預金残高の状態方程式に示されているように、$h(t)A(t)$ となる。また、この状態方程式には、森林の売買による収入の変化 $R(t)a(t)$ が付け加えられている。さらに制約条件には森林面積に関する状態方程式 $\dot{A}(t) = -a(t)$ が加わる。

さて、状態方程式は 3 つだが、以前に証明した Proposition 1 はこのケースにも適用できる[18]。すなわち、ある非負の関数 $\lambda(t), \mu(t), \xi(t)$ が存在して、Hamiltonian $H(c,h,a,x,M,A,\lambda,\mu,\xi,t)$ を

$$
\begin{aligned}
H(\cdot) = &U(c) + \lambda[g(x) - h] \\
&+ \mu[r(t)M + p(t)hA + w(t) - c + R(t)a] + \xi\,(-a)
\end{aligned}
$$

で定義し、maximized Hamiltonian $H^*(x,M,\lambda,\mu,t)$ を

$$
H^*(x,M,A,\lambda,\mu,\xi,t) = \max_{c,h\geq 0,a} H(c,h,a,x,M,A,\lambda,\mu,\xi,t)
$$

と定義するとき、次の 3 条件を満たす制御 $c^e(t) = c^*(t), h^e(t) = h^*(t), a^e(t) = 0$ とそれから誘導される経路 $x^e(t) = x^*(t), M^e(t) = 0, A^e(t) = 1$ で家計の効用は最大化され、したがって競争均衡経路となる：

(1) 最大値条件

$$
U'(p(t)h(t) + w(t)) - \mu(t) = 0, \tag{29}
$$

$$
-\lambda(t) + \mu(t)p(t) = 0, \tag{30}
$$

$$
\mu(t)R(t) - \xi(t) = 0. \tag{31}
$$

(2) 随伴方程式

$$
\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)\left[\rho - g'(x^*(t))\right], \tag{32}
$$

$$
\dot{\mu}(t) = \mu(t)\left[\rho - r(t)\right], \tag{33}
$$

$$
\dot{\xi}(t) = \rho\xi(t) - \mu(t)p(t)h^*(t) \tag{34}
$$

[18]証明方法はまったく同じなので、各自、証明すること。

(3) 横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\left[\lambda(t)x^e(t)+\mu(t)M^e(t)+\xi(t)A(t)\right]=0. \tag{35}$$

以上を使って、まず利子率について

$$\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}=\rho-r(t)=\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}-\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}=\rho-g'(x^*(t))-\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}$$

を得る。ここで等式は順番に (33)、(30)、(32) による。この等式からすでに得られた (27) が確認される。

森林価格に関しては (32) に $\mu(t)R(t)=\xi(t)$ と変形し、両辺に対数をとって時間で微分し、(33) を代入すれば

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}=\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)}-\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}=\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)}-[\rho-r(t)]$$

を得る。一方、(34) に (32) を組合わせて

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{\xi(t)}=\rho-\frac{\mu(t)}{\xi(t)}p(t)h^*(t)=\rho-\frac{p(t)h^*(t)}{R(t)}.$$

したがって

$$\dot{R}(t)-r(t)R(t)=-p(t)h^*(t).$$

この微分方程式は次のように解ける：線型方程式の積分であることに気づけば

$$\frac{dR(t)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]}{dt}=-p(t)h^*(t)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]$$

と書ける。両辺を $[t,\infty)$ で積分する

$$\lim_{t\to\infty}R(t)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]-R(t)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]$$
$$=-\int_t^\infty p(\tau)h^*(\tau)\exp\left[-\int_0^\tau r(s)ds\right]d\tau.$$

左辺第一項はゼロになる[19]ので、結局

$$R(t)=\int_t^\infty p(\tau)h^*(\tau)\exp\left[-\int_t^\tau r(s)ds\right]d\tau$$

を得る。

[19] $\lim_{t\to\infty}R(t)=\lim_{t\to\infty}p(t)h^*(t)/r(t)$ は有限であり $\lim_{t\to\infty}r(t)=\rho>0$ となることによる。

7　補論：単調性と局所的安定性

本論では最適定常解の大域的漸近安定性を確認したが、このような大域的特性は、より複雑なモデルの場合、確認することが難しい。特にそこで用いられた位相図というテクニックは、状態変数がただ一つの場合にしか使えない。

このことに関連する話題をここでは取り上げる。最初に一状態変数の最適化問題で、最適経路が一意的ならば、それは単調になる、という結果を示す。これによって、最適経路は上がるか下がるかのどちらかになる。もし上限、あるいは下限があるならば、最適経路は必ずそこに収束することになる。

次に、より一般に状態変数が複数個ある場合にも応用できる結果を示す。そのようなケースでは、解の大域的性質を調べることはかなり難しい。そこで、代わりに、(x_{ss}, λ_{ss}) の近く（近傍）での局所的安定性が調べられることが多い。すなわち、定常状態に十分に近い x_0 から始まるとして、最適経路が x_{ss} に収束するかが調べられる。そうであるとき、x_{ss} は局所的に漸近安定であると呼ばれる。

7.1　最適経路の単調性

Proposition 3 問題 *(9)* に最適経路 $x^*(t)$ が存在し、それが一意ならば、その経路は時間の単調非減少かあるいは単調非増加関数である。

Proof. そうでないとする。つまり振動する区間があるとする。このときある時点 $\tau \geq 0$ と $\theta > 0$ が存在して、$x^*(\tau) = x^*(\tau+\theta)$ かつ $x^*(t)$ は $t \in [\tau, \tau+\theta]$ で一定ではない。最適制御 $h^*(t)$ と異なる制御として次のような $y(t)$ を考え、それから誘導されるトラジェクトリを $z(t)$ で表す：

$$y(t) = \begin{cases} h^*(t) & 0 \leq t \leq \tau \\ h^*(t+\theta) & \tau < t < \infty \end{cases},$$

$$z(t) = \begin{cases} x^*(t) & 0 \leq t \leq \tau \\ x^*(t+\theta) & \tau < t < \infty \end{cases}.$$

つまり、時間区間 $[\tau, \tau+\theta]$ の部分を省略した制御を考える。このような制御が実行可能であることは明らか。また、$x^*(t)$ と $z(t)$ を異なるトラジェクトリとするように τ, θ を選ぶことができることも明らか。最適経路は仮定により一意なので、次の関係が成立する。

$$\int_\tau^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt > \int_\tau^\infty u[y(t)]e^{-\rho t}dt = e^{\rho\theta}\int_{\tau+\theta}^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt.$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_\tau^{\tau+\theta} u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt &= \int_\tau^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt - \int_{\tau+\theta}^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt \\ &> (e^{\rho\theta}-1)\int_{\tau+\theta}^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt. \qquad (36)\end{aligned}$$

次にさらに別の制御 $h(t)$ と対応するトラジェクトリ $x(t)$ として以下のものを考える：

$$h(t) = \begin{cases} h^*(t) & 0 \leq t \leq \tau + \theta \\ h^*(t-\theta) & \tau + \theta < t < \infty \end{cases},$$

$$x(t) = \begin{cases} x^*(t) & 0 \leq t \leq \tau + \theta \\ x^*(t-\theta) & \tau + \theta < t < \infty \end{cases}.$$

つまり、時間区間 $[\tau, \tau + \theta]$ の部分をもう一度繰り返す制御である。このような制御もまた実行可能であり、$x(t)$ は $x^*(t)$ と異なる。最適制御とこの制御の生涯効用を比較する：

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty u[h(t)]e^{-\rho t}dt - \int_0^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt \\
&= \int_{\tau+\theta}^\infty u[h(t)]e^{-\rho t}dt - \int_{\tau+\theta}^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt \\
&= e^{-\rho\theta}\left[\int_\tau^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt - e^{\rho\theta}\int_{\tau+\theta}^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt\right] \\
&= e^{-\rho\theta}\left[\int_\tau^{\tau+\theta} u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt - (e^{\rho\theta}-1)\int_{\tau+\theta}^\infty u[h^*(t)]e^{-\rho t}dt\right] \\
&> 0.
\end{aligned}$$

ここで最後の不等号は、(36) による。これは $h^*(t)$ が最適制御であることに矛盾する。 ■

[Remark]

- この結果は、状態変数がただ一つで、最適経路が一意的なときにのみ成立する。
- 命題の証明は、Hartl, R. F. (1987) A simple proof of the monotonicity of the state trajectories in autonomous control problem, *Journal of Economic Theory* **41**, 211-215 による。

7.2 局所的安定性

次の命題の証明は、一般的な問題にも応用できるよう、前半部分は一般的な文脈で記述されている。

Proposition 4 問題 *(9)* の内点定常解 x_{ss} は局所的に漸近安定 *locally asymptotically stable* である。

Proof. (21) で定義した maximized Hamiltonian $H^*(x, \lambda) = \max_{h \geq 0} u(h) + \lambda[g(x) - h]$ をここでは活用する。

任意の正の x, λ に対して maximized Hamiltonian を実現する収穫量を $h(x, \lambda)$ とし、状態方程式に代入すると

$$\dot{x} = g(x) - h(x, \lambda)$$

が得られる。一方で、随伴方程式に代入すると、

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial\{u[h(x, \lambda)] + \lambda[g(x) - h(x, \lambda)]\}}{\partial x} + \rho\lambda$$

が得られる。以上の連立微分方程式を maximized Hamiltonian $H^*(x, \lambda)$ を用いて書きなおせば、

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H^*[x^*(t), \lambda(t)]}{\partial \lambda}, \tag{37}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*[x^*(t), \lambda(t)]}{\partial x} + \rho\lambda(t) \tag{38}$$

となる[20]。特に定常状態 (x_{ss}, λ_{ss}) では

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial \lambda} = 0,$$
$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial x} + \rho\lambda_{ss} = 0$$

が成立している。ここでは、初期条件は内点定常解の十分に近くにあると想定している。微分方程式の解は連続なので、このことはその初期条件 $x(0) = x_0$ に対応する $\lambda(0) = \lambda_0$ が、x_{ss} に対応する λ_{ss} の十分近くにあることを意味する。このことから定常解周りのテーラー近似を利用して（つまり定常解近傍ではシステムが線形近似できるとみなして）、次が得られる：

$$\begin{aligned}
\dot{x}^*(0) &= \frac{\partial H^*[x^*(0), \lambda(0)]}{\partial \lambda} - \frac{\partial H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial \lambda} \\
&\approx \frac{\partial^2 H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial x \partial \lambda}(x_0 - x_{ss}) + \frac{\partial^2 H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial \lambda^2}(\lambda_0 - \lambda_{ss}), \\
\dot{\lambda}(0) &= \left[-\frac{\partial H^*[x^*(0), \lambda(0)]}{\partial x} + \rho\lambda(0)\right] - \left[-\frac{\partial H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial x} + \rho\lambda_{ss}\right] \\
&\approx -\frac{\partial^2 H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial x^2}(x_0 - x_{ss}) + \left[-\frac{\partial^2 H^*(x_{ss}, \lambda_{ss})}{\partial \lambda \partial x} + \rho\right](\lambda_0 - \lambda_{ss}).
\end{aligned}$$

行列を使って表現すれば、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^*(0) \\ \dot{\lambda}(0) \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} H^*_{x\lambda}(x_{ss}, \lambda_{ss}) & H^*_{\lambda\lambda}(x_{ss}, \lambda_{ss}) \\ -H^*_{xx}(x_{ss}, \lambda_{ss}) & -H^*_{\lambda x}(x_{ss}, \lambda_{ss}) + \rho \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_{ss} \\ \lambda_0 - \lambda_{ss} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_0 - x_{ss} \\ \lambda_0 - \lambda_{ss} \end{pmatrix}$$

である。右辺に現れたこの 2×2 行列 J は、(x_{ss}, λ_{ss}) で評価した、システムのヤコビ行列 Jacobian と呼ばれる。J の各成分は定数であることに気付くこと。つ

[20] (37), (38) からなる連立微分方程式は（ハミルトン）正準方程式 (Hamilton's) cannonical equation と呼ばれる。

まり定常解ごく近くでのシステム (37),(38) の挙動は、時間に依存しない線形システムで近似できる。このようなシステムの挙動はよく知られている（話が長くなるので、証明は別におこなう。以下の Lemma を参照)。

ここまでは、一般的な問題についての証明だが、ここから先は問題 (9) のケースに議論を特定化する。まず、上記の Jacobian の各成分を計算する。
(1) $H^*_\lambda(\cdot)$ の x, λ での偏導関数について。$H^*(x,\lambda) = u[h(x,\lambda)] + \lambda[g(x) - h(x,\lambda)] = \max_{h\geq 0} u(h) + \lambda[g(x) - h]$ なので、(x_{ss}, λ_{ss}) の（少なくとも）ごく近くでは、$u'[h(x,\lambda)] = \lambda$ が成立する（(x_{ss}, λ_{ss}) では、$h(x_{ss}, \lambda_{ss}) = g(x^*_{ss}) > 0$ と内点解になるので、そのある近傍でも内点解が得られる)。この等式をそれぞれ x, λ で偏微分すると、$u''[h(x,\lambda)]\{\partial h(x,\lambda)/\partial x\} = 0, u''[h(x,\lambda)]\{\partial h(x,\lambda)/\partial \lambda\} = 1$、つまり、$\partial h(x,\lambda)/\partial x = 0, \partial h(x,\lambda)/\partial\lambda = 1/u''[h(x,\lambda)]$ を得る。これらの結果と、$H^*_\lambda[(x^*(t), \lambda(t)] = \dot{x}^*(t) = g[x^*(t)] - h[x^*(t), \lambda(t)]$ から、

$$\begin{aligned}
H^*_{x\lambda}[(x^*(t),\lambda(t)] &= g'[x^*(t)] - \partial h[x^*(t),\lambda(t)]/\partial x = g'[x^*(t)],\\
H^*_{\lambda\lambda}[(x^*(t),\lambda(t)] &= -\partial h[x^*(t),\lambda(t)]/\partial\lambda = -1/u''[h(x,\lambda)]
\end{aligned}$$

である。(x_{ss}, λ_{ss}) で評価すると、

$$H^*_{x\lambda}(x_{ss},\lambda_{ss}) = g'(x_{ss}), H^*_{\lambda\lambda}(x_{ss},\lambda_{ss}) = -1/u''[g(x_{ss})].$$

(2) $H^*_x(\cdot)$ の x, λ での偏導関数について。$H^*(x,\lambda) = u[h(x,\lambda)] + \lambda[g(x) - h(x,\lambda)] = \max_{h\geq 0} u(h) + \lambda[g(x) - h]$ なので、$H^*_x(x,\lambda) = \lambda g'(x)$ （包絡線定理により、$\partial h(x,\lambda)/\partial x$ に関する変化は消える）である。したがって

$$H^*_{xx}[(x^*(t),\lambda(t)] = \lambda(t) g''[x^*(t)], H^*_{\lambda x}[(x^*(t),\lambda(t)] = g'[x^*(t)].$$

(x_{ss}, λ_{ss}) で評価すると、

$$\begin{aligned}
&H^*_{xx}(x_{ss},\lambda_{ss}) = \lambda_{ss} g''(x_{ss}) = u'[g(x_{ss})]g''(x_{ss}),\\
&H^*_{\lambda x}(x_{ss},\lambda_{ss}) = g'(x_{ss}).
\end{aligned}$$

以上をまとめて、(x_{ss}, λ_{ss}) で評価した Jacobian は、

$$J = \begin{bmatrix} g'(x_{ss}) & -1/u''[g(x_{ss})] \\ -u'[g(x_{ss})]g''(x_{ss}) & -g'(x_{ss}) + \rho \end{bmatrix}$$

となる。$-g'(x_{ss}) + \rho = 0$ に注意すると、また $u' > 0, u'' < 0, g'' < 0$ に気付くと

$$|J| = -\{-1/u''[g(x_{ss})]\}\{-u'[g(x_{ss})]g''(x_{ss})\} < 0$$

を得る。ここで、$|\cdot|$ は行列式を表している。次の Lemma に示されているように、この不等式は、定常解 (x_{ss}, λ_{ss}) が（局所的に）鞍点安定であることを意味する。すなわち、定常解 (x_{ss}, λ_{ss}) に十分に近い $(x(0), \lambda(0))$ についての性質として、$x(0) = x_0$ を所与とするとき、一意の潜在価格の初期値 $\lambda(0) = \lambda_0$ が存在して、初期条件が $(x(0), \lambda(0)) = (x_0, \lambda_0)$ のときに限り、$\lim_{t\to\infty}(x^*(t), \lambda(t)) = (x_{ss}, \lambda_{ss})$ が成立する。このような潜在価格の初期値 λ_0 を選べば、横断性条件 $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t)x(t) = 0$ は明らかに満たされる。つまりそのような $x^*(t)$ は最適経路であり、定常解 x_{ss} は局所的に漸近安定であることが結論付けられる。 ■

[**Remark**] この証明で用いた方法は経済学の基本的な道具のひとつである。日本語で読める優れた解説は、バーロ・サラ - イ - マーティン／大住圭介訳 (1997) 内生的経済成長論 I, II、九州大学出版会（Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (1995) *Economic Growth*, McGraw-Hill.）の第 II 巻巻末の数学注にある。

Lemma 5 $\dot{z}(t) = Jz(t)$ で表される線形連立微分方程式を考える。ここで、$J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の各成分は実数の定数であり、初期値 $z(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{pmatrix}$ も実数とする。したがって、各時点で $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix}$ は実数値をとる。I で 2×2 単位行列を表す。また、$|\cdot|$ で行列式を表す。$|J - \mu I| = 0$ の解、つまり J の固有値を μ_1, μ_2 で表す。このとき、$\dot{z}(t) = Jz(t)$ の解経路は：*(1)* μ_1, μ_2 の実数部分がともに負のとき $(0, 0)$ に収束し、*(2)* それらがともに正のとき $(0, 0)$ から遠ざかり、そして *(3)* 一方が正で他方が負のとき、x_0 に依存してある特定の初期条件 (x_0, λ_0) のときに限り $(0, 0)$ に収束して、それ以外の初期値では収束しない。一番最後のケースを定常解 $(0, 0)$ は鞍点安定 *saddle-point stable* という。鞍点安定であるための必要十分条件は $|J| = ad - bc < 0$ である。

Proof. 最初にこの微分方程式の解が、初期条件を $z(0)$ として、次のように解けることを確認する。

$$z(t) = \left(I + Jt + \frac{J^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{J^k t^k}{k!} + \cdots \right) z(0).$$

ここで k は非負整数を代表している（$J^0 = I, t^0 = 1, 0! = 1$ と定義されることに注意）。これより $\dot{z}(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left(J + J^2 t + \cdots + \frac{J^k t^{(k-1)}}{(k-1)!} + \cdots \right) z(0) \\ &= J \left(I + Jt + \cdots + \frac{J^{(k-1)} t^{(k-1)}}{(k-1)!} + \cdots \right) z(0) = Jz(t) \end{aligned}$$

と、確かに連立微分方程式を満たす。また、このような解の存在と一意性（他に解はないこと）も示せる（J は定数行列でありしたがって、微分方程式の右辺はリプシッツ連続だから）。次にある 2×2 正則行列（正則とは逆行列が存在するという意味）M と、ある（複素数のこともある）数 μ_1, μ_2 が存在して、

$$J = M \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} M^{-1}$$

と表せることを仮定する。ここで M^{-1} は M の逆行列、つまり $MM^{-1} = M^{-1}M = I$ を満たす行列である。このような数 μ_1, μ_2 が J の固有値であることは、後に証明する。さて、そうであるとすると

$$\begin{aligned} J^k &= \underbrace{\left(M \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} M^{-1} \right) \left(M \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} M^{-1} \right) \cdots \left(M \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} M^{-1} \right)}_{(k \text{ times})} \\ &= M \begin{bmatrix} \mu_1^k & 0 \\ 0 & \mu_2^k \end{bmatrix} M^{-1} \end{aligned}$$

となるので、解経路 $z(t)$ は次のように表される：

$$z(t) = M\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{array}{ll}\mu_1^k t^k/k! & 0 \\ 0 & \mu_2^k t^k/k!\end{array}\right]\right)M^{-1} = M\left(\begin{array}{ll}e^{\mu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\mu_2 t}\end{array}\right)M^{-1}z(0).$$

（ここではマクローリン展開 $e^{\mu t} = 1 + (\mu t) + ... + (\mu t)^k/k! + ...$ を使っている。）

この式で時間 t によって変化するのは唯一、$e^{\mu t}$ の部分である。もし μ_1, μ_2 が実数ならば、定常解 $(0,0)$ の漸近安定性と不安定性に関する記述が成立することは明らかだろう。すなわち、$\mu_1, \mu_2 > 0$ ならば、$\lim_{t\to\infty} e^{\mu_j t} = \infty$ for $j = 1,2$ であり、$z(t)$ は単調に $(0,0)$ から遠ざかっていく。反対に $\mu_1, \mu_2 < 0$ ならば $\lim_{t\to\infty} e^{\mu_j t} = 0$ for $j = 1,2$ だから、$z(t)$ は単調に $(0,0)$ に近づいていく。鞍点安定のケースは固有値に関する議論のあとでするとして、μ_1, μ_2 が複素数のケースを先に論じておく。μ_1, μ_2 が固有値であるとすると、それは 2 次方程式 $|J - \mu I| = 0$ の解である。つまり、その 2 解は共役複素数であり、ある実数 ξ と ω が用いて、$\mu_1, \mu_2 = \xi \pm i\omega$ （ここで i は虚数）と表される。対応して $e^{\mu_j t}$ はオイラーの公式を使って、

$$e^{\mu_j t} = e^{(\xi \pm i\omega)t} = e^{\xi t}e^{\pm i\omega t} = e^{\xi t}(\cos\omega t \pm i\sin\omega t),\ j = 1,2$$

となる。ここで虚数が出てくるが、$z(t)$ は実数なので、計算の過程で虚数部分はキャンセルアウトされることになる。ただし、三角関数の部分は残るので、$z(t)$ は振動を繰り返す。振動を繰り返しながら、定常解 $(0,0)$ に近づくか離れるかは $e^{\xi t}$ に依存する。つまり、μ_1, μ_2 が複素数の場合も、その実部 ξ の符号によって、定常解の安定／不安定は決定されることになる。なお、この実部はふたつの μ_1, μ_2 で共通なので、鞍点安定性は、複素数のケースでは現れないことにも注意しておくこと。

次に、μ_1, μ_2 が $|J - \mu I| = 0$ の解であることを確認する。この行列式の値が 0 となる方程式は、J の特性方程式あるいは固有方程式と呼ばれる。変数の数がここでの 2 のケースに限らず、特性方程式には複素数の範囲で必ず解が存在する（代数の基本定理による）。解が重複するケース（重解）もあるが、J の成分のわずかな変化で互いに解は異なるようになる（重解が存在するのは特殊である）。このためここでは解は互いに異なることを仮定する。特性方程式の解 μ_1, μ_2 に対して、それぞれある

$$z_1 = \left(\begin{array}{c}x_1 \\ \lambda_1\end{array}\right) \neq 0,\ z_2 = \left(\begin{array}{c}x_2 \\ \lambda_2\end{array}\right) \neq 0$$

が存在して

$$Jz_1 = \mu_1 z_1,\ Jz_2 = \mu_2 z_2$$

を満たす（このようなベクトル z_1, z_2 をそれぞれ固有値 μ_1, μ_2 の固有ベクトルという）。ここで任意の $\alpha \neq 0$ に対して、$\alpha z_j,\ j = 1,2$ はこの等式を満たすことに注意する。つまり、$(0,0)$ と z_j を通る直線上のすべての点は、各 $j = 1,2$ に関して、対応する等式を満たす。また、重解の可能性を排除しているので、それらふたつの直線は一致しない。このことは、固有ベクトルを並べた 2×2 行列 (z_1, z_2) に逆行列が存在することを意味する。つまり、

$$(z_1, z_2) = \left[\begin{array}{cc}x_1 & x_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2\end{array}\right] = M$$

とおけば、M^{-1} が存在して、$MM^{-1} = M^{-1}M = I$ を満たす。以上を観察した上で、次の計算をおこなおう：

$$M \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = (z_1, z_2) \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\mu_1 & x_2\mu_2 \\ \lambda_1\mu_1 & \lambda_2\mu_2 \end{bmatrix}$$
$$= (\mu_1 z_1, \mu_2 z_2) = J(z_1, z_2) = JM$$

両辺に左から M^{-1} を乗じれば、この証明の冒頭で仮定した

$$J = M \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} M^{-1}$$

が得られる。

続けて、鞍点安定のケースを議論する。$\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$ であったとする（すでにみたようにこのケースは実数解が得られる場合に限られる）。ふたつの特別な初期条件として、固有ベクトル z_1, z_2 を与えたとき、それぞれの解経路 $z_1(t), z_2(t)$ がどのようになるかを観察する。ふたつ並べて計算する。$(z_1, z_2) = M$ に注意すると

$$(z_1(t), z_2(t)) = M \begin{pmatrix} e^{\mu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\mu_2 t} \end{pmatrix} M^{-1}(z_1, z_2)$$
$$= (z_1, z_2) \begin{pmatrix} e^{\mu_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\mu_2 t} \end{pmatrix} = (z_1 e^{\mu_1 t}, z_2 e^{\mu_2 t})$$

を得る。したがって、z_1 を初期条件とすれば、解経路は無限大[21]に発散し、z_2 を初期条件に与えれば解経路は $(0, 0)$ に収束する。任意の初期条件 $z(0)$ に対して、ある実数 α, β が存在して、$z(0) = \alpha z_1 + \beta z_2$ と表すことができるから、その解経路は $z(t) = \alpha z_1 e^{\mu_1 t} + \beta z_2 e^{\mu_2 t}$ で表される。したがって、解経路が収束するのは、$\alpha = 0$ のとき、そしてそのときに限られる。もし初期条件のうち x_0 が固定されているならば、解経路が収束するのは、$\lambda_0 = (\lambda_1/x_1)x_0$ のとき、そしてそのときに限られる。

証明の最後に、定常解が鞍点安定であるための必要十分条件を示す。特性方程式 $|J - \mu I| = 0$ を具体的に書けば、

$$\begin{vmatrix} a - \mu & b \\ c & d - \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a - \mu)(d - \mu) - bc = 0$$
$$\Leftrightarrow \mu^2 - (a + d)\mu + ad - bc = 0.$$

解と係数の関係によって、$\mu_1\mu_2 = ad - bc = |J|$。したがって、鞍点安定であるための必要十分条件は、$\mu_1\mu_2 = |J| < 0$。■

[Remark] こうした微分方程式で記述されるシステムの挙動について、私が愛用しているテキストは、ルーエンバーガー／山田武夫・生天目章訳 (1985) 動的システム入門 HBJ 出版局 （Luenberger, D. G. (1979) *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, John Wiley & Sons.）です。なお、解の一意性や存在証明については（常）微分方程式のテキストで補うとよい。

[21] プラスかマイナスかは z_1 の各成分に依存する。