

森林資源経済学

7 . 共有地の悲劇：微分ゲーム入門

赤尾 健一

<http://www.f.waseda.jp/akao/forest/index.html>

1 はじめに

ここでは所有権が明確でない天然資源の利用パターンについて研究する。以前のマクロ経済モデルでは、森林資源には明確な所有権があり、それを利用できるのは、その所有者のみと想定していた。しかし、現実の世界では、制度的あるいは物理的な理由によって、特定の経済主体が排他的に資源を利用できない場合も珍しくない。このような“共有資源”は、森林資源に限らない。湖沼、油田や地下滞水層、漁業資源ストック、温室効果ガスをはじめとするガス状廃棄物の捨て場としての地球大気、同じく液状廃棄物の捨て場としての海、河川、湖沼などは、共有資源の代表例である。

こうした共有資源を、経済学では、common property resource、common pool resource、open access resource などと呼んでいる。このうち前2者は同じ意味で用いられ、それは利用できる経済主体が固定されている状況を意味する。つまり、一定のメンバーのみが資源を自由に使える状況である。それに対して open access resource の場合、不特定多数の利用者がいて、その資源から正の利潤が得られる限り、利用者が参入し続ける状況を意味する。経済理論上、open access resource では、各時点で利潤がゼロになる状態が均衡となる。このように、open access resource の利用パターンは、理論的には単純である。一方、common property resource の利用パターンは、非常に複雑かつ多様である。この授業では、common property resource の利用パターンについて、解説する。

はじめに、その利用パターンに関する非常に有名な一文 - 共有地の悲劇 - を紹介する。次に、その状況がどのように定式化できるかを示す。それが表題の微分ゲームである。続いて、微分ゲームの均衡解（資源利用パターン）を見つける方法として、ハミルトン・ジャコビ・ベルマン方程式（Hamilton-Jacobi-Bellman equation）について紹介する。最後に、今日知られている均衡解について紹介し、その含意を論じる。

2 共有地の悲劇

“共有地の悲劇”とは、生態学者 Garrett Hardin が、1960 年代に Science 誌に発表した論文のタイトルである。それは、地球上に存在する数多くの重要な「共有地」に対して、われわれがその利用をいかに誤りうるかを指摘し、われわれが取り返しのつかない事態を引き起こす可能性があることを警告するものである。

全ての人に開放された牧草地を考えよう。放牧者はみな、この共有地で可能な限り多くの牛を飼いたいと考えるだろう。放牧者が合理的ならば、自らの利得を最大化しようとする。明示的であれ、暗黙のうちであれ、多かれ少なかれ意識的に彼はこう考える。「もう1頭、牛を増やしたら私の効用はどうか？」効用のさまざまな構成要素を総合して、彼は次の結論を得る。自分が従うべき賢明な方法は、もう1頭牛を増やすことだ。このようにして、牛はもう1頭追加され、さらにもう1頭追加される…。しかし、この結論は、共有地を共有する合理的な飼い主全員がそれぞれ到達するものである。ここに悲劇がある。人々をして際限なく、牛の数を増加させるシステムに、人々は、はまり込んでしまう。自由の存在を信じる社会では、人々は自らの最大の利益を求めて、荒廃への道を全員で突き進む。共有地における自由は全ての人に荒廃をもたらす。(Garrett Hardin, The tragedy of the commons. Science 162, 1968, p.1244)

この一文に対して、ケンブリッジ大学の経済学者 Partha Dasgupta は、かつて、「同じ長さの文章で、これほど有名で、かつ誤りの多い一文を見つけることは難しいだろう。」と述べている (Partha Dasgupta, The Control of Resources. Harvard University Press, 1982, p.13)。Dasgupta の指摘は、共有地を open access resource と見なすとき、牛飼養のコスト(限界費用)が十分に高いならば、牛飼養の限界利潤がゼロとなる均衡飼養頭数は、共有地を荒廃させる水準よりも少なくなりうるというものである。Dasgupta は確かに正しいが、「同じ長さの文章で、これほど有名で、かつ誤りの多い…」と大見得を切るには、その指摘は当たり前過ぎる。しかし、今日では、牛飼養コストが仮にゼロであっても、common property resource の意味での共有地では、Hardin の憂鬱な予言以外にも、さまざまな可能性が生じることが知られている。しかも、それは、社会慣習や社会関係資本といった資源利用者間の複雑な社会構造を想定することなしに、極めて単純な構造で生じるのである。その構造が、次に示す微分ゲームである。

3 微分ゲーム

3.1 ゲームとナッシュ均衡

ゲームとは、これまでに学んだマクロ経済モデル（競争均衡モデル）との対比でいえば、個々の経済主体の行動が直接他の経済主体の利得（効用や利潤）に影響を与えるモデルを指す。競争経済モデルでは、経済主体の行動は社会全体で集計されて、競争市場で形成される価格を通じて、他の経済主体の利得に影響を与えると想定されていたことを思い出そう。経済主体間の相互依存関係は、競争経済ではこのように競争市場を介した間接的なものとなり、各経済主体は、市場価格に対して反応する。一方、ゲームの場合には、その相互依存関係はより直接的であり、このため、ゲームにおける経済主体（以下、プレイヤー）は、他のプレイヤーがどのように行動するかを考えて、すなわち他のプレイヤーの戦略に依存して、自らの最適な戦略を選択することになる。

ゲームのうち、微分ゲームとは、時間を明示的に含むゲームである。それは、プレイヤーの行動に応じて、時間とともに変化する変数（状態変数）を含むという点で、繰り返しゲームと区別される。一方、プレイヤーの数や戦略の分布が、時間を通じて一定である点で、また、プレイヤーは注意深い推論の結果、最適な戦略を確実に選ぶと想定されている点で、動学的な進化ゲームと区別される。

ゲームのデータは、プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $2 \leq n < \infty$ 、各プレイヤー $i \in N$ のとりうる戦略の集合（戦略空間） Σ_i 、各プレイヤーの利得を表す関数 J_i 、状態変数（資本、天然資源や環境資産）の実現可能な値の集合（状態空間） X 、その初期値 x_0 、そしてその発展を表す方程式 F である。具体的には、次のような最適制御問題が、経済学で用いられる典型的な微分ゲームである：

各プレイヤー $i \in N$ について

$$\max_{c(t)} J_i, \quad J_i = \int_0^{\infty} u_i(c(t), x(t)) e^{-\rho_i t} dt \quad (1)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = F(x(t), \{\sigma_j\}_{j \in N \setminus \{i\}}, c(t)), \quad c(t) \in U_i, x(t) \in X, \quad (2)$$
$$x(0) = x_0 \text{ given,}$$

ただし U_i は Σ_i その他の条件によって与えられる制御の許容集合。

この問題の解 $c_i^*(t)$ を生み出すような戦略 $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ が、戦略プロファイル $\{\sigma_j\}_{j \in N}$ に対する第 i プレイヤーの最適反応であり、戦略プロファイル $\{\sigma_i^*\}_{i \in N}$ が、各プレイヤーの最適反応で構成されているならば、それがナッシュ均衡である。

ナッシュ均衡は、注意深い推論の結果、ゲームのプレイヤーが選ぶ戦略の組合せである。それは互いに他のプレイヤーの戦略に対する最適反応となる

戦略となっている。ゲーム論では、あるゲームが与えられたとき、そのナッシュ均衡をゲームから生まれる結果であると考ええる。

3.2 戦略空間

プレイヤー i の戦略 $\sigma_i(\cdot)$ とは、何かの関数であり、その関数の各時点での値 $c_i(t) = \sigma_i(\cdot)$ がプレイヤーの行動を表す。戦略空間とは、関数空間の一種と考えればよい。ただし、その第一の関心は、戦略 = 関数がどのような変数をとるかにある。

経済学で最もなじみがあるのは、変数に状態変数の値をとること、つまり、 $\sigma_i(x)$ と表される場合である。この場合、プレイヤーの行動は、時間とは独立で状態変数の値に応じて決まる。このような戦略は定常マルコフ戦略と呼ばれる¹。次になじみのある戦略空間は、戦略が時点 t の関数となる場合 ($\sigma_i(t)$) で、これはオープン・ループ戦略と呼ばれる。この用語は不確実性下での最適制御理論に由来する。将来何が起きようと各時点での行動を予め決めてしまうような制御の仕方をオープン・ループ制御と呼ぶ。一方、各時点での状況に応じて行動が条件付きで与えられる制御の仕方は、クローズド・ループ制御とかフィードバック制御と呼ばれる。定常マルコフ戦略は、クローズド・ループ/フィードバック戦略の一種である。

以上の二つの戦略空間を一般化して、状態変数の値と時点の両者に依存する戦略 ($\sigma_i(x, t)$) を考えることもできる。これもマルコフ戦略と呼ばれる。というのは、時間も状態方程式 $\dot{x} = 1$ で与えられる状態変数と解釈できるからである。このマルコフ戦略の観点からすると、オープン・ループ戦略は x が落ちたマルコフ戦略と考えられる。

さらに戦略が、初期値 $(x_0, t_0) = (x_0, 0)$ にもまた、依存する場合が考えられる。つまり戦略が、 $\sigma_i(x, t; x_0, t_0)$ と表される場合である。このような戦略空間は、サブゲーム完全な戦略、つまり、いかなる時点、いかなる状態でも (他のプレイヤーの戦略が不変である限り) 見直しの必要がないような戦略を選ぶうえで妥当なものである。ただし、ここまで複雑な戦略空間は、一般には用いない。経済動学モデルが、一般に、時間に依存しない自律的な連立微分/差分方程式に帰着することを思い出そう。このようなモデルの場合、各プレイヤーの戦略空間が定常マルコフ $\sigma_i(x)$ であれば、その均衡戦略はサブゲーム完全になる。このことが経済学において、定常マルコフ戦略が好まれてきた主要な理由である。そのナッシュ均衡は、サブゲーム完全であることを強調して、マルコフ完全ナッシュ均衡と呼ばれることがある。

これに対して、オープン・ループ戦略の場合、均衡経路から外れてしまうと、元の均衡戦略は望ましいものではなくなる²。つまり、サブゲーム完全性

¹しばしば「定常」を省略する。

²この性質を「弱い時間整合性」と呼ぶことがある。対応する「強い時間整合性」とはサブゲーム完全性のことである。

を満たさない。したがって戦略空間にオープン・ループを採用するには、プレイヤーは初期時点で決めた計画を決して変えない（完全なコミットメント）か、あるいは変えることができないと仮定しなければいけない。多くの場合、そうした仮定は現実妥当性に欠けるために、最近の経済学ではオープン・ループ戦略は不人気である。

3.3 定常マルコフ戦略の例

代表的なマルコフ戦略は、線形戦略

$$\sigma(x) = ax, a > 0 \quad (3)$$

と最速枯渇戦略

$$\sigma(x) = \begin{cases} k & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}, k > 0 \quad (4)$$

である。ただし、 k は各プレイヤーの最大可能資源収穫量を示し、上の最適制御問題は修正されて、制約条件 $c(t) \leq k$ が追加される。

最速枯渇戦略の名前の由来は、もし、 $\sup\{f(x)|x \geq 0\} - nk < 0$ ならば、初期条件 x_0 の状態によらず、資源は有限時間のうちに最速スピードで枯渇することによる。もし、最速枯渇戦略がマルコフ完全ナッシュ均衡を構成するならば、それは Hardin の共有地の悲劇に対応する状況である。

線形戦略は、特殊な関数型のモデル（消費の限界効用の弾力性が一定の効用関数と線形生産関数の組合せ）で、マルコフ完全ナッシュ均衡を構成する。

4 資源ゲームモデル

ここでは、次のような資源ゲームモデルを研究する。プレイヤーの選好、技術は同一であると仮定し、プレイヤーの均衡戦略も同じ場合（対称均衡）に考察を限定する。ゲームでの任意のプレイヤー $i \in N$ の問題が次の最適制御問題で表されるとする：

$$\begin{aligned} & \max_{c(t) \geq 0} \int_0^{\infty} u[c(t)] e^{-\rho t} dt \quad (5) \\ & \text{subject to } \dot{x}(t) = f(x(t)) - (n-1)\sigma^*(x(t)) - c(t) \\ & c(t) \leq k, x(t) \geq 0, x(0) = x_0 > 0 \text{ given,} \end{aligned}$$

ここで瞬間的効用関数 $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ と天然資源の成長関数 $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ は、経済学の標準的な仮定を満たすとす。特に $f(0) = 0$ である。任意の初期条件 x_0 について、その最適解が $\sigma^*(x)$ で生成できるならば、戦略プロファイル $\sigma_i(x) = \sigma^*(x), \forall i \in N$ は、対称マルコフ完全ナッシュ均衡を構成する。これは考えられる限り最も単純な微分ゲームのモデルといえるが、それでも興味深い内容を持ち、さまざまな未説明の問題が残されている。

5 ハミルトン・ジャコビ・ベルマン方程式

最適制御問題を解く方法として、変分法、ポントリヤギンの最大値原理、ハミルトン・ジャコビ・ベルマン方程式（以下、HJB 方程式）などがある³。前2者が、時間の関数として最適解の条件を求めるのに対して、HJB 方程式は時間と状態変数の関数として最適解の条件を求める。したがって、マルコフ完全ナッシュ均衡戦略を得るには、HJB 方程式に基づくのが自然なアプローチである。また、均衡戦略を見つけるには、それぞれの方法を十分条件として利用することになる。最大値原理の場合、Mangasarian 条件（ハミルトニアンが制御と状態変数に関して結合的に凹関数である）を使うにしろ、Arrow の十分条件（最大化ハミルトニアンが状態変数に関して凹関数である）を使うにしろ、その条件を満たすために戦略空間は著しく制限されてしまう。一方、HJB 方程式の場合、以下に示すように凹性は必ずしも必要ではない（詳しくは、Dockner et al., 2000, Lemma 3.1 を参照）。

さて、任意の正の初期値 $x_0 > 0$ について、上の問題 (5) の解が存在して、その最大値を表す評価関数 $V: \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ がうまく定義できると仮定する。さらに微分可能性その他、分析に都合のよいことを仮定する。このとき、次の関係式が成立する。

$$\rho V(x) = u(\sigma^*(x)) + V'(x)(f(x) - n\sigma^*(x)) \quad (6)$$

$$= \max_{c \geq 0} u(c) + V'(x)(f(x) - (n-1)\sigma^*(x) - c) \quad (7)$$

これが HJB 方程式である。

以上の説明は必要条件としての HJB 方程式だが、反対に (6), (7) を満たす関数 $V(x)$ が見つかれば、かつこの $V(x)$ が下に有界

$$\exists M > -\infty, V(x) \geq M \text{ all } x \geq 0 \quad (8)$$

ならば、 $\sigma^*(x)$ は対称マルコフ完全ナッシュ均衡を構成するといえる。したがって、マルコフ完全ナッシュ均衡を得るには、(6), (7) を満たす関数のペア $(\sigma^*(x), V(x))$ を見つければよい。これは、 $\sigma^*(x)$ または $V(x)$ に関する微分方程式を解く問題に帰着する。ただし、そのテクニックはやや専門的なので、省略することにする。

ここでは、(8) の条件の下で、(6), (7) を満たす $\sigma^*(x)$ は問題 (5) の解になること（十分条件としての HJB 方程式）を示す。実行可能な消費パターンを自由に選びそれを $c^*(t)$ と表す。また、その消費経路で実現する資源経路を $x^*(t)$ とする。このとき、各 $t \geq 0$ で

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t)) - (n-1)\sigma^*(x^*(t)) - c^*(t)$$

³経済学向けに書かれたこの分野のテキストは数多く存在するが、なかでも Dockner et al. (2000, Chapter 3) は、微分ゲームに有用な内容がコンパクトに解説されている。

が成立している。(6), (7) より、各 $t \geq 0$ で

$$\rho V(x^*(t)) - V'(x^*(t))\dot{x}^*(t) \geq u[c^*(t)]$$

が成立している。両辺に $e^{-\rho t}$ を乗じて左辺を次のように変形する：

$$-\frac{dV(x^*(t))e^{-\rho t}}{dt} \geq u[c^*(t)]e^{-\rho t}.$$

上の不等式は $c^*(t) = \sigma^*(x^*(t))$ のとき、等号で成立することに注意する。この式の両辺をひっくり返してから、両辺に積分をとる：

$$\begin{aligned} \int_0^T u[c^*(t)]e^{-\rho t} dt &\leq -\int_0^T \frac{dV(x^*(t))e^{-\rho t}}{dt} dt \\ &= V(x^*(0)) - V(x^*(T))e^{-\rho T} \\ &\leq V(x^*(0)) - Me^{-\rho T}. \end{aligned}$$

$T \rightarrow \infty$ で

$$\int_0^\infty u[c^*(t)]e^{-\rho t} dt \leq V(x^*(0)).$$

再び、不等式は $c^*(t) = \sigma^*(x^*(t))$ のとき等号で成立することに注意すれば、この不等式によって、問題 (5) の最適解が $c^*(t) = \sigma^*(x^*(t))$ で与えられることがわかる。

6 多均衡

ゲームではよくあることだが、ナッシュ均衡はただ一つとは限らない。実際、問題 (5) のマルコフ完全ナッシュ均衡 $\sigma^*(x)$ が唯一つに決まらず、数え切れないほど無数に（連続体の濃度で）存在することが知られている。次の結果は、Sorger (1998) による。その結果を述べる準備として、問題 (5) に対応する協力問題（マクロ経済モデルでも扱った社会計画者の問題）を示す。

$$\begin{aligned} &\max_{c(t) \geq 0} \int_0^\infty u[c(t)]e^{-\rho t} dt && (9) \\ &\text{subject to } \dot{x}(t) = f(x(t)) - nc(t) \\ & && c(t) \leq k, x(t) \geq 0, x(0) = x_0 > 0 \text{ given.} \end{aligned}$$

この問題は、全員の効用を最大にするような資源利用を求めるものであり、その最適経路は

$$f'(x) = \rho$$

をみたす資源ストック水準 $x = x_\rho$ に収束する（このことはマクロ経済モデルでも見た）。

さて、Sorger (1998) は次のことを証明した。 (α_0, α_1) は开区間とする。一人のプレイヤーの努力では資源枯渇を防ぐことができないこと ($\sup\{f(x)|x \geq 0\} < (n-1)k$) を含む、ある緩やかな条件⁴の下で、任意のパラメータ値 $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ に対応する対称マルコフ完全ナッシュ均衡戦略

$$\sigma^*(x) = \begin{cases} \phi(x; \alpha) & \text{if } x \in [0, x_\rho] \\ k & \text{if } x > x_\rho \end{cases} \quad (10)$$

が存在する。ただし、 $\phi(\cdot; \alpha) : [0, x_\rho] \rightarrow [0, x_\rho]$ は連続微分可能な関数で、

- (a) $\phi(0; \alpha) = 0$;
- (b) $\exists x_\alpha \in (0, x_\rho), \phi(x, \alpha) \leq f(x)/n$ if $0 < x \leq x_\alpha$;
- (c) $\partial\phi/\partial\alpha < 0$ and $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \phi(x_\rho, \alpha) = f(x_\rho)/n$,

を満たす。ここで (b) の性質は、各均衡が大域的に漸近安定な正の (ただし効率的水準よりは小さな水準の) 定常状態をもつことを意味している。また、(c) の意味は、パラメータ値が十分 α_0 に近い均衡解を選べば、その均衡解は効率的定常状態の近くに十分に長い時間 (ただし有限時間) とどまるということである。このことはさらに、仮に初期資源状態が効率的定常状態の十分近くにあるならば、そのような均衡解から得られる生涯効用は、協力解で得られる生涯効用とほとんど同じになることも意味している。図 8-1 は、この Sorger 均衡戦略を示している。

戦略 (10) は、資源枯渇を引き起こさないという意味で「持続可能な」戦略である。Sorger (1998) はまた、非持続的な戦略である最速枯渇戦略 (4) がマルコフ完全ナッシュ均衡を構成するための必要十分条件も導出している。その条件は、戦略 (10) がマルコフ完全ナッシュ均衡を構成するための条件と両立する。

Akao and Farzin (2007) は、CIES 効用関数とロジスティック成長関数をもちいたパラメトリック・モデルで、この 2 つの戦略が均衡戦略として十分に広いパラメータ値の範囲で共存することを確認している。図 8-2 を参照。

7 Tragedy of commons?

以上の Sorger (1998) の研究は、共有資源の利用問題に関して、広く深い含意をもっている。

Hardin は、「自由の存在を信じる社会では、人々は自らの最大の利益を求めて、荒廃への道を全員で突き進む。共有地における自由は全ての人に荒廃をもたらす。」と書いたが、これは共有地の不可避の運命ではない。

⁴制約的な仮定を挙げるとすれば、限界効用の弾力性が $-cu''/u \leq (n-1)/n$ を満たすことである。それによって、対数関数など下に有界でない効用関数は排除される。なお、最速枯渇戦略がナッシュ均衡を構成するためには、効用関数は下に有界でなければならないことに注意。

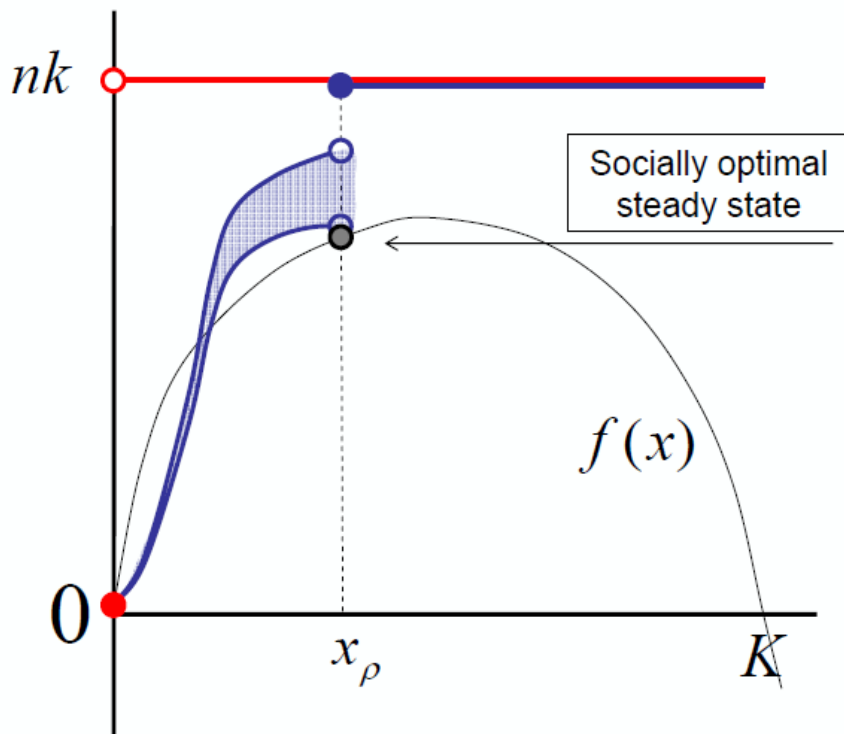


図8-1 持続的均衡戦略の連続体と最速枯渇戦略

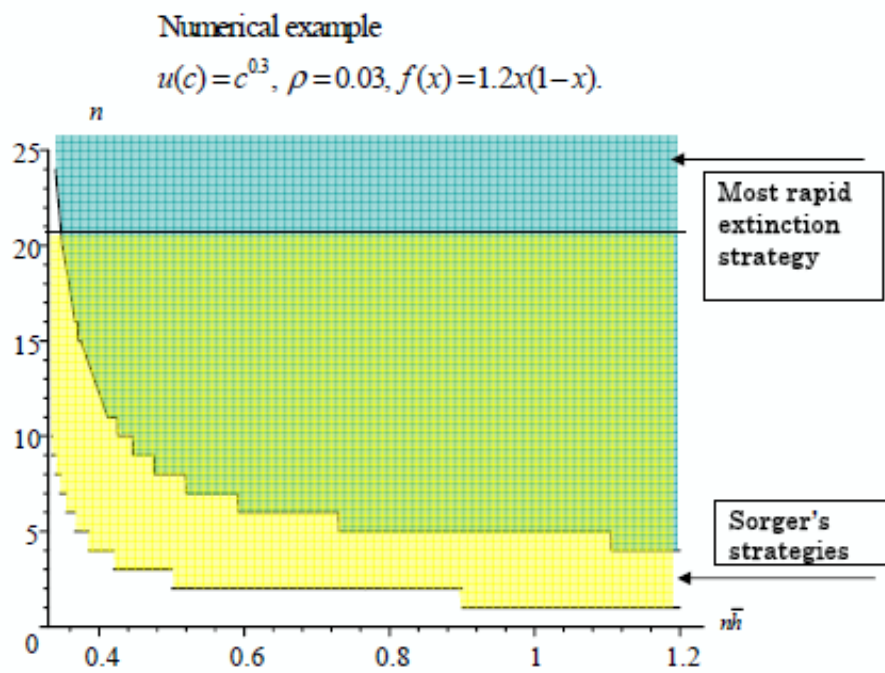


図8-2 均衡戦略の共存

すなわち、自由な社会における共有地は、持続的にも非持続的にも利用される可能性がある。さらに、共有地の非協力的利用から、人々がほぼ協力解と同じ生涯利得を得る可能性もある。

上でみたいずれの均衡もサブゲーム完全、かつ強 (strict) ナッシュ均衡である。このため、どの均衡が選ばれるかを説得的に予測することは難しい。このことを具体的な共有地の利用問題に翻訳すると、次のような可能性が示唆される：

- (a) 全く同じ条件の2つの共同体が、一方は持続的な資源利用を行い、もう一方は破滅的な資源利用を行うことがありうる。このため、「よいコモンズ」と「ダメな共有地」を区別するものを探しても、何も出てこないかもしれない。
- (b) ある共同体が、外生的条件の変化なしに、突然それまでの持続的資源利用をやめて荒廃への道を突き進むこともありうる。したがって、これまで賢明な資源利用が行われてきたことを理由に、共有地をそのままの状態においておくという政策は危険かもしれない。

多均衡の問題から離れても、Sorger が導出したマルコフ完全ナッシュ均衡 (10) は、面白い解釈を許す。すなわち、その均衡経路は、非常に長い時間、協力解の定常状態の近くにとどまるが、やがてはそこを離れ、より劣った水準 (より小さな x) の定常状態に移行する。資源ゲームで表現できるような単純な経済があって、何百年も賢明な資源利用を続けているとしよう。しかし、その賢明な資源利用は、永遠には続かないように運命付けられているかもしれない。特に社会経済の構造に何ら変化がなくても、かつての古代文明のように、やがては天然資源の誤った利用によって滅んでゆくかもしれない。Hardin の荒廃の予想は、超長期的には実現するかもしれないのである。

参考文献

- [1] Akao, K. and Y.H. Farzin (2007) “When is it optimal to exhaust a resource in a finite time?” *Ecological Research* **22**, 422–430.
- [2] Dasgupta, P. (1982) *The Control of Resources*. Harvard University Press.
- [3] Dockner, E. J., Jørgensen, S., Long, N. V. and Sorger, G. (2000) *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press.
- [4] Hardin, G. (1968) “The tragedy of the commons,” *Science* **162**, 1243–1248.
- [5] Sorger, G. (1998) “Markov-perfect Nash equilibria in a class of resources games,” *Economic Theory* **11**, 78–100.