パターンとはなにか

―ある非記号計算の理論について―

石川　博

名古屋市立大学
大学院システム自然科学研究科

例:２値ノイズ除去

元画像

ノイズ入り画像 Y_v

ノイズ除去後 X_v

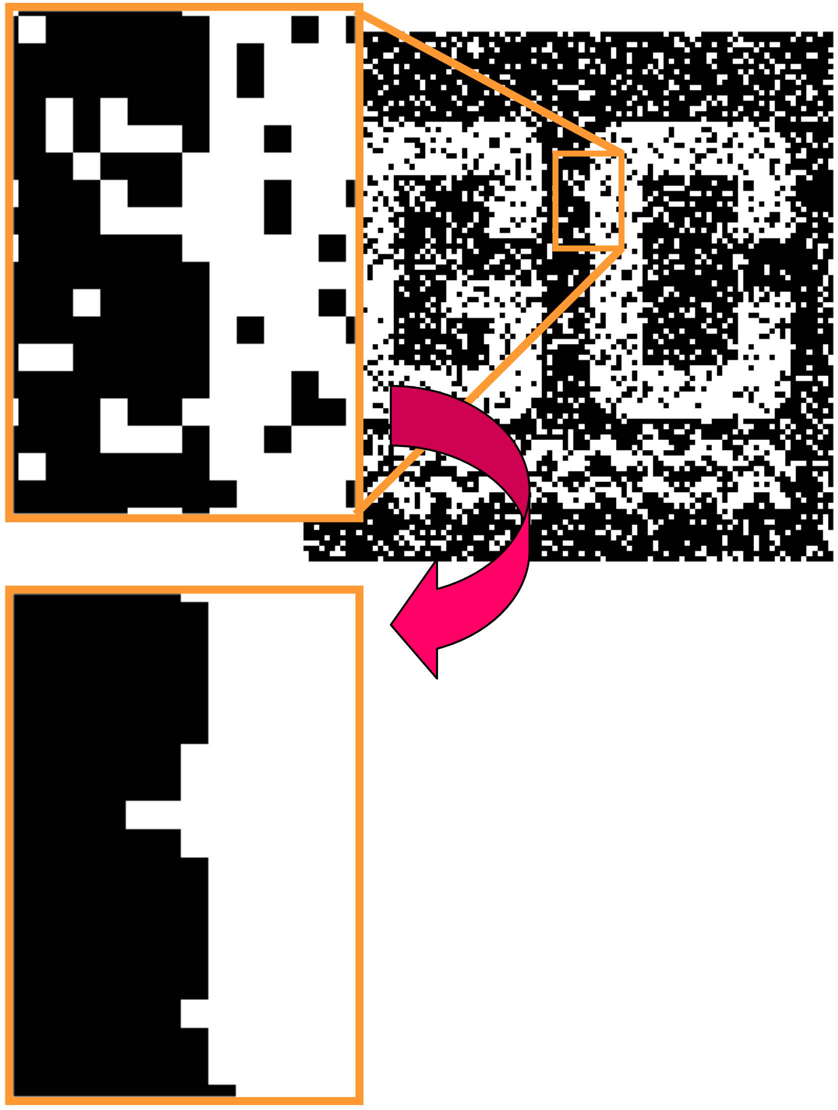
Greig, Porteous and Seheult '89

$$E(X) = \sum_{v \in V} \lambda \,|\, Y_v - X_v \,| + \sum_{(u,v) \in E} |\, X_u - X_v \,|$$

- グラフカットで大域的最適解を得ることができる.
- しかし言葉の割にはまだまだという感あり.

パターン

- 境界の滑らかさ

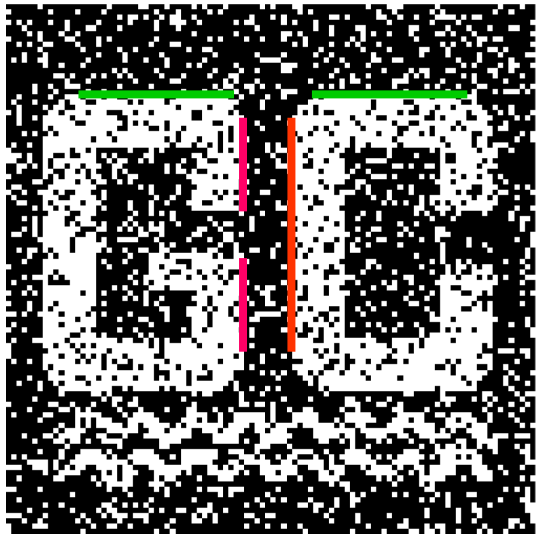


パターン

- 境界の滑らかさ
- 直線性

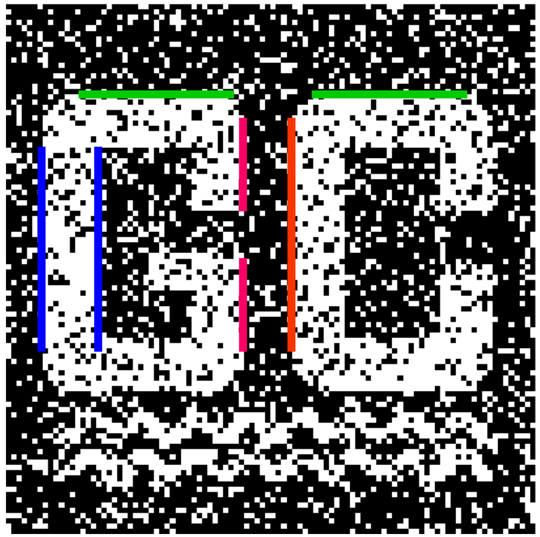
パターン

- 境界の滑らかさ
- 直線性
- 同一直線上にあること



パターン

- 境界の滑らかさ
- 直線性
- 同一直線上にあること
- 平行な直線



パターン

- 境界の滑らかさ
- 直線性
- 同一直線上にあること
- 平行な直線
- より大きな構造

パターン

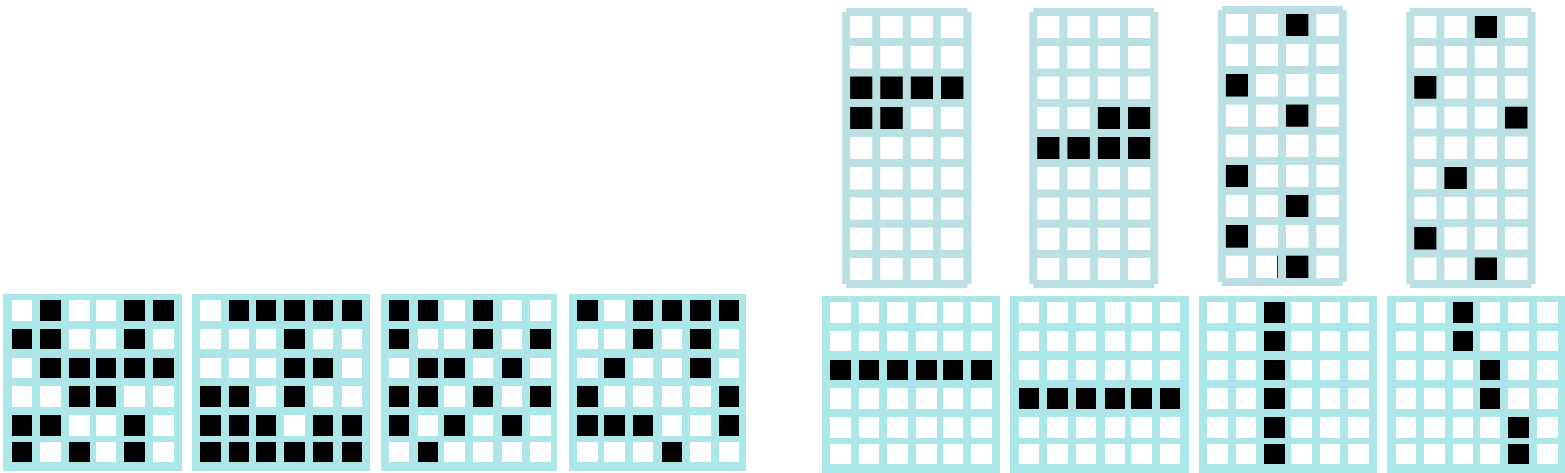
- 境界の滑らかさ
- 直線性
- 同一直線上にあること
- 平行な直線
- より大きな構造
- 繰り返し

パターン

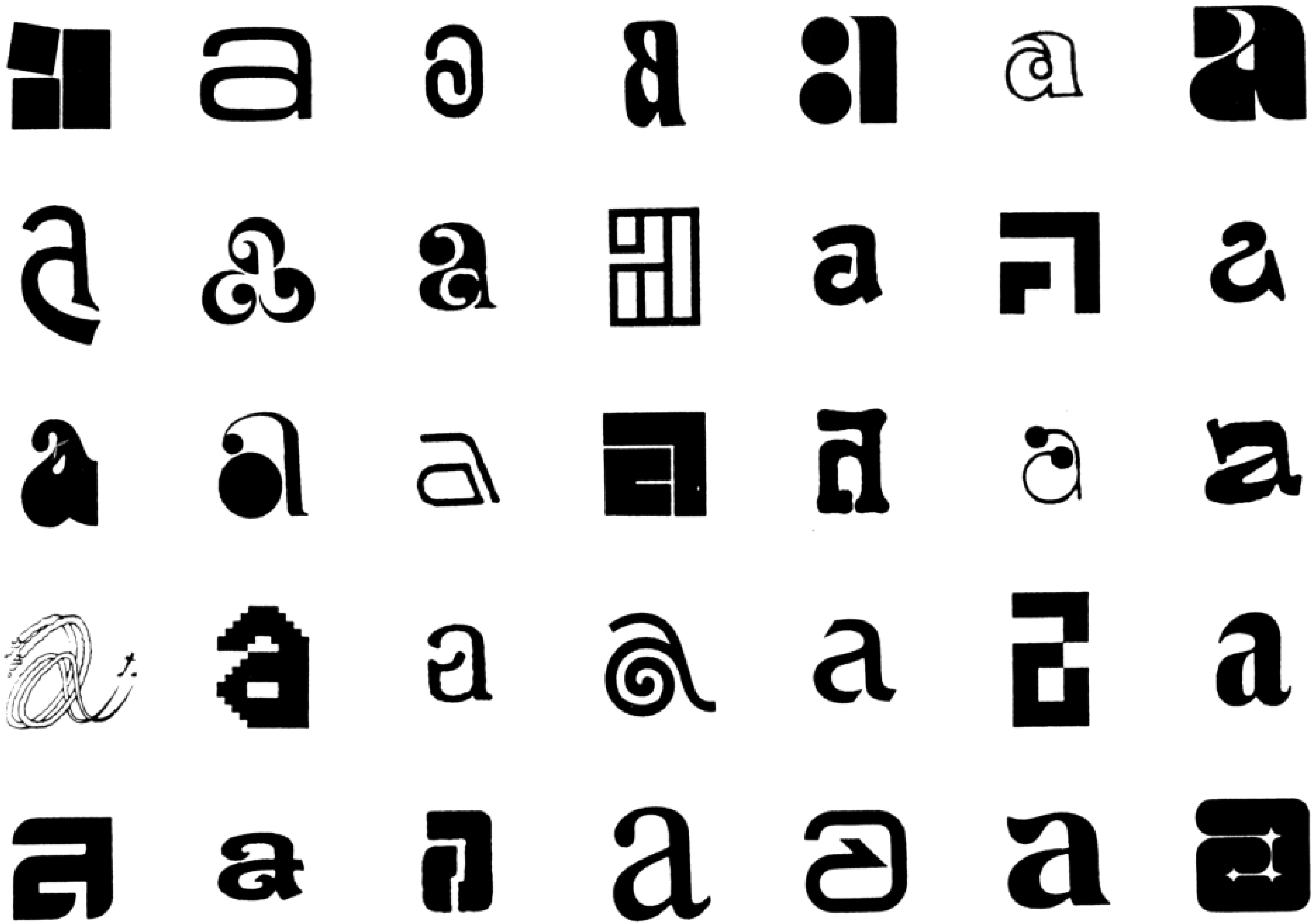
- 境界の滑らかさ
- 直線性
- 同一直線上にあること
- 平行な直線
- より大きな構造
- 繰り返し
- より高次の知識

この問題を一般に定式化できるか？

- 同じようなことを機械にやらせたい
- 問題を一般かつ形式的に定義できるか？
- 「パターン」というのはどこに住んでいるのか？
  - すぐに組み合わせ爆発が起こる
  - よりシンプルなものがパターンとして重要になる
  - 「シンプルさ」は構造に関係して定義される



パターンとは何か



これらに共通するパターンは何か

「パターン」の辞書的定義

パターン［pattern］

- 原型として使われる型。模型。類型。例：「行動のパターン」
- 一貫した、あるいは特徴的な配置を形成する性質、行動、傾向などの組み合わせ。
- 知覚構造。例文：「視覚パターンは物体だけでなくそれらの間の空間も含まなくてはならない」

形式的・数学的な定義は？

パターンとは何か

記号列の場合

これらの記号列には「パターンがある」

0101010101010101010101010101010101...

0101101110111101111101111110111111...

1100100100001111110110101010001000...

パターンは計算

記号列の場合

見かけの複雑さ（長さ）に比べて少ない情報量を持つ記号列はパターンを持つと考えられる。

0101010101010101010101010101010101...
0101101110111101111101111110111111...
1100100100001111110110101010001000...

つまり、その記号列を書き出す、より短いプログラムが存在する場合にパターンを持つといえる。

パターンは計算

記号列の場合

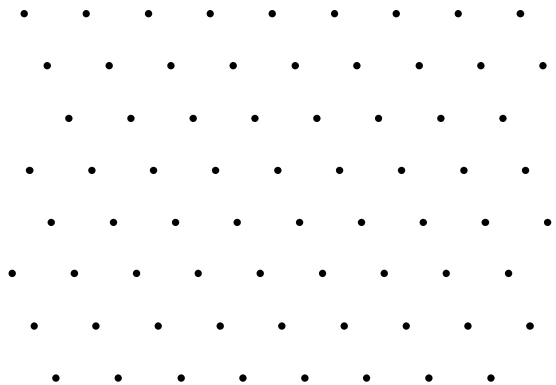
形式的には、これはコルモゴロフ複雑性が長さに比べて低い記号列はパターンを持つと定義できる。

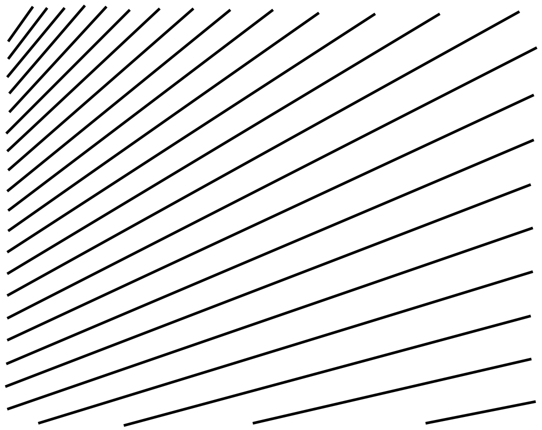
例：これらの記号列はその長さに関係なく一定のコルモゴロフ複雑性を持つ。（無限に書き出し続ける有限のプログラムが存在する。）

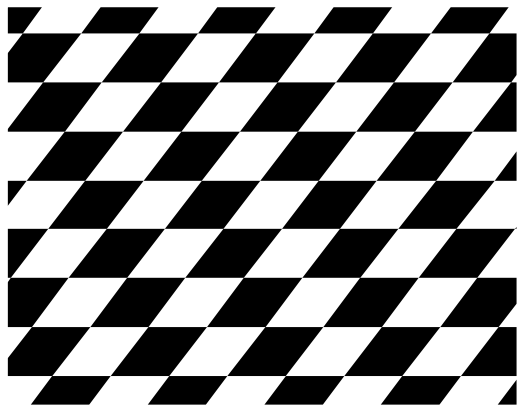
0101010101010101010101010101010101…
0101101110111101111101111110111111…
1100100100001111110110101010001000…

記号列以外の場合

これらの「パターン」の存在をどのように定義したらよいだろうか。







コルモゴロフ複雑性のような何らかの情報計量を定義

記号の世界とその他の世界

- 計算は記号の世界(＝ビット列の世界)でしか定義されていない
- Computer Scienceのテーゼ：情報は符号化できる
- その他の世界のことについて計算のようなことをするときには、まずその世界を符号化(encode)する
- 例:実数→２進展開

一般の世界

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "\text{encode}"'] & B \arrow[loop below, "\text{計算}"] \end{tikzcd}$$

記号の世界

記号の世界とその他の世界

一般の対象の情報計量を定義するには

- 符号化を固定する
- 下のように一般の対象のコルモゴロフ複雑性を記号列のそれ(K)を使って定義する

一般の世界

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\text{encode}]{f} & B & \xrightarrow{K} & \mathbb{N} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & & f(x) & & K(f(x)) \end{array}$$

例：ユークリッド平面上の図形

- ユークリッド平面上の任意の図形(部分集合)を符号化できるか
  - 点 → 2実数 → 2進展開を交互に

$$(0.x_0x_1x_2x_3\ldots,\ 0.y_0y_1y_2y_3\ldots) \to x_0y_0x_1y_1x_2y_2x_3y_3\ldots.$$

  - 有限個の点 → 点の符号化をローテーション

$$a \to a_0a_1a_2a_3\ldots,\quad b \to b_0b_1b_2b_3\ldots,\quad c \to c_0c_1c_2c_3\ldots,$$
$$\{a,b,c\} \to a_0b_0c_0a_1b_1c_1a_2b_2c_2a_3b_3c_3\ldots$$

  - 可算個の点 → だんだん多くの点をローテーションに入れていく

$$\{a,b,c,d,\ldots\} \to a_0a_1b_0a_2b_1c_0a_3b_2c_1d_0\ldots$$

  - 非可算個の点 → 符号化できない
  - 任意の部分集合を符号化するのは不可能

例：ユークリッド平面上の図形

解決策

可算個の点の集合だけを考える

- (その**1**) 座標が有理数の点だけを考えれば、どんな部分集合も可算個の点しか含まない

しかし

- 座標が有理数の点をほとんど持たない部分集合がいろいろある

  （例：原点を通り傾きが無理数の直線）

- 最初から近似でなく、まず近似対象を定義したい

例：ユークリッド平面上の図形

解決策

<u>可算個の点の集合だけを考える</u>

- (その**2**) 任意の可算部分集合だけを考える

しかし

- １点の座標だけでも任意な大きさのコルモゴロフ複雑性を持ちうる
- １点の集合でも、それがどの点かによって複雑性が変わる

例：ユークリッド平面上の図形

解決策

特殊な図形それぞれの符号化を定義する

例：直線→２点を指定　円→中心と半径....

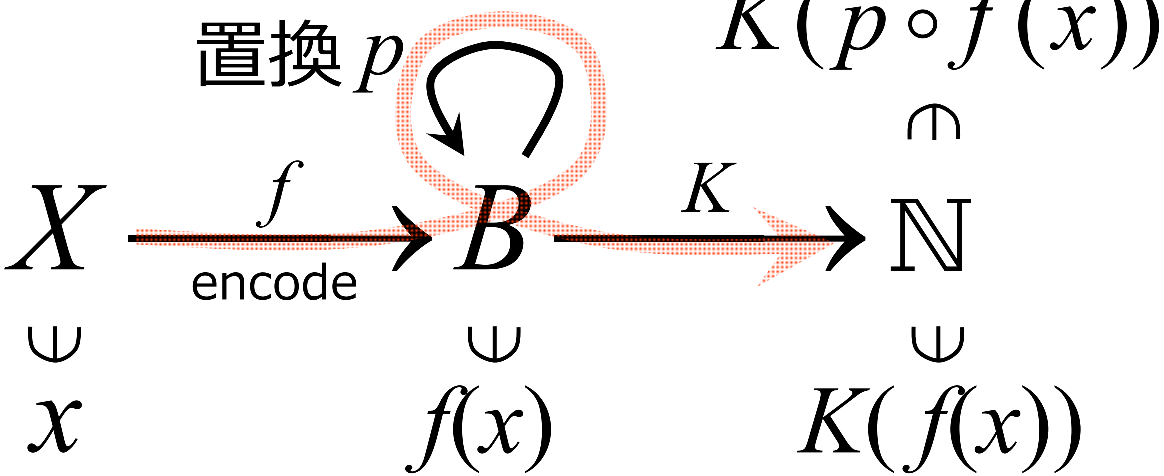
しかし

- 一般性に欠ける
- 計算(情報の圧縮)を f の方でしている

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow[\text{encode}]{f} & B & \xrightarrow{K} & \mathbb{N} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & & f(x) & & K(f(x)) \end{array}$$

このアプローチの問題点

- 一般性のある f を定義することが難しい
- 部分の情報量をアプリオリに指定できる必要
  - 例：点の情報量は一定にしたい
- f の定義次第で情報計量はどうにでも変わる（任意性の罠）



アプローチ

次のような性質をもつ、一般の対象の表現を定義する：

- 一般性

  できるだけ一般の対象を表現できる
- 一様性

  それらを出来るだけ同じように表現できる
- 情報量を反映

  規則性を反映して表現のサイズが変わる
- 接地性

  生のデータとの関係の情報を表現が含んでいる

基本表現

- 生のデータを表すビットマップのようなもの
- 抽象化 → 部分集合
  - 直線、円、その他の幾何学的対象は、その属する空間の部分集合と考える
  - 画像は $\mathbb{R}^2 \times \mathit{Color}$ の部分集合と考えられる

    $D \subset \mathbb{R}^2$上の画像関数 $I(p) \Leftrightarrow \{(p, I(p)) \mid p \in D\}$
  - その他　例：物体の表現

    空間を$\mathbb{R}^3$、各点を占める物質の集合をMとする

    自転車 $\subset \mathbb{R}^3 \times M,\quad M = \{$鉄、ゴム、…$\}$

基本表現

- 生データ・信号レベル
- アプリオリ
- ほとんど全てを表現可能
- 構造は反映しない
- 表現可能なもののほとんどがノイズ
- 「密」な表現

定義：図式と断面

- 集合とそれらの間の冪写像を指定(図式)

例

$$\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$
$$\psi : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\eta : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\kappa : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(W)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "\kappa"'] & Y \arrow[l, dotted, "\varphi"'] & Z \arrow[l, dotted, "\psi"'] \\
 & W \arrow[u, dotted, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

定義：図式と断面

- 集合とそれらの間の冪写像を指定(図式)

例

$$\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$
$$\psi : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\eta : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\kappa : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(W)$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rrdd, dotted, "\kappa"'] & & Y \arrow[ll, dotted, "\varphi"'] & & Z \arrow[ll, dotted, "\psi"'] & \\
s(X) \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & & & s(Y) \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] & & s(Z) \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] \\
 & & & W \arrow[uu, dotted, "\eta"'] & & & \\
 & & & & s(W) \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] & &
\end{tikzcd}$$

- 各集合にその部分集合を与える s を考える

(断面)

定義：図式と断面

- 集合とそれらの間の冪写像を指定(図式)

例

$$\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$
$$\psi : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\eta : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\kappa : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(W)$$

$$\begin{tikzcd}
s(X) \arrow[r, phantom, "\subset"] & X \arrow[dr, dotted, "\kappa"'] & & Y \arrow[ll, dotted, "\varphi"'] & & Z \arrow[ll, dotted, "\psi"'] & s(Z) \arrow[l, phantom, "\supset"] \\
& & W \arrow[ur, dotted, "\eta"'] & s(W) \arrow[l, phantom, "\supset"] & s(Y) \arrow[ul, phantom, "\supset"] & &
\end{tikzcd}$$

- 各集合にその部分集合を与える s を考える (断面)
- s は次を満たすこととする

$$s(X) = \varphi(s(Y))$$
$$s(Y) = \psi(s(Z)) \cap \eta(s(W))$$
$$s(W) = \kappa(s(X))$$

$$s(S) = \bigcap_{\mu \in \mathrm{in}(S)} \mu(s(\mathrm{dm}(\mu)))$$

$\mathrm{in}(S)$：集合Sに入射する図式中の冪写像の集合

μ： $\mathcal{P}(\mathrm{dm}(\mu)) \to \mathcal{P}(\mathrm{cdm}(\mu))$

定義：図式と断面

- 集合とそれらの間の冪写像を指定(図式)

例

$$\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$
$$\psi : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\eta : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\kappa : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(W)$$

$$\begin{tikzcd}
s(X) \arrow[r, phantom, "\subset"] & X \arrow[dr, dotted, "\kappa"'] & Y \arrow[l, dotted, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "\supset"] & s(Y) & Z \arrow[ll, dotted, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\supset"] & s(Z) = \{z\} \\
& & W \arrow[u, dotted, "\eta"'] \arrow[r, phantom, "\supset"] & s(W) & &
\end{tikzcd}$$

- 各集合にその部分集合を与える s を考える
- s は次を満たすこととする

$$s(S) = \bigcap_{\mu \in \mathrm{in}(S)} \mu(s(\mathrm{dm}(\mu)))$$

$$s(X) = \varphi(s(Y))$$ (断面)
$$s(Y) = \psi(s(Z)) \cap \eta(s(W))$$
$$s(W) = \kappa(s(X))$$

- いくつかの $s(\ )$ を指定する (部分断面)

定義：図式と断面

- 集合とそれらの間の冪写像を指定(図式)

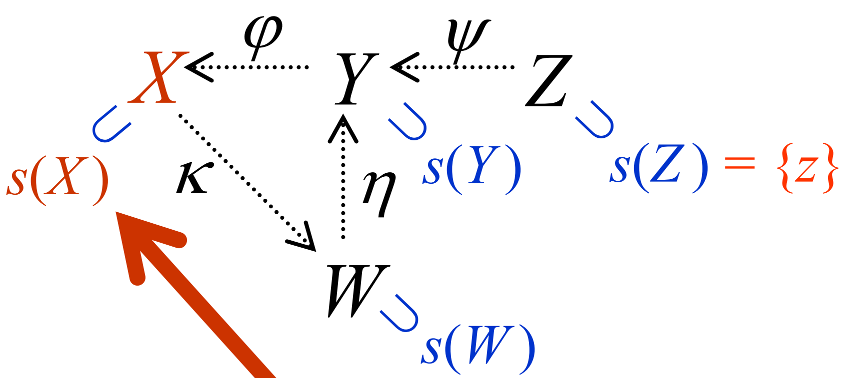
例

$\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$

$\psi : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Y)$

$\eta : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(Y)$

$\kappa : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(W)$



- 各集合にその部分集合を与える s を考える
- s は次を満たすこととする

$$s(S) = \bigcap_{\mu \in \mathrm{in}(S)} \mu(s(\mathrm{dm}(\mu)))$$

ここに対象が基本表現で与えられる

$s(W) = \kappa(s(X))$

- いくつかの $s(\ )$ を指定する (部分断面)
- 図式内の集合を一つ指定する

最も簡単な例

$$
\begin{tikzcd}
s(\mathbb{R})=\{r\} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\mathrm{dist}^{-1}"] & X\times X' \arrow[d, dotted, "\pi_1"] \\
 & X' \arrow[ur, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X \\
s(X')=\{p\} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & & s(X)=? \arrow[u, phantom, "\subset"]
\end{tikzcd}
$$

X, X'：ユークリッド平面

dist: $X\times X\to\mathbb{R}$ ：距離関数

π_1, π_2：射影

$$s(S) = \bigcap_{\mu\in\mathrm{in}(S)} \mu(s(\mathrm{dm}(\mu)))$$

冪写像の記法

$f\colon A \to B$

$\Rightarrow$

$f\colon\ \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B) \qquad A\supset S \mapsto \{f(x)\mid x\in S\}\subset B$

$f^{-1}\colon\ \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A) \qquad B\supset S \mapsto \{x\in A\mid f(x)\in S\}\subset A$

最も簡単な例

$$\begin{tikzcd}
s(\mathbb{R})=\{r\} \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{R} \arrow[rr, dotted, "\mathrm{dist}^{-1}"] & & X \times X' \arrow[d, dotted, "\pi_1"] \\
s(X')=\{p\} \arrow[r, phantom, "\subset"] & X' \arrow[urr, dotted, "\pi_2^{-1}"] & s(X)=? \arrow[r, phantom, "\subset"] & X
\end{tikzcd}$$

X, X'：ユークリッド平面

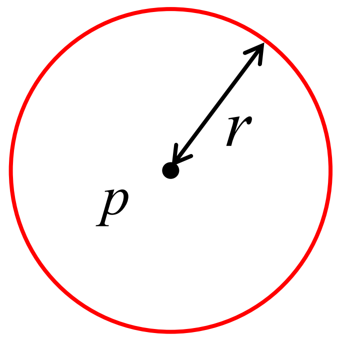
dist: $X \times X \to \mathbb{R}$ ：距離関数

π_1, π_2：射影

$$s(S) = \bigcap_{\mu \in \mathrm{in}(S)} \mu(s(\mathrm{dm}(\mu)))$$

$$\begin{aligned}
s(X \times X') &= \mathrm{dist}^{-1}(s(\mathbb{R})) \cap \pi_2^{-1}(s(X')) \\
&= \{(x, y) \mid \mathrm{dist}(x, y) \in s(\mathbb{R}), \pi_2(x, y) \in s(X')\} \\
&= \{(x, p) \mid \mathrm{dist}(x, p) = r\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(X) &= \pi_1(s(X \times X')) \\
&= \{x \mid \mathrm{dist}(x, p) = r\}
\end{aligned}$$



最も簡単な例

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, dotted, "\pi_1^{-1}"] & V\times\mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\mathrm{mult}"] & V' \arrow[dl, dotted, "\mathrm{sub}^{-1}"'] & \\
s(V)=\{v\} \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & X' \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X\times X' \arrow[r, dotted, "\pi_1"] & X & \\
s(X')=\{p\} \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & & & s(X)=? \arrow[ul, phantom, "\supset" sloped]
\end{tikzcd}
$$

X, X' :ユークリッド平面

V, V' : 2次元ベクトル空間

mult: $V\times\mathbb{R} \longrightarrow V \quad (v,c)\mapsto cv$

sub: $X\times X \rightarrow V \quad (x,y)\mapsto x-y$

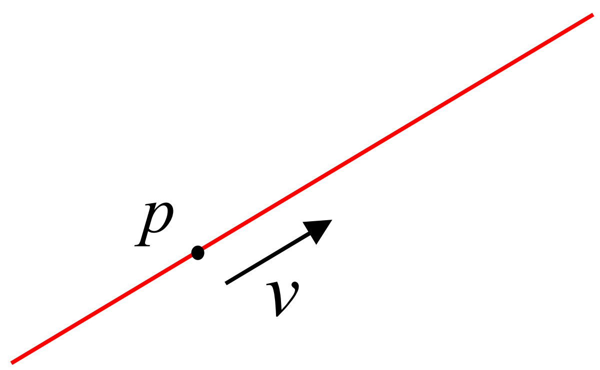
π_1, π_2: 射影

$$s(V\times\mathbb{R}) = \{(v,c) \mid c\in\mathbb{R}\}$$

$$s(V') = \{cv \mid c\in\mathbb{R}\}$$

$$s(X\times X') = \{(x,p) \mid x-p\in s(V')\}$$

$$s(X) = \{x \mid x = p+cv, c\in\mathbb{R}\}$$

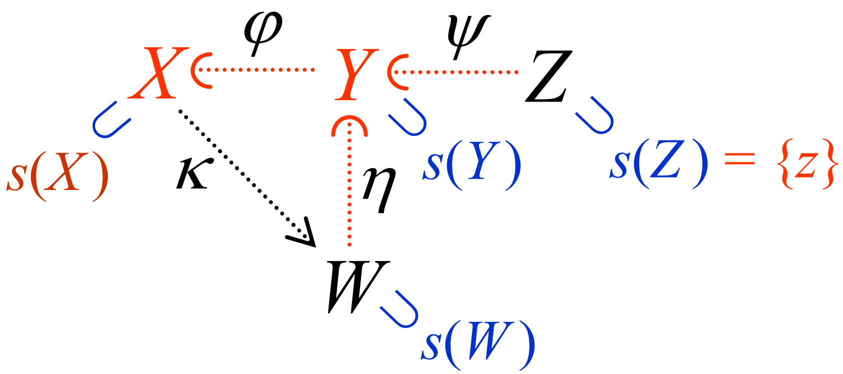


定義の続き

- 集合とそれらの間の冪写像を指定(図式)

例

$$\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$$
$$\psi : \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\eta : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(Y)$$
$$\kappa : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(W)$$



- 特定の集合については s は

$$s(S) = \bigcup_{\mu \in \mathrm{in}(S)} \mu(s(\mathrm{dm}(\mu)))$$

を

$$s(S) = \bigcap_{\mu \in \mathrm{in}(S)} \mu(s(\mathrm{dm}(\mu)))$$

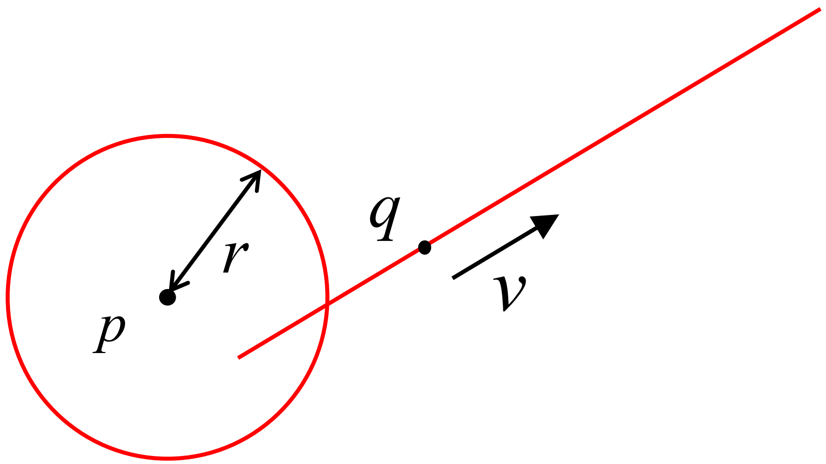
$$s(X) = \varphi(s(Y))$$
$$s(Y) = \psi(s(Z)) \cup \eta(s(W))$$
$$s(W) = \kappa(s(X))$$

の代わりに満たすこととする

和集合

$$
\begin{tikzcd}
s(\mathbb{R})=\{r\} \subset \mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\mathrm{dist}^{-1}"] & X\times X' \arrow[dd, dotted, "\pi_1"] \\
s(X')=\{p\} \subset X' \arrow[ur, dotted, "\pi_2^{-1}"] & \\
& X
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
s(V)=\{v\} \subset V \arrow[r, dotted, "\pi_1^{-1}"] & V\times\mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\mathrm{mult}"] & V' \arrow[dl, dotted, "\mathrm{sub}^{-1}"] \\
s(X')=\{q\} \subset X' \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X\times X' \arrow[d, dotted, "\pi_1"] & \\
& X &
\end{tikzcd}
$$



再帰的定義

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X\times V \arrow[d, dotted, shift left, "\mathrm{add}"] \\
s(V)=\{v\} \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & X' \arrow[r, dotted, "\mathrm{id.}"] & X \arrow[u, dotted, shift left, "\pi_1^{-1}"] \\
s(X')=\{p\} \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & s(X)=\,? \arrow[u, phantom, "\subset" sloped]
\end{tikzcd}$$

X, X' :ユークリッド平面

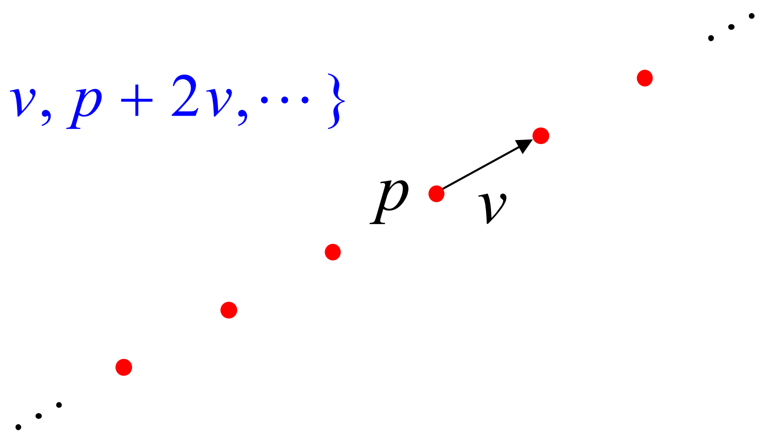
V : 2次元ベクトル空間

add: $X\times V \to X \quad (x,v)\mapsto x+v$

π_1, π_2: 射影

$$s(X\times V) = \{(x,v) \mid x\in s(X)\}$$

$$\begin{aligned}
s(X) &= s(X')\cup \mathrm{add}(s(X\times V)) \\
&= \{p\}\cup\{x+v \mid x\in s(X)\} \\
&\supset \{\cdots, p-2v, p-v, p, p+v, p+2v, \cdots\}
\end{aligned}$$



再帰的定義

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X \times V \arrow[d, dotted, shift left, "\mathrm{add}"] \\
X' \arrow[r, dotted, hook, "\mathrm{id.}"] & X \arrow[u, dotted, shift left, "\pi_1^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$s(V) = \{u, v\} \subset V$

$s(X') = \{p\} \subset X'$

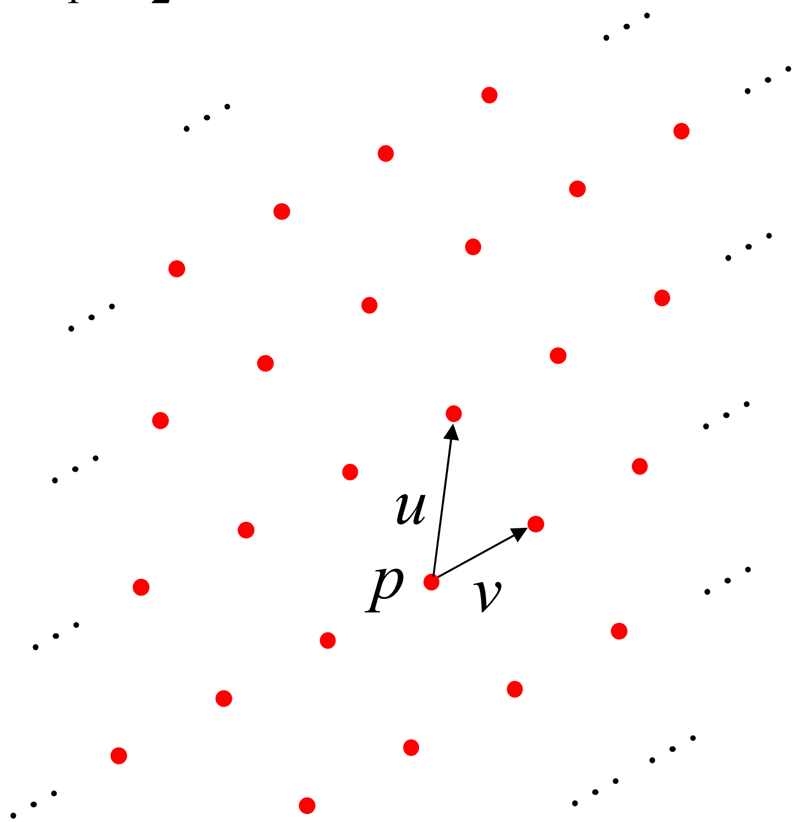
$s(X) = ?\ \subset X$

X, X' :ユークリッド平面

V：2次元ベクトル空間

add: $X \times V \to X \quad (x, v) \mapsto x + v$

π_1, π_2: 射影



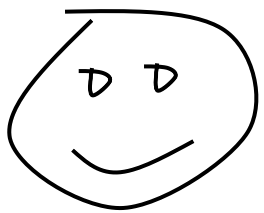
階層的定義

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X\times V \arrow[d, dotted, shift left, "\mathrm{add}"] \\ X' \arrow[r, dotted, "\mathrm{id.}"] & X \arrow[u, dotted, shift left, "\pi_1^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$s(V)=\{u,v\}$

$s(X')=A$

$s(X)=?$



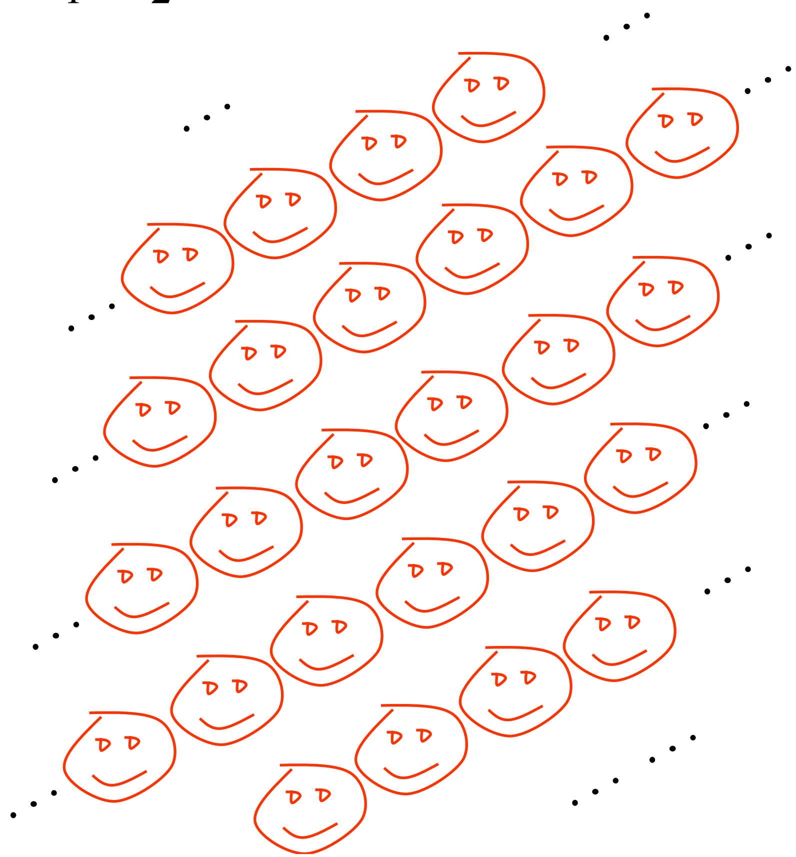
$A\subset X$

X, X' :ユークリッド平面

V：2次元ベクトル空間

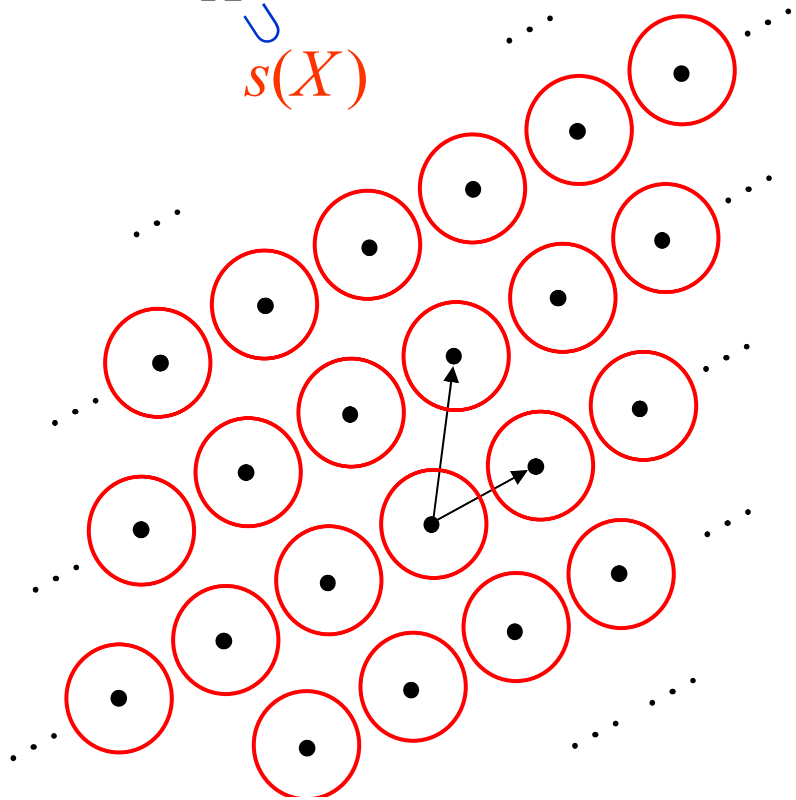
add: $X\times V\to X \quad (x,v)\mapsto x+v$

π_1, π_2: 射影



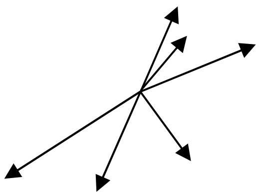
階層的定義

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\mathrm{dist}^{-1}"] & X\times X' \arrow[ddrr, dotted, "\pi_1"] & & V \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X\times V \arrow[dd, dotted, hook, bend left, "\mathrm{add}"] \\
s(\mathbb{R})=\{r\} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & & \{u,v\} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & \\
 & X' \arrow[uur, dotted, "\pi_2^{-1}"] & & & X' \arrow[r, dotted, hook, "\mathrm{id.}"] & X \arrow[uu, dotted, "\pi_1^{-1}"] \\
s(X')=\{p\} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & & & & & s(X) \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"]
\end{tikzcd}
$$

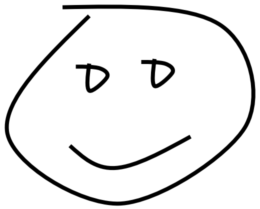


データの規則正しい部分とランダムな部分

- 例: 同じパターンがランダムに繰り返す
  - 規則性: パターンが同じ
  - ランダム性:
    - パターンはランダムでよい
    - パターンがどこに現れるか

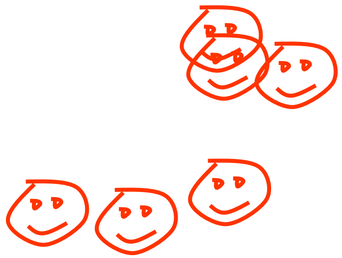


$R \subset V$



$A \subset X$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X \times V \arrow[d, dotted, "\mathrm{add}"] \\ R \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & X' \arrow[ur, dotted, "\pi_1^{-1}"] & X \\ A \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & s(X) = ? \arrow[u, phantom, "\subset" sloped] \end{tikzcd}$$



註

- 図式 (集合と冪写像) が構造を表し、固定された部分断面がパラメーターの役割を果たす
- データ中の規則性にしたがって疎な表現を実現
- 少数の集合と写像を固定して、その組み合わせにより表すことを想定
- 固定された集合と写像を(近似等で)実装すれば残りは自動的に扱えることをめざす
- 図式で表される構造と実装の詳細を分離
  - 実数の近似による実装
  - 画像の解像度
  - …

計算を表現

- 例：階乗の計算

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, dotted, hook] & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[loop right, dotted, "(n,m)\mapsto(n+1,m(n+1))"] \end{tikzcd}$$

$$s(\mathbb{N}\times\mathbb{N})=\{(0,1)\} \qquad \{(0,1),(1,1),(2,2),(3,6),\cdots,(n,n!),\cdots\}$$

- 例：Fibonacci数の計算

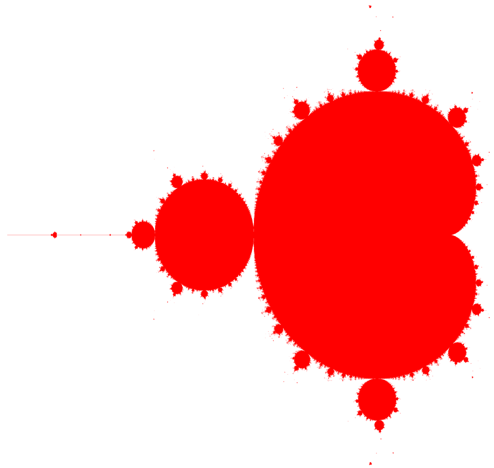
$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}^{+}\times\mathbb{N}^{+} \arrow[r, dotted, hook, "\mathrm{id}"] & \mathbb{N}^{+}\times\mathbb{N}^{+} \arrow[loop below, dotted, "(n,m)\mapsto(m,n+m)"] \arrow[r, dotted, "\pi_1"] & \mathbb{N}^{+} \end{tikzcd}$$

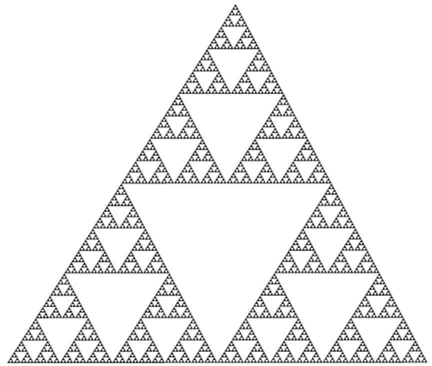
$$s(\mathbb{N}^{+}\times\mathbb{N}^{+})=\{(1,1)\} \qquad \{1,1,2,3,5,8,\cdots\}$$

- 実は任意のTuring machineをエミュレート可能

計算を表現

- 計算と幾何を混合可能





$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{N} \arrow[loop left, dotted, "{(c,z,k)\mapsto(c,c+z^2,k)}"] \arrow[r, dotted, "\pi_1\times\pi_2"] & \mathbb{C}\times\mathbb{C} \arrow[r, dotted, "\mathrm{cmpl}\circ\pi_1"] & \color{red}{\mathbb{C}} \\
\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{N} \arrow[u, dotted, hook, "\mathrm{id}"] & \mathbb{C} \arrow[u, dotted, "\pi_2^{-1}"] & \\
\mathbb{C}\times\{0\}\times\{0\} \arrow[u, phantom, "\subset"] & \{z\in\mathbb{C} \mid |z|>2\} \arrow[u, phantom, "\subset"] &
\end{tikzcd}
$$

情報計量

- 任意の部分集合について、コルモゴロフ複雑性に類似の 情報計量を定義可能
- 写像の集合を固定し、その組み合わせにより作ることが可能な写像だけを使って対象を表現可能な図式のうち最小のもののサイズで量る

情報計量

$\mathcal{M}$：写像の集合

$\langle \mathcal{M} \rangle$：$\mathcal{M}$に生成される写像の集合

1. $\mathrm{id}: X \to X,\quad \pi_i: X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i,\quad \omega : X \to \{0\} \quad \in \langle \mathcal{M} \rangle$
2. $f \in \mathcal{M} \Rightarrow f \in \langle \mathcal{M} \rangle$
3. $f : X \to Y, g : Y \to Z \in \langle \mathcal{M} \rangle \Rightarrow g \circ f : X \to Z \in \langle \mathcal{M} \rangle$
4. $f_i : X \to Y_i \in \langle \mathcal{M} \rangle \Rightarrow f_1 \times \cdots \times f_n : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_n \in \langle \mathcal{M} \rangle$

$$\begin{array}{ccc} X & \to & Y_1 \times \cdots \times Y_n \\ \Psi & & \Psi \\ x & \mapsto & (f_1(x), \cdots f_n(x)) \end{array}$$

情報計量

$f \in \langle \mathcal{M} \rangle$について、$|f|_{\mathcal{M}}$を以下のように定義

1. $|\mathrm{id}|_{\mathcal{M}} = 1,\quad |\pi_i|_{\mathcal{M}} = 1,\quad |\omega|_{\mathcal{M}} = 1$
2. $f \in \mathcal{M} \Rightarrow |f|_{\mathcal{M}} = 1$
3. fが合成写像のとき

$$|f|_{\mathcal{M}} = 1 + \min_{\substack{g,h \in \langle \mathcal{M} \rangle \\ g \circ h = f}} (|g|_{\mathcal{M}} + |h|_{\mathcal{M}})$$

4. fが積写像のとき

$$|f|_{\mathcal{M}} = 1 + \min_{\substack{f_1, \cdots, f_n \in \langle \mathcal{M} \rangle \\ f = f_1 \times \cdots \times f_n}} (|f_1|_{\mathcal{M}} + \cdots + |f_n|_{\mathcal{M}})$$

情報計量

$\mathcal{M}$：写像の集合

図式中のすべての冪写像 $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ について、$\langle\mathcal{M}\rangle$中に

- $\varphi = f$ となる$f : X \to Y$　または
- $\varphi = f^{-1}$となる $f : Y \to X$

が 存在するとき、この図式は$\mathcal{M}$で生成される

という。このとき、$|\varphi|_{\mathcal{M}} = |f|_{\mathcal{M}}$ と定義する

図式のサイズを、その中の冪写像のサイズの総和で定義する。

情報計量

写像の集合$\mathcal{M}$を固定して、部分集合 $A \subset X$ の情報量を、Aを表現する$\mathcal{M}$で生成される図式のサイズのうち最小のものとして定義したい

しかし、何の制限もしないと部分断面としてAを指定することで情報量は 0 にできてしまう

$$X$$

$$s(X)=A \subset$$

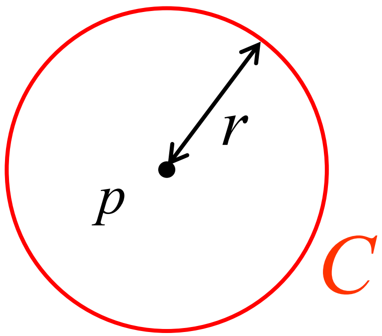
自明な表現

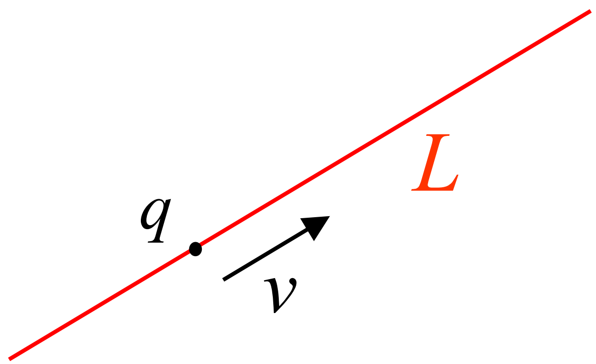
そこで

情報計量

定数 $x \in X$ を写像 $x : \{0\} \to X$ とみなし部分断面は $s(\{0\}) = \{0\}$ のみを許す

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \subset \{0\} \arrow[r, dotted, "r"] & \mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\mathrm{dist}^{-1}"] & X \times X' \arrow[d, dotted, "\pi_1"] \\
\{0\} \subset \{0\} \arrow[r, dotted, "p"] & X' \arrow[ur, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{0\} \subset \{0\} \arrow[r, dotted, "v"] & V \arrow[r, dotted, "\pi_1^{-1}"] & V \times \mathbb{R} \arrow[r, dotted, "\mathrm{mult}"] & V' \arrow[dl, dotted, "\mathrm{sub}^{-1}"'] \\
\{0\} \subset \{0\} \arrow[r, dotted, "q"] & X' \arrow[r, dotted, "\pi_2^{-1}"] & X \times X' \arrow[r, dotted, "\pi_1"] & X
\end{tikzcd}$$





$I(C \mid \{r, p, \mathrm{dist}\}) \leq 5$ $\qquad$ $I(L \mid \{v, q, \mathrm{mult}, \mathrm{sub}\}) \leq 7$

情報計量

対象の属する空間を特徴づける写像の組を選び
それに相対的に情報計量を定義する
たとえばユークリッド空間 X の場合、

$$\mathcal{M}_{\mathrm{E}} = \{\mathrm{dist, add, sub, mult}\} \cup \underbrace{X}_{\{x:\{0\}\to X \mid x\in X\}} \cup V \cup \mathbb{R}$$

とすると、

- $I(C \mid \mathcal{M}_{\mathrm{E}}) \leq 5$, $I(L \mid \mathcal{M}_{\mathrm{E}}) \leq 7$
- 任意の有限集合 $A \subset X$ について $I(A|\mathcal{M}_{\mathrm{E}}) \leq |A|$

コルモゴロフ複雑性との関係

$b = \{0,1\}$　$b^* = 0,1$の有限列全体の集合

$\sigma \in b^*$のとき

- $|\sigma|$ で σの長さ
- $\sigma[i]$ でσの i 番目の文字

を表す

U : 万能チューリング機械は写像 $b^* \to b^* \cup \{\uparrow\}$ を定義する

Uについての$\sigma \in b^*$のコルモゴロフ複雑性は

$$K_U(\sigma) = \min_{p \in b^*, U(p) = \sigma} |p|$$

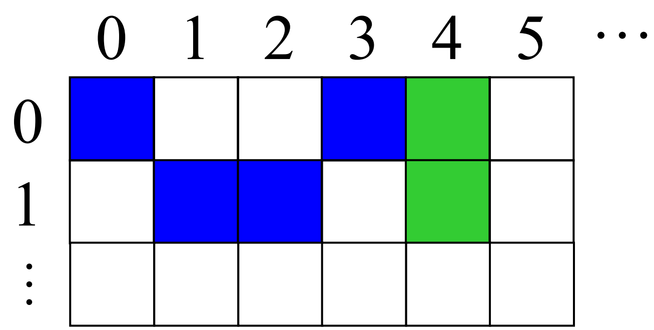
で定義される。

コルモゴロフ複雑性との関係

$\sigma \in b^*$ に対して $\bar{\sigma} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を次のように定義する

$$\bar{\sigma} = \{(i, \sigma[i]) \mid i = 0, 1, \cdots, |\sigma|-1\} \cup \{(|\sigma|, 0), (|\sigma|, 1)\}$$

例: $\sigma = 0110$ なら $\bar{\sigma} = \{(0,0),(1,1),(2,1),(3,0),(4,0),(4,1)\}$

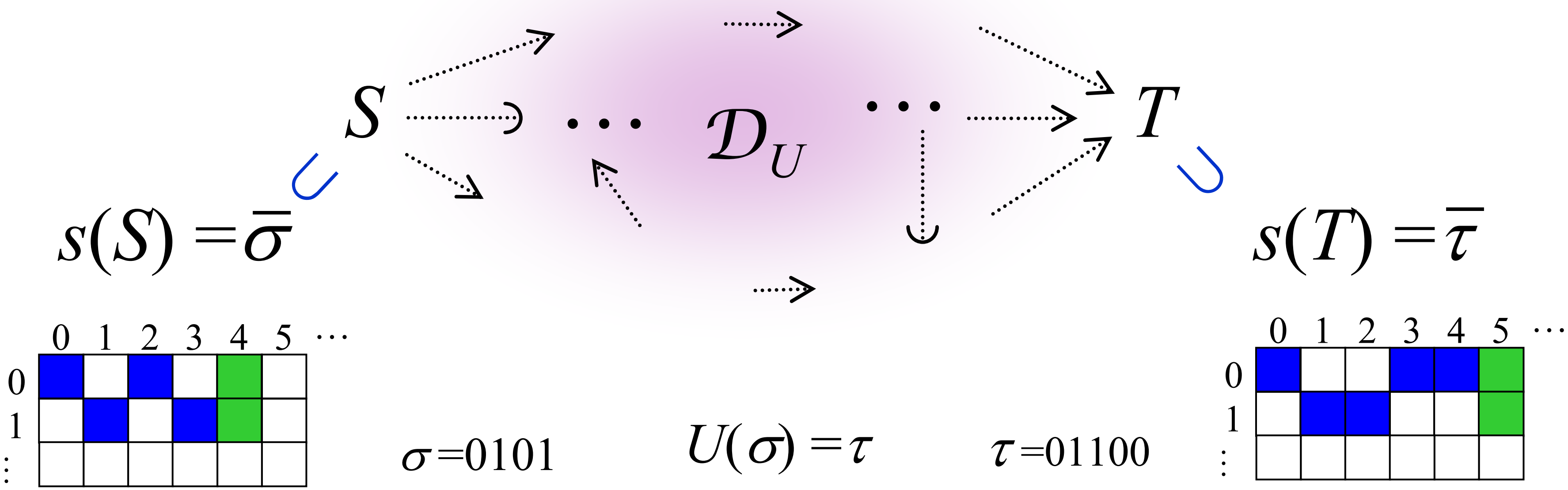


$\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = \{0, \mathrm{succ}\}$

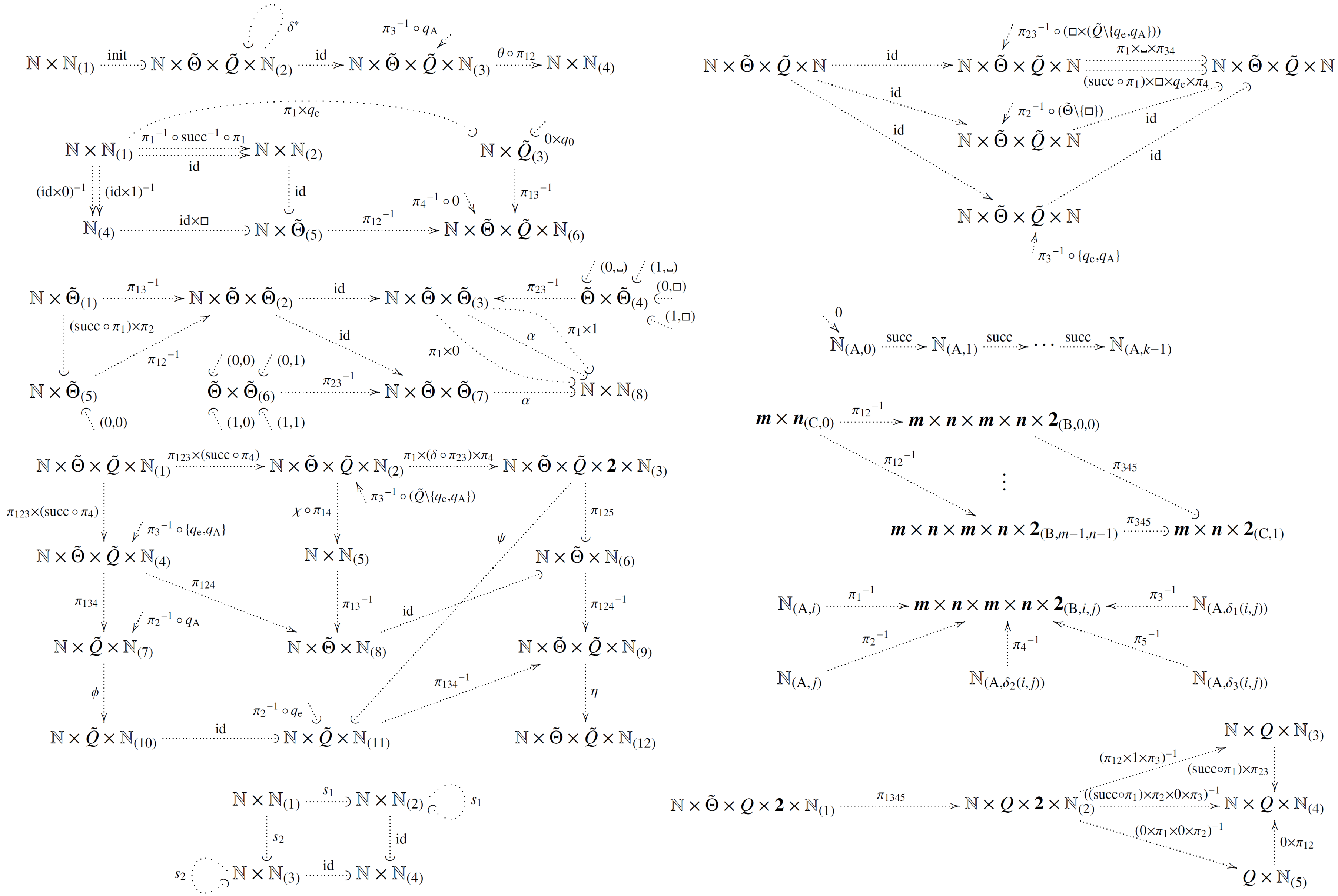
- $0 : \{0\} \to \mathbb{N},\ 0(0) = 0$
- $\mathrm{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\quad [\mathrm{succ}(n) = n+1]$

コルモゴロフ複雑性との関係

定理 任意の万能チューリング機械Uについて、$\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$で生成される図式$\mathcal{D}_U$で、$S = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $T = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を含み、任意の$\sigma \in b^*$と $s(S) = \overline{\sigma}$なる任意の断面 s について、$U(\sigma) = \uparrow$なら $s(T) = \emptyset$, $U(\sigma) = \tau \in b^*$ なら $s(T) = \overline{\tau}$ を満たすものが存在する。



コルモゴロフ複雑性との関係



コルモゴロフ複雑性との関係

系 任意の万能チューリング機械Uについて、
定数c_Uが存在して、任意の$\sigma \in b^*$について

$$I(\overline{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}}) \leq 6K_U(\sigma) + c_U$$

を満たす。

コルモゴロフ複雑性との関係

$\sigma \in b^*$について、$\mathcal{D}_\sigma$を$\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$で生成され$\bar{\sigma}$を表現する図式とする。

定理 任意の$\sigma \in b^*$を表現する図式$\mathcal{D}_\sigma$を符号化したものを入力として、σを出力し停止するチューリング機械が存在する。

系 任意の万能チューリング機械Uについて

$$K_U(\sigma) \leq d_U I(\bar{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}}) + e_U$$

を任意の$\sigma \in b^*$について満たす定数d_U, e_Uが存在する。

「構造」の自動的な扱いへの構想

- 基本的な空間と写像を近似的に実装する
  - 実数、空間、その他
- 構造のバラエティはそれらの組み合わせによって自動的に生成される
- 構造は写像の組み合わせで決まるので、近似によらない
  - システム間のデータ交換によって構造は変わらない

最適化問題としてのパターン発見

- 信号レベルのデータを与えて、それを表現できる情報計量最小の図式を見つける
- 基本表現（自明な表現）では必ず表現できる
- 規則性のある部分は、よりコンパクトな図式で表現できる

結論

- 非記号データを含む一般の対象の表現
- 構造を空間を特徴づける写像によって記述
  - 構造についての規則性を反映し疎な表現を実現
- 疎な表現と密な表現を混在可能
  - データの規則的な部分とランダムな部分に対応
- 階層的、帰納的表現が可能
- 生のデータとの関係の情報を表現が含んでいる
  - 符号化の任意性がない
- 非記号空間の要素について直接計算を定義
- 非記号データの圧縮を直接定義することによる一般の対象についての情報計量の定義