

# パターンとは何か——非記号計算と一般対象の情報計量\*

石川 博†

**Abstract:** 情報科学では、抽象化された情報と現実の世界の一般対象の関係、すなわち符号化は任意であるとされる。逆に、一般対象に内包される情報の概念は、符号化できる対象の全体を限定して、その範囲でのみ意味を持つ。しかし、対象の全体が大きくなると、その全体に共通して適用可能な情報概念の定義が難しくなる。ビットで表わされる記号の世界を離れて情報について考えると、他にも符号化の任意性の喪失や、一般対象の規則性と符号の規則性の不一致等の問題が生ずる。本稿では、一般にパターンとは何かを考えるときにも生ずるこれらの問題を考察し、一つの解答として、任意の空間内でその空間における規則性を規定する写像によって直接定義された、計算と情報量の概念について紹介する。

**Keywords:** パターン, 非記号, 情報量, 接地計算.

## 1 はじめに

古典的パターン認識において、我々は画像などデータについての直感に基づいて、どのように見える特徴がどのように配置されているかというモデルを設計し、それを見つけることでパターン認識を実現してきた。しかし、画像レベルから遠い抽象的なパターンを見つけようとすると、我々の直感は限られ、それは難しくなる。そのため、人間の直感に頼らずに自動的にモデルを作る一般技術が望まれ、機械学習が研究されている。

しかし、パラメータ学習はツマミのついた機械のセッティングを見つけるようなもので、ツマミの位置は探すのが、機械そのもの、つまりモデルは人手で設計される。

一方、顕在的なモデルを持たない人工ニューラルネットワークのような方法では、モデルを記述するための表現が存在しないために、構造の存在を認識し、学習することができない。別の言い方をすれば、なんらかのパターンの存在を見つけても、それをパラメトリックに表す方法がないので、階層的にそのパターンの空間の中にさらにパターンを探すというようなことができない。

本稿では、そのような構造を表すことのできる「表現」を紹介する。またそれによって、パターンとは何であるかをできるだけ一般に定義することを試みる。

パターン認識では、あらかじめ人間が指定する対象の特定の配置のようなものをパターンと呼んでいる。つまり、我々が見つけたい対象の個別例と、それから我々が直感的に外挿したものの総体として、漠然とパターンという言葉を使っている。しかし具体的に前もって知らな

いパターンを自動的に発見するためには、パターンとは何であるかという一般的かつ客観的な基準が必要である。ここではそのような基準について考えてみたい。

パターンの反対はランダムな対象である。つまり、ある対象がランダムから遠いほど、その対象中にはパターンが存在する。記号列の場合を考えると、その長さに比してコルモゴロフ複雑性あるいはアルゴリズム情報量 [4, 5, 7, 8, 12, 13] の低い記号列にはパターンが存在すると思われることができる。つまり、短いプログラムで書き出すことが可能な記号列ほどパターンを持つということである。このアイデアを形式化したのが MDL (Minimum Description Length) 原理 [9, 10] である。MDL では、データのモデルを学習するために、それを二つの部分に分けて符号化(エンコード)する。まずデータ中の規則性を利用することによって圧縮し第一の部分とし、残りの不規則性は第二の部分としてそのままデータとして持つ。これら二つの部分の長さの合計が短いほど、第一の部分の圧縮のために使った規則性、すなわちモデルがよりよいと考える。

記号列だけでなく、もっと一般の対象について同様なことが考えられるだろうか。本稿では、パターン認識の対象である現実の世界を、情報の観点から一般にモデル化しようとする場合に生ずる諸問題について検討し、それらの解決に向けた理論的定式化を試みる。

## 2 符号化の限界

MDL では、データが記号列でない場合にも、記号列による対象の適当な符号化が存在すると考え、その後は記号列についてのみ議論を進める。実際、MDL に限ら

\*企画セッション「パターン認識の新潮流」

†名古屋市立大学 大学院システム自然科学研究科 (兼) 科学技術振興機構 さきがけ 名古屋市瑞穂区瑞穂町字山の畑 1. Email: hfs@ieec.org,

ず計算機科学は、その理論的核心において、離散あるいは記号データ、すなわちビットで表される情報のみを対象として発展してきた。計算機科学における非記号データの扱いは、全てを記号列に符号化してから、チューリング計算(以下計算)を行うというものである。

確かに、一定の狭い範囲の対象のみを考えると、自然な符号化が明白であることが多い。例えばユークリッド平面上の多角形だけを扱うような場合、有限個の頂点の座標として多角形を符号化するのは容易である。またこの定義は、有限の言葉で書き表すことができるという意味で有限である。このように自然な符号化の定義が有限である場合は、代りに別の有限な定義を使っても理論上その差は無視できる。符号の一部に有限の翻訳情報をつけるだけのことだからである。

この任意性のため、符号化は全く任意であるように扱われてきた。また、情報について語るには記号列のそれについて語れば十分であるというのが、計算機科学のひとつの信念であるようにも思われる。

しかし、以下に論ずるように、この信念にはいくつか問題がある。

## 2.1 自然な符号化

まず、符号化は本当に任意ではない。コルモゴロフ複雑性の定義自体、記号列間の対応関係が計算によって有限記述できる同値類についてのみ意味を持つ。記号列の記号列による任意の「符号化」、すなわち記号列全体の集合の任意の置き換えを許した場合、当然そこでのコルモゴロフ複雑性は元のコルモゴロフ複雑性と何の関係も持たない。もちろん、このような場合は符号化が自然でないので問題にされないが、逆に言えば、符号化とは何らかの意味で自然である必要があるということである。

すると、符号化が自然であるとはどういうことかという疑問が生ずる。規則性を使って圧縮可能であるほどパターンを持つというのがここでの議論である。符号化を介してアルゴリズムによって圧縮することを考えると、自然な符号化とは、符号化する前の対象に内在する規則性が符号化後に何らかのアルゴリズムによって圧縮可能な規則性に翻訳されるようなものであると考えられる。つまり、規則的な構造を持つ対象はそのような記号列に符号化されないと、その記号列の複雑性によって元の対象の複雑性を測ることはできない。

問題は、そのような符号化が常に可能であるという保障はないことである。例えば、ユークリッド空間の点をその座標で符号化したとする。すると、その符号である文字列は、点によって異なる任意の量の情報を持ち得る。例えば、任意のデータをバイナリ文字列にして、最初に

「0.」をつけて2進小数と思えば、これを座標を持つ点は、元のデータだけの情報を持つことになる。しかしこれはユークリッド空間の点としては意味がない。

これは符号化によって複雑性が増加する例だが、逆に減る場合もある。例えば、円周率 $\pi$ を10進展開してその数字を1桁、2桁、3桁と順にとってゆき、それを $x$ 座標とする無限点列 $(3,0), (14,0), (159,0), (2653,0), \dots$ を考える。これはコルモゴロフ複雑性で考えれば、無限個の点であるにもかかわらず有限の情報量を持つが、これもまたユークリッド空間で意味のある規則性とは思われない。このように符号化が変われば意味のなくなる規則性と、そうでない規則性を区別する必要がある。

これらの例からわかるように、ユークリッド平面を $\mathbb{R}^2$ と同一視して実数を文字列とみなすのはあまり自然な符号化ではない。このように、素朴に考えた符号化によって、対象とその符号の複雑性が一致するとは限らない。

また、対象同士の関係が、符号同士の関係として意味を持つように、対象だけでなく対象同士の関係も符号化することが必要である。例えば、ユークリッド平面上の円を対象にするとして、中心座標と半径で符号化したとする。この3つの実数には、それらが円を表すという情報は含まれない。例えば、いくつかの円を効率よく圧縮するために、それらが接しているということを使えるかもしれない。しかし、円を中心座標と半径で符号化しただけでは、2つの円が接するという概念は生じない。

符号化を通したアルゴリズム情報量の理論を額面どおりに受け取れば、対象の含まれる空間についての知識は、なんらかのアルゴリズムが符号だけを見て圧縮に使えるように、すべて符号化されなければならない。実際には、そのように符号化された情報は事情を知る人間が書いたプログラムによって操作されるから問題はないのだが、例えばMDLのような一般論を論じようとする、符号化の意味に、このような対象間の関係、あるいは対象の属する空間の性質のようなものの符号化まで含めることが必要である。実際、MDLは「原理」とも呼ばれるとおり、真に形式的な一般論というよりは、人間が統計的推論システムを設計する際の哲学のようなものである。非記号データからの学習によって自動的に構造・パターンを見つけることを考えるとき、MDLの形式的な部分は役に立たない。

## 2.2 有限な符号化

もう一つの問題は、より広い対象を考えるとき、有限な符号化を見つけることが困難な場合があるという点である。例えば図1のような規則的な図形は、無限集合であるにもかかわらず、直感的に有限の情報しか持たな

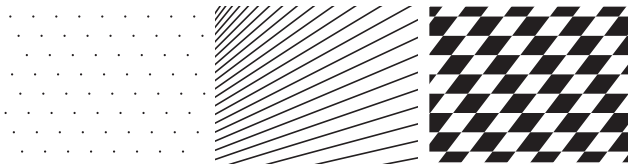


図 1: 有限情報を持つと思われる図形.

いと思われる. チューリング [14] は計算可能数という「有限な情報を持つ実数」の集合を定義したが, 同様に, ユークリッド空間内の全ての「有限の情報を持つ図形」を定義できるだろうか.

例えば点, 直線, 多角形, 円, 等々, 図形とその符号化を列挙したとすると, そのような定義は無限に多様な図形を定義する必要があるように思われる. すなわち有限ではない. さらに, そのように定義された図形の集合は実質, 「ここに列挙したもの」というだけのことであり, 「有限の情報を持つ図形」という言葉には直感に訴える以上の意味はなくなる. 「有限の情報を持つ図形」を定義できたというためには, 「図形」とその「情報」を別々に定義しなければならない.

一般に, 符号化を通して定義される情報量の概念は, その全体を有限の方法で符号化できる対象の集合上においてのみ意味を持つ. なぜなら, もし符号化の定義自体が無限の情報量を持つと, 符号化自体に任意の量の情報を含むことができるため, その後の情報量の定義には客観的意味がなくなるからである.

情報量の定義としてコルモゴロフ複雑性を使うとすると, それは符号化以前には意味を持たないので, まず少なくとも「有限の情報を持つ図形」の全てを含む集合を符号化する必要がある. そこで「図形」を全て符号化することを考える. それができれば, 符号の情報量が有限な図形だけをとって「有限の情報を持つ図形」とすることができる. しかし, 例えば包含集合として「ユークリッド空間の全ての部分集合」をとったとすると, その全ての元を符号化することができないことは, 濃度を考えれば解る.

パターン認識を自動化するために MDL のようなことを考えようとするとき生じる問題の一つは, そこで考えたい対象の集合が巨大であることである. まずパターン認識の対象である現実の世界は本来, 実数値をはじめとするアナログ値によって記述される. また, それはしばしば, 一つあるいはいくつかの数値の組ではなく, 例えば画像のように関数で表されたり, あるいはその特殊な場合として, ある空間の部分集合として表される.

後に見るように, 「有限の情報を持つ図形」の集合は定

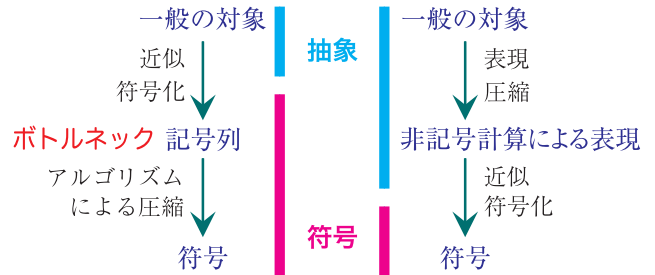


図 2: (左) 符号化によるボトルネック. (右) 非記号計算による圧縮によってボトルネックを避ける.

義可能である. しかし, 符号化が定義できるのがそれを含むもっと大きな集合であるために, そこがボトルネックになって, 最初に記号列に符号化する方法では定義できない (図 2 左). このように, 計算が記号列の上でしか定義されないために, 情報量が定義することすらできない場合が存在する.

### 2.3 符号化～座標系

ここで, 次のような疑問が生じる: ビットマップのどこが悪いのか. つまり, 上のユークリッド平面の例では非可算無限個の実数や, さらに濃度の高いその冪集合などが登場し, それが符号化できないことを問題にしているが, そんなことに意味があるのかという疑問である.

このようなことを考える理由は, §2.1 でも述べたが, 元々ない情報の混入, および必要な情報の喪失を極力避けるためである. 例えばユークリッド平面上の直線をビットマップで扱うとすると, 解像度などの本来必要のない人工的なパラメータを考慮する必要がある. 直線ひとつ定義するにも, 理想的な直線を想定し, それからの誤差 (これも人工的なパラメータである) の範囲の画素とするなど, 結局は抽象的モデルは必要である. また, 直線状に並んだ画素の列が常に直線と認識されるとは限らない. これら本来実装上の問題を, 定義のレベルから排除したいのである.

無限を扱うことについて, あまり警戒する必要はない. 一旦無限の対象を想定してその中からある抽象的性質を持つものを取り出すのは, 単にモデルを作る一過程に過ぎない. 実際に扱うことのできる対象は常に有限であり, 選べるのは抽象モデルの中からそれをどの段階でどのように抽出するかということだけである. 非常に広い範囲の対象をモデル化しようとする, 上述のような人工的なパラメータが非常に多くなる. 全体として一貫してモデル化するために, はじめから近似するのではなく, 可能な限り抽象的なレベルでモデル化し, 実際におけるそれ

の有限精度におけるシミュレーションと分離することが必要である。

ユークリッド幾何学を解析的に扱うときに導入する座標系のように、符号化や近似は実際の具体的対象を扱う場合には必要である場合が多いが、扱う対象の本質的性質の定義は、極力それに依存しないものにしたということである。そのために、アルゴリズム情報量のより一般的な定義のためには、計算の概念を抽象モデル側に移動させる必要がある（図2右）。

### 3 構造を捉えた情報表現

以上のような問題は、情報を形式的に扱う方法が記号列への符号化を介したものしかないことに起因する。そこで本稿では、記号列への符号化を伴わない情報の表現を定義し、符号化を通さず直接計算や情報の概念を定義する。

まず、計算あるいはアルゴリズムの概念を記号以外の「世界」に広げるものとして、Postscriptのようなページ記述言語を考える。そのような言語は、ページという本来非記号的なものを記述することを目的としており、計算の結果を非記号的对象に反映する言語といえる。これは、普通のプログラム言語に、点、直線、Bézier曲線等の、ページに描画するいくつかのプリミティブを加えたものと考えることができる。実際のページ記述言語を少し抽象化して、プリミティブは画像平面上の点や実数そのものを扱えるもの、つまり無限精度を持つものとする。このように、通常のプログラム言語に何らかの「世界」操作プリミティブを加えたものは、例えば代数的計算量の理論 [3] や、実数の演算をプリミティブにした計算量の理論 [1] などで研究されている。

しかし、そのような言語を使ったとして、それによって描画可能な図形を例えば「有限の情報を持つ図形」と定義しても、§2.2で述べたように、いろいろなプリミティブを加えて定義が複雑になればなるほど、そのアルゴリズムで定義される図形の集合は「ここに列挙したもの」に過ぎないという感を免れない。一般に、定義に登場する要素が多いほど、その一般性についての説得力は弱くなる。

そこで、本稿ではもっと一般的な対象の表現を非常に少ない要素を使って定義する。この表現は対象の空間を特徴付ける写像の集合を指定して、それに相対的に定義される。つまり、上でいうプリミティブのようなものを外部から与えて、それに相対的に定義されるので、上のような拡張言語を与えるメタ言語のような側面を持つ。しかし、次節の定義を見れば明確になるとおり、この写像の集合は単に「世界」を操作するだけではなく、そ

に属する対象間の関係をも記述する。そのため、それは任意のアルゴリズムを表現することだけでなく、方程式のように、対象間の関係についての条件による定義をも可能にする。これは、(プリミティブ付きプログラム言語による定式化が緊密に結びついている) 計算の実行および計算量の概念とは分離した、静的な対象の表現を可能にする。例えばそれは、非可算無限個の並列プロセスとも解することのできる対象を容易に表現できる。計算あるいはアルゴリズムは問題を解く方法としてのみ扱われてきた。しかしここでは、情報を一般に定義するにあたり、対象間の関係を表現するものとしてアルゴリズムを捉えている。実行の動的側面は、やはり座標系のようなものとして定義から分離される。

本稿の残りの概要は以下の通りである。情報表現を次節で定義した後、いくつかの例を第5節で紹介し、これを使った一般対象の情報量を第6節で定義する。第7節と第8節では、自然数を特徴付ける写像の集合に相対的に定義されたとき、この表現がチューリング計算とある意味で同値であること、そしてそのとき6節で定義した情報量がコルモゴロフ複雑性と同値であることを示す。

## 4 図式と断面によるパターンの表現

本節では、チューリング計算を含む一般の対象を、必ずしも記号列に符号化することなく数学的に表現する。これによって、対象の内在的性質としての情報をより一般に定義することが可能になる。

以下、 $\mathbb{N}$  は自然数全体の集合、 $\mathbb{R}$  は実数全体の集合を表わす。また集合  $\{0, 1\}$  を  $\mathbf{2}$  で表わし、ブール値は  $1$  を真として  $\mathbf{2}$  の元で表わす。

### 4.1 概要

正確な定義の前に、まずこの表現の概要を述べる。

#### 4.1.1 基底表現

対象を表現するといっても、それはまず先験的に何らかの方法で表現され与えられなければならない。ここでは、対象はある集合の部分集合として与えられると仮定し、このような表現をここでは基底表現と呼ぶ。

例えば画像は、画像平面  $X \subset \mathbb{R}^2$  と色の空間  $C$  の直積の部分集合  $I \subset X \times C$  で、直積成分への射影  $\pi_1 : X \times C \rightarrow X$  によって  $X$  と一対一対応がつくものと考えられる。またバイナリ記号列  $s = s_0 s_1 \dots s_n$  は  $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$  の部分集合  $\{(i, s_i) \mid i = 0, \dots, n\}$  と考えることができる。地球や自転車、仏像などの物理的な物体は、ある抽象化のレベルにおいて、3次元ユークリッド空間  $E^3$  と物質の空間  $M$  の直積の部分集合と考えることができる。物体の占め

る  $E^3$  の部分集合を  $X$ , 物体に属する点  $x \in X$  の物質が  $m(x) \in M$  であるとして,  $\{(x, m(x)) \in E^3 \times M | x \in X\}$  でその物体を表現する.

基底表現はビットマップや文字列などの生データの表現を含む, 密な表現の抽象化である. 密な表現の性質の一つは, 規則性があるかないかによって表現が左右されないことである. 例えば, ビットマップによれば, ノイズ画像も非常に規則的な画像も同様に表現することができる.

これに対して, 対象の規則性を利用する表現を, ここでは疎な表現と呼ぶ. 画像の例でいえば, これはベクトルグラフィックスのようなもので, 表現する対象が規則的であればあるほど, 少ないデータで記述することができる.

MDL においては, 符号化の第一の部分が疎な表現, 第二の部分が密な表現と考えることができる. 大雑把にいうと, コンピュータプログラムにあたるのが疎な表現, データにあたるのが密な表現とも考えられる.

本稿で紹介する表現の重要な性質の一つは, 疎な表現と密な表現を両方含み, それらの間の中間段階を自由に表現できるということである.

#### 4.1.2 構造写像

基底表現で表現された対象に内在する規則性を記述するための語彙として, その対象が部分集合として含まれる空間を特徴付ける写像を使う.

写像による空間の特徴づけとは, 以下のような意味である. 我々はいろいろな集合を考えるが, 純粋に集合として考えれば, それを特徴付けるものはその集合の濃度しかない. 例えば, 代数的構造, 位相, 距離, 順序や, ベクトル空間としての構造を無視すれば, 両者間に一対一写像が存在するという意味で  $\mathbb{R}$  は  $\mathbb{R}^2$  と同じ集合である.

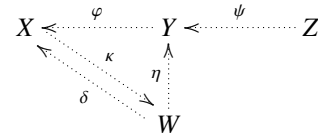
これらの構造は写像によって特徴付けることができる. 例えば, 距離構造は 2 点間の距離を与える距離写像によって特徴付けられる. 順序構造は 2 要素  $x, y$  を与えられて,  $x < y$  のときだけ真値を返すブール値関数によって定義される.

二つの空間, 例えば上の  $\mathbb{R}$  と  $\mathbb{R}^2$  は, その構造を保存する一対一写像が存在しないことから, 異なると考えられる. 例えば, 順序構造でいえば,  $X$  と  $Y$  がそれぞれ写像  $\text{prec}_X : X \times X \rightarrow \mathbf{2}$  と  $\text{prec}_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbf{2}$  によって定義される順序を持つとき, ある一対一写像  $f : X \rightarrow Y$  が任意の元  $a, b \in X$  について  $\text{prec}_X(a, b) = \text{prec}_Y(f(a), f(b))$  を満たせば,  $X$  と  $Y$  はこの構造について同じ空間と考えられる.

このように構造を特徴付ける写像を以下, 構造写像と呼ぶ. 空間の部分集合の規則性とは, 構造写像によって与えられる構造について相対的に規定されるものである.

#### 4.1.3 図式とその断面

いくつかの集合とそれらの間の冪写像 (部分集合に部分集合を与える写像) の組を図式と呼ぶ.



図式の各集合にその部分集合を与える与え方を, その図式の断面と呼ぶ. 上の例では, 断面  $s$  は集合  $X, Y, Z, W$  のそれぞれに,  $s(X) \subset X, s(Y) \subset Y, s(Z) \subset Z, s(W) \subset W$  を与える.

断面は, 図式を構成する写像との関係についてのある条件 (後出 (1)(2)) を満たさなければならない. その条件のため, 図式内の一部の集合にのみ部分集合を与える部分断面を指定するだけで, 断面全体が一つに決まるか, あるいは, その部分断面の全体への拡張であるような断面が制限されることがある. 上の例でいえば,  $s(Z)$  を決めるだけで, 条件から残りの  $s(X), s(Y), s(W)$  が決まってしまうとか, 全て決まらなくても  $s(X)$  は決定されることがある.

いま, 図式とその部分断面  $t$ , そして図式の集合のうち一つ  $S$  を指定したとき,  $t$  の拡張である断面  $s$  によって  $S$  に与えられる部分集合  $s(S) \subset S$  が一意に決定されるとする. このとき,  $s(S)$  によって基底表現で表現される対象は, 図式, 部分断面  $t$ , 集合  $S$  の指定によって表現されるという.

例えば, 上の例の図式と,  $t(Z)$  だけを与える部分断面  $t$  と, 集合  $X$  を指定したとすると, もし  $s(Z) = t(Z)$  であるような任意の断面  $s$ , つまり  $t$  の拡張  $s$  が, 常に  $s(X) = A \subset X$  を満たすとき, これらの指定の組によって  $A$  が基底表現である対象が表現されたことになる.

図式の写像は, 考えている空間の構造写像と, それらの直積や合成によって作られる写像に限ることにする. どの構造写像を使うかが, 表現にあたって考慮に入れている構造を規定する.

図式とその断面による表現は, 次のような特徴を持つ.

- i) 疎. 図式によって対称の持つ規則性を表現し, 部分断面によって残るパラメータを指定することにより, 空間の構造とそれに基づいた規則性を捉えた表現を可能にする.
- ii) モジュラー性. 表現の一部が別の対象を表現していると考えることができ, 逆により大きな対象を対象



の組み合わせとして自然に表現できる。組み合わせ方は、単なる和集合や共通部分をとることから、階層的、再帰的なものまで可能である。

- iii) **階層性**. パラメータ空間とも考えられる部分断面を他の図式で表現することにより、階層的な表現が可能である。
- iv) **再帰性**. 再帰的に定義された構造を表現することができる。
- v) **接地性**. 常に基底表現との関係を含めて表現するため、セマンティクスを含めた情報を対象の表現の一部として持つ。

最後に、図式と断面によって冪写像を表現することもできることを付け加えておく。上述した部分集合の表現は、空集合をその部分集合に送る冪写像と考えれば、冪写像の表現の特殊な場合と考えることができる。特に、任意のチューリング計算を表現可能である。

## 4.2 定義

次に、上で概要を述べた図式とその断面等を定義する。

### 4.2.1 図式と断面の定義

有限集合を、その要素の個数によって  $\mathbf{1} = \{0\}$ ,  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{n} = \{0, 1, \dots, n-1\}$  のように表わす。上述のように、特に  $\mathbf{2}$  は 0 を偽、1 を真としてブール値の集合も表わす。集合  $X$  の部分集合全ての集合 (冪集合) を  $2^X$  で表わす。集合  $\mathbf{1}$  から集合  $X$  への写像で、 $0 \in \mathbf{1}$  を  $x \in X$  に送るものと同じ文字  $x: \mathbf{1} \rightarrow X$  で表わす。これを定数写像と呼ぶ。

**定義 1.** 添字集合  $\mathcal{I}$  によって添字付けられた集合族を  $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in \mathcal{I}}$  とする。集合族  $\mathcal{S}$  の断面  $s$  とは  $\mathcal{S}$  によって添字付けられた集合族  $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$  で、全ての  $i \in \mathcal{I}$  について  $s_i \subset S_i$  を満たすものである。

集合族に属する集合のうちには集合として同じものが複数含まれることもありうることを明確にするために添字集合によって定義したが、以下では、この添字集合はできるだけ使わず、 $S \in \mathcal{S}$  のような集合論的記号を使用する。集合族  $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in \mathcal{I}}$  に含まれる集合  $S = S_i \in \mathcal{S}$  と  $\mathcal{S}$  の断面  $s = (s_i)_{i \in \mathcal{I}}$  について、 $s(S)$  は  $s_i$  を表わす。このように、断面  $s$  は  $\mathcal{S}$  の各集合  $S$  にその部分集合  $s(S)$  を与える。

集合族  $\mathcal{S}$  の断面すべての集合を  $\Gamma(\mathcal{S})$  で表わす。いま  $\mathcal{T}$  を  $\mathcal{S}$  の部分族 ( $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$  で書き表す) とするとき、 $\mathcal{T}$  の断面を  $\mathcal{S}$  の部分断面と呼ぶ。  $s$  を  $\mathcal{S}$  の断面として、これを  $\mathcal{T}$  に含まれる各集合  $S \in \mathcal{T}$  に  $s(S)$  を与え

る  $\mathcal{T}$  の断面と考えたものを  $s|_{\mathcal{T}}$  で書き表し、 $s$  の  $\mathcal{T}$  への制限と呼ぶ。

$\mathcal{T}$  の断面  $t$  について、 $\mathcal{S}$  の断面で  $\mathcal{T}$  に制限したとき  $t$  と一致するものの集合  $\{s \in \Gamma(\mathcal{S}) \mid s|_{\mathcal{T}} = t\}$  を  $\Gamma(\mathcal{S} \mid t)$  で書き表す。

**定義 2.** 集合族  $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in \mathcal{I}}$ , その部分族  $\mathcal{S}'$ ,  $\varphi_j: 2^S \rightarrow 2^{T'}$ , ( $S, T \in \mathcal{S}$ ) の形の写像の族  $\mathcal{M} = (\varphi_j)_{j \in \mathcal{J}}$  の三つ組  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を図式という。ここで  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  は添字集合である。

$(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を図式とする。定義より、写像  $\varphi \in \mathcal{M}$  は  $\varphi: 2^S \rightarrow 2^{T'}$ , ( $S, T \in \mathcal{S}$ ) の形だが、 $\varphi$  に対してこの  $S, T$  を与える写像を

$$\text{dm}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}$$

$$\text{cdm}: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}$$

とする。つまり

$$\varphi: 2^{\text{dm}(\varphi)} \rightarrow 2^{\text{cdm}(\varphi)}$$

が成り立つ。また、写像

$$\text{out} = \text{dm}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{M}}$$

$$\text{in} = \text{cdm}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{M}}$$

を定義する。つまり、すべての  $S \in \mathcal{S}$  について

$$\text{out}(S) = \{\varphi \in \mathcal{M} \mid \text{dm}(\varphi) = S\}$$

$$\text{in}(S) = \{\varphi \in \mathcal{M} \mid \text{cdm}(\varphi) = S\}$$

である。

**定義 3.** 図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  の断面とは、集合族  $\mathcal{S}$  の断面  $s$  で、 $\text{in}(S) \neq \emptyset$  であるような任意の  $S \in \mathcal{S}$  について次式を満たすものである。

$$S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}' \text{ ならば } s(S) = \bigcap_{\varphi \in \text{in}(S)} \varphi(s(\text{dm}(\varphi))) \quad (1)$$

$$S \in \mathcal{S}' \text{ ならば } s(S) = \bigcup_{\varphi \in \text{in}(S)} \varphi(s(\text{dm}(\varphi))). \quad (2)$$

図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  の  $\mathcal{S}'$  は、集合族  $\mathcal{S}$  に含まれる集合のうち断面が (1) でなく (2) を満たすべき集合のなす部分族である。つまり、その集合において断面の与える部分集合が、入射する写像による断面の像の和集合であるか共通部分であるかを定める。

図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  の断面すべての集合を  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  で書き表す。また、 $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$  および  $t \in \Gamma(\mathcal{T})$  について、

$$\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} \mid t) = \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}) \cap \Gamma(\mathcal{S} \mid t)$$

と定義する。つまり、 $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} \mid t)$  は図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  の断面のうち、 $\mathcal{S}$  の部分族  $\mathcal{T}$  に制限すると  $t$  に一致するものの集合である。

#### 4.2.2 図式と断面の例

以上の定義を例で示すため、集合族

$$\mathcal{S} = \{1, X, Y, Z, W\}$$

およびその部分族  $\mathcal{S}' = \{W\}$  と集合  $W$  の元  $w$ 、そして写像族

$$\mathcal{M} = \{w, \varphi, \psi, \eta, \delta, \kappa\}$$

を考える。ここで写像はそれぞれ

$$\begin{aligned} w: 2^1 &\rightarrow 2^W, & \varphi: 2^Y &\rightarrow 2^X, & \psi: 2^Z &\rightarrow 2^Y, \\ \eta: 2^W &\rightarrow 2^Y, & \delta: 2^W &\rightarrow 2^X, & \kappa: 2^X &\rightarrow 2^W, \end{aligned}$$

のような写像である。上述のように、 $W$  の元  $w$  について同じ文字で定数写像を表わす。これらで定義される図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を、以下のように書き表す。

$$\begin{array}{ccccc} X_{(1)} & \xleftarrow{\varphi} & Y_{(2)} & \xleftarrow{\psi} & Z_{(3)} \\ & \searrow \kappa & \uparrow \eta & \swarrow \delta & \\ & & W_{(4)} & & \end{array} \quad (3)$$

矢印が点線になっているのは、冪集合間の写像（冪写像）であることを表すためである。例えば、 $\varphi$  は  $Y$  の各部分集合を  $X$  の部分集合に写像する。

本稿では断面は  $\mathbf{1}$  には常に  $\mathbf{1}$  そのものを与える。そこでこの図式における  $w$  のように、図式中では  $\mathbf{1}$  は省略し、定数写像は入射する矢印のみで表わす。その像は  $\{w\}$  である。

括弧をつけた添字は参照のためである。以下、文中では常に、 $S_i$  はそのとき参照している図式中で  $(i)$  のついた集合を表わす。従って、例えば (3) の図式について話しているときには、 $S_1$  は集合  $X$  を意味し  $S_2$  は  $Y$  を意味する。

矢印の先端には、普通の尖ったものと丸いものの二種類ある。部分族  $\mathcal{S}'$  に属する集合に入る矢印は丸い先端を持つ。上の例では  $S_4 = W$  でそうになっている。

この図式の断面  $s$  について、例えば

$$\begin{aligned} \text{in}(X) &= \{\varphi, \delta\}, \\ \text{dm}(\varphi) &= Y, \\ s(X) &= \varphi(s(Y)) \cap \delta(s(W)), \\ s(W) &= \kappa(s(X)) \cup \{w\} \end{aligned}$$

などが成り立つ。

#### 4.2.3 図式と断面による表現

図式とその部分断面は、次の意味で対象を表現する。

**定義 4.**  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を図式、 $X$  を集合族  $\mathcal{S}$  に属する集合、 $\mathcal{T}$  を  $\mathcal{S}$  の部分族、 $t$  を  $\mathcal{T}$  の断面とする。ある対象が基底表現で  $X$  の部分集合  $A$  によって表現されているとする。このとき、もし  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  に含まれる任意の断面  $s$  について  $s(X) = A$  が成り立ち、またそのような  $s$  が少なくとも一つ存在するならば、この対象は  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, X)$  によって表現されるという。

ある  $X, \mathcal{T}, t$  が存在して  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, X)$  が対象を表現するとき、その対象は図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  によって表現されるという。

基底表現は、 $\mathcal{S} = \mathcal{S}' = \mathcal{T} = \{X\}, \mathcal{M} = \emptyset, t(X) = A$  とする**自明な表現**と同一視することにより、図式とその部分断面による表現の特殊な場合と考えることができる。

図式と部分断面により、冪写像を次のように表現することができる。

**定義 5.**  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を図式、 $X, Y$  を集合族  $\mathcal{S}$  に属する集合、 $\mathcal{T}$  を  $\mathcal{S}$  の部分族とする。また  $t$  を  $\mathcal{T}$  の断面で、 $X$  の任意の部分集合  $A$  について  $s(X) = A$  を満たす断面  $s \in \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  が存在するようなものとする。冪写像  $\varphi: 2^X \rightarrow 2^Y$  は、 $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  に属するすべての断面  $s$  が  $s(Y) = \varphi(s(X))$  を満たすとき、 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, X, Y)$  によって表現されるという。

ある  $X, Y, \mathcal{T}, t$  が存在して  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, X, Y)$  が  $\varphi: 2^X \rightarrow 2^Y$  を表現するとき、その  $\varphi$  は図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  によって表現されるという。

## 5 例

本節では図式と断面による表現の例をいくつか示す。

### 5.1 定義と記号

ここで、以下で使ういくつかの概念と記号をまとめて定義する。

- i) 任意の集合  $X$  について、 $\text{id}: X \rightarrow X$  は  $X$  上の恒等写像を、 $\omega: X \rightarrow \mathbf{1}$  は  $X$  から  $\mathbf{1}$  への写像を表す。補集合写像  $\text{cmpl}: 2^X \rightarrow 2^X$  は  $A \subset X$  について

$$\text{cmpl}(A) = {}^c A = X \setminus A.$$

で定義される。

- ii) 複数の写像  $f_i: X \rightarrow Y_i (i = 1, \dots, n)$  の積写像

$$f_1 \times \dots \times f_n: X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$$

は

$$(f_1 \times \dots \times f_n)(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

で定義される. 写像  $f: X \rightarrow Y$  と定数写像  $z: \mathbf{1} \rightarrow Z$  が与えられたとき,  $f$  と  $z \circ \omega: X \rightarrow Z$  の積写像

$$f \times (z \circ \omega): X \rightarrow Y \times Z$$

を作ることができるが, この写像を省略して

$$f \times z: X \rightarrow Y \times Z$$

とも書く. 一般に,  $X \rightarrow Y$  の形の写像と  $\mathbf{1} \rightarrow Z$  の形の写像を積写像として混合した記号を同様に使う.

iii) 集合の直積  $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$  に対して, 写像

$$\pi_i: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i$$

は  $i$  番目の成分への射影を表す. 射影の積写像については  $\pi_i \times \pi_j: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow X_i \times X_j$  を  $\pi_{ij}$  で,  $\pi_i \times \pi_j \times \pi_k$  を  $\pi_{ijk}$  で表すなどの省略形を使う.

iv) 写像  $f: X \rightarrow Y$  について, 同じ記号で冪集合間の写像  $f: \mathbf{2}^X \rightarrow \mathbf{2}^Y$  を表す. これは  $A \subset X$  について  $f(A) = \{f(x) | x \in A\} \subset Y$  で定義される.

v) 写像  $f: X \rightarrow Y$  について, 逆像を与える写像  $f^{-1}: \mathbf{2}^Y \rightarrow \mathbf{2}^X$  は  $A \subset Y$  について  $f^{-1}(A) = \{x \in X | f(x) \in A\} \subset X$  で定義される. また  $y \in Y$  について  $f^{-1}(y)$  は  $f^{-1}(\{y\})$  を意味することとする.

vi) 写像  $f: X \rightarrow X$  について,  $f^0$  は id を意味し,  $n$  が正整数のとき  $f^n$  は  $f$  を  $n$  回作用させる写像を, あるいは iv) に従ってその冪写像  $f^n: \mathbf{2}^X \rightarrow \mathbf{2}^X$  を意味する.  $n$  が負の整数のとき,  $f^n$  は冪写像  $f^{-1}: \mathbf{2}^X \rightarrow \mathbf{2}^X$  を  $-n$  回作用させた冪写像を意味する.

## 5.2 ユークリッド平面上の図形

最も簡単な例として, ユークリッド平面  $X$  上の円を考える.  $X$  上の平行移動のなすベクトル空間を  $V$  とし,  $(x, y) \in X \times X$  を  $y$  から  $x$  への平行移動  $x - y$  に写す写像を  $\text{sub}: X \times X \rightarrow V$ , また移動の距離を与える写像を  $\text{len}: V \rightarrow \mathbb{R}$  で表す.

次の図式を考える

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{(1)} & \xrightarrow{\text{len}^{-1}} & V_{(2)} \\ & & \downarrow \text{sub}^{-1} \\ X_{(3)} & \xrightarrow{\pi_2^{-1}} & X \times X_{(4)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(5)} \end{array} \quad (4)$$

これは次の要素を持つ図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を表す.

$$\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_5), \mathcal{S}' = \emptyset,$$

$$S_1 = \mathbb{R}, S_2 = V, S_3 = S_5 = X, S_4 = X \times X$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (\text{len}^{-1}: \mathbf{2}^{S_1} \rightarrow \mathbf{2}^{S_2}, \text{sub}^{-1}: \mathbf{2}^{S_2} \rightarrow \mathbf{2}^{S_4}, \\ &\pi_2^{-1}: \mathbf{2}^{S_3} \rightarrow \mathbf{2}^{S_4}, \pi_1: \mathbf{2}^{S_4} \rightarrow \mathbf{2}^{S_5}). \end{aligned}$$

逆写像は  $^{-1}$  でわかるが, 順方向の冪写像は元の写像と同じ記号で表される. 例えば (4) の  $\pi_1$  が  $\pi_1: S_4 \rightarrow S_5$  ではなく  $\pi_1: \mathbf{2}^{S_4} \rightarrow \mathbf{2}^{S_5}$  であることは, 点線であることで示される.

いま,  $\mathcal{T} = \{S_1, S_3\}$  として, その断面  $t$  を

$$t(S_1) = \{r\}, \quad t(S_3) = \{p\}$$

で定義する. ここで,  $r$  は正の実数,  $p$  はユークリッド平面  $X$  上の点とする. また,  $s$  を  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  に属する断面とする. すると, (1) より

$$\begin{aligned} s(S_2) &= \text{len}^{-1}(s(S_1)) = \text{len}^{-1}(t(S_1)) \\ &= \text{len}^{-1}(\{r\}) = \{v \in V | \text{len}(v) = r\}, \\ s(S_4) &= \text{sub}^{-1}(s(S_2)) \cap \pi_2^{-1}(s(S_3)) \\ &= \{(x, y) \in X \times X | x - y \in s(S_2), y \in s(S_3)\}, \\ s(S_5) &= \{\pi_1((x, y)) \in X | (x, y) \in s(S_4)\} \\ &= \{x \in X | x - y \in s(S_2), y \in s(S_3)\} \\ &= \{x \in X | \text{len}(x - p) = r\} \end{aligned}$$

となり, 断面  $s$  は完全に決定され  $s(S_5)$  は  $p$  を中心とする半径  $r$  の円周上の点の集合である. このように,  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, S_5)$  は円周を表現する.

もし  $t(S_3) = \{p, q\}$  とすると, それは同じ半径  $r$  を持ち  $p$  と  $q$  を半径とする 2 つの円周を表現する. このように,  $S_3$  を円の中心の空間と考えることができる. また代わりに  $t(S_1) = \{r, t\}$  とすれば, 半径  $r$  と  $t$  の同心円を表現する.

図式を

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times X_{(1)} & \xrightarrow{((\text{len} \circ \pi_1) \times \pi_2)^{-1}} & V \times X_{(2)} \\ & & \downarrow (\text{sub} \times \pi_2)^{-1} \\ & & X \times X_{(3)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(4)} \end{array}$$

と変え,  $\mathcal{T} = \{S_1\}$  として  $t \in \Gamma(\mathcal{T})$  を

$$t(S_1) = \{(r_1, p_1), (r_2, p_2), \dots\} \quad (5)$$

で定義すれば,

$$\begin{aligned} s(S_2) &= \{(v, x) \in V \times X | (\text{len}(v), x) \in t(S_1)\}, \\ s(S_3) &= \{(x, y) \in X \times X | (x - y, y) \in s(S_2)\}, \\ s(S_4) &= \{x \in X | \exists y \in X, (\text{len}(x - y), y) \in t(S_1)\}, \end{aligned}$$

より  $s(S_4)$  として (5) の半径と中心の組で指定される円を得る.



もう一つの例として、 $X$  上の直線は次の図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  で表現される。

$$\begin{array}{ccc} V_{(1)} & \xrightarrow{\pi_1^{-1}} & V \times \mathbb{R}_{(2)} \\ & & \downarrow \text{sub}^{-1} \circ \text{mult} \\ X_{(3)} & \xrightarrow{\pi_2^{-1}} & X \times X_{(4)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(5)} \end{array} \quad (6)$$

ここで、 $\text{mult} : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$  はベクトルをスカラー倍する写像である。部分族を  $\mathcal{S} = \{S_1, S_3\}$  とし、その断面  $t$  を

$$t(S_1) = \{v\}, \quad t(S_3) = \{p\},$$

で定義する。ここで  $p$  はユークリッド平面  $X$  上の点、 $v$  は  $V$  のベクトルである。 $s$  を  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  に属する断面とすると、(1) より

$$\begin{aligned} s(S_2) &= \pi_1^{-1}(\{v\}) = \{(v, c) \in V \times \mathbb{R} \mid c \in \mathbb{R}\}, \\ s(S_4) &= \text{sub}^{-1}(\text{mult}(s(S_2))) \cap \pi_2^{-1}(\{p\}) \\ &= \text{sub}^{-1}(\{cv \in V \mid c \in \mathbb{R}\}) \cap \pi_2^{-1}(\{p\}) \\ &= \{(x, p) \in X \times X \mid \exists c \in \mathbb{R}, x - p = cv\}, \\ s(S_5) &= \{x \in X \mid \exists c \in \mathbb{R}, x - p = cv\} \\ &= \{p + cv \mid c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

であるから、断面  $s$  は一意に決まり、 $s(S_5)$  は  $p$  を通り  $v$  に平行な向きをもつ直線上の点の集合である。

以上の例のように、図式と断面による表現は、空間の基本的構造を与える写像を元に、個別のプリミティブを定義することなく図形を表現できる。

### 5.3 再帰的表現

次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} V_{(1)} & \xrightarrow{\pi_2^{-1}} & X \times V_{(2)} \\ & & \downarrow \text{add} \\ X_{(3)} & \xrightarrow{\text{id}} & X_{(4)} \end{array} \quad (7)$$

ここで、 $\text{add} : X \times V \rightarrow X$  はユークリッド平面  $X$  における平行移動  $(x, w) \mapsto x + w$  である。

$\mathcal{S} = \{S_1, S_3\}$  を  $\mathcal{S}$  の部分族としその断面  $t$  を

$$t(S_1) = \{v\}, \quad t(S_3) = \{p\}, \quad (8)$$

で定義する。ここで  $p$  は  $X$  上の点、 $v$  は  $V$  のベクトルである。 $s$  を  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  に属する断面とすると、(1)、(2) より

$$\begin{aligned} s(S_2) &= \{(x, w) \mid x \in s(S_4), w \in s(S_1)\}, \\ s(S_4) &= \{p\} \cup \{x + w \mid (x, w) \in s(S_2)\} \end{aligned}$$

$$= \{p\} \cup \{x + w \mid x \in s(S_4), w \in s(S_1)\} \quad (9)$$

を得る。(9) よりあきらかに

$$D = \{p, p + v, p + 2v, p + 3v, \dots\} \subset s(S_4)$$

である。つまり、 $s(S_4)$  は  $p$  で始まり  $v$  ずつ移動した等間隔の無限個の点の集合  $D$  を含む。ただしこれだけでは断面は一意に決定されない。 $v$  による平行移動で不変な部分集合であれば何でもよいので、例えば  $s(S_4) = X$  でも条件 (9) は満たす。

これを一意にするために、次の命題を使用する。

**命題 1.** 集合  $S$  上に関数  $g : S \rightarrow \mathbb{N}$  が定義されているとし、 $S_n = g^{-1}(n)$  として任意の  $i \in \mathbb{N}$  について次式を満たす写像  $\eta : 2^S \rightarrow 2^S$  を考える。

$$\eta(S_i) \subset S_{i+1}, \quad \eta(S) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \eta(S_n).$$

このとき、もし  $S$  が  $S = S_0 \cup \eta(S)$  を満たすならば、

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} \eta^n(S_0).$$

が成り立つ。

**証明.**  $n \in \mathbb{N}, x \in S_{n+1}$  とする。 $n \neq m$  なら  $S_n \cap S_m = \emptyset$  だから、

- i)  $x \notin S_0$
- ii)  $m \neq n$  ならば  $x \notin \eta(S_m) \subset S_{m+1} \neq S_{n+1}$

が成り立つ。従って

$$S = S_0 \cup \eta(S) = S_0 \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \eta(S_n).$$

より  $x \in \eta(S_n)$  であることがわかる。よって  $S_{n+1} \subset \eta(S_n)$  である。一方、 $\eta(S_n) \subset S_{n+1}$  より  $\eta(S_n) = S_{n+1}$  を得る。従って、

$$S_n = \eta(S_{n-1}) = \eta(\eta(S_{n-2})) = \dots = \eta^n(S_0)$$

である。よって

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n.$$

より命題が証明される。□

命題 1 を使うために図式 (7) を

$$\begin{array}{ccc} V_{(1)} & \xrightarrow{\pi_2^{-1}} & X \times V \times \mathbb{N}_{(2)} \\ & & \downarrow \varphi \\ X \times \mathbb{N}_{(3)} & \xrightarrow{\text{id}} & X \times \mathbb{N}_{(4)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(5)} \end{array} \quad (10)$$

に変更し,  $\varphi: X \times V \times \mathbb{N} \rightarrow X \times \mathbb{N}$  を次式で定義する.

$$\varphi((x, w, k)) = (x + w, k + 1)$$

また (8) で定義された断面  $t$  を

$$t(S_1) = \{v\}, t(S_3) = \{(p, 0)\}.$$

に変更する. すると (9) は

$$\begin{aligned} s(S_4) &= s(S_3) \cup \varphi(s(S_2)) \\ &= \{(p, 0)\} \cup \\ &\quad \{(x + w, k + 1) \mid (x, k) \in s(S_4), w \in s(S_1)\} \quad (11) \end{aligned}$$

になる. ここで  $g: s(S_4) \rightarrow \mathbb{N}$  を  $g((x, k)) = k$  で,  $\eta: 2^{s(S_4)} \rightarrow 2^{s(S_4)}$  を

$$\eta(A) = \{(x + w, k + 1) \mid (x, k) \in A, w \in s(S_1)\}.$$

で定義すると,  $g$  と  $\eta$  は命題 1 の条件を満たす. 従って, (11) と命題より

$$\begin{aligned} s(S_4) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \eta(\{(p, 0)\}) \\ &= \{(p, 0), (p + v, 1), (p + 2v, 2), (p + 3v, 3), \dots\} \end{aligned}$$

を得る. つまり  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} \mid t)$  は  $s(S_5) = D$  を満たす断面  $s$  のみを含み,  $D$  は  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, S_5)$  で表現される.

また  $t(S_1) = \{v, -v\}$  とすれば

$$\begin{aligned} s(S_4) &= \{(p, 0)\} \cup \{(x + v, k + 1) \mid (x, k) \in s(S_4)\} \\ &\quad \cup \{(x - v, k + 1) \mid (x, k) \in s(S_4)\} \end{aligned}$$

となり, 従って

$$s(S_5) = \{\dots, p - 3v, p - 2v, p - v, p, p + v, p + 2v, p + 3v, \dots\}.$$

を得る. さらに, もし  $t(S_1) = \{v, -v, u, -u\}$  とすれば, 一般には図 3(a) のような格子状の点を得る.

## 5.4 階層的表現

図式 (4) と (10) を組み合わせた図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を考える:

$$\begin{array}{ccc} V_{(1)} \xrightarrow{\pi_2^{-1}} X \times V \times \mathbb{N}_{(2)} & \mathbb{R}_{(3)} \xrightarrow{\text{len}^{-1}} V_{(4)} \\ \uparrow \pi_{13}^{-1} \varphi & \downarrow \text{sub}^{-1} \\ X \times \mathbb{N}_{(5)} \xrightarrow{\text{id}} X \times \mathbb{N}_{(6)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(7)} \xrightarrow{\pi_2^{-1}} X \times X_{(8)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(9)} \end{array}$$

このうち, 左半分は (10) と同じで,  $S_7$  に格子状の点の集合を与える. これが右半分 (4) の円の中心の空間である. 部分族  $\mathcal{T} = \{S_1, S_3, S_5\}$  とその断面

$$t(S_1) = \{v, -v, u, -u\}, t(S_3) = \{r\}, t(S_5) = \{(p, 0)\},$$

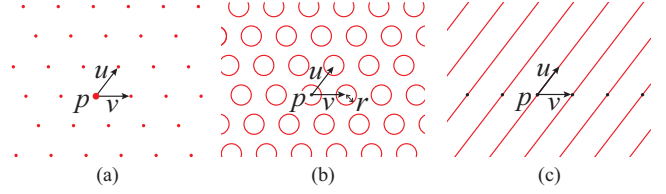


図 3: (a) 再帰的に定義された格子点. (b) 階層的に定義された格子状に並ぶ円の集合. (d) 階層的に定義された直線群.

によって,  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, S_9)$  は図 3(b) のような格子状に並ぶ円の集合を表現する.

同様に図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$ :

$$\begin{array}{ccc} V_{(1)} \xrightarrow{\pi_2^{-1}} X \times V \times \mathbb{N}_{(2)} & V_{(3)} \xrightarrow{\pi_1^{-1}} V \times \mathbb{R}_{(4)} \\ \uparrow \pi_{13}^{-1} \varphi & \downarrow \text{sub}^{-1} \circ \text{mult} \\ X \times \mathbb{N}_{(5)} \xrightarrow{\text{id}} X \times \mathbb{N}_{(6)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(7)} \xrightarrow{\pi_2^{-1}} X \times X_{(8)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(9)} \end{array}$$

で部分族  $\mathcal{T} = \{S_1, S_3, S_5\}$  とその断面

$$t(S_1) = \{v, -v\}, t(S_3) = \{u\}, t(S_5) = \{(p, 0)\}.$$

を指定すれば,  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, S_9)$  は  $u$  に並行で点

$$\{\dots, p - 3v, p - 2v, p - v, p, p + v, p + 2v, p + 3v, \dots\}$$

を通る図 3(c) のような直線群を表現する.

## 5.5 疎密表現の組み合わせ

ここまでの例ではすべて疎な表現を紹介してきた. そのため, 図式と断面による表現では直線や円のような規則的で単純な対象しか表現できないという印象があるかもしれないが, そうではない. 単純に密なデータを持つには自明な表現を使えばよいのはもちろんだが, その両極端の中間的な表現も可能である. つまり, 規則的な部分は疎な表現で, ランダムな部分は密な表現で表し, それらを組み合わせることができる. 組み合わせ方は, 単純な集合としての共通部分, 和集合から, 階層的, 再帰的な組み合わせまで, 後で見るように任意の計算すなわちアルゴリズムで表される組み合わせ方が可能である. 例えば, 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} V_{(1)} \xrightarrow{\pi_2^{-1}} X \times V_{(2)} \\ \uparrow \pi_1^{-1} & \downarrow \text{add} \\ X_{(3)} & X_{(4)} \end{array}$$

任意の  $A \subset V$  と  $B \subset X$  をとって,  $t(S_1) = A, t(S_3) = B$  であるような部分切断  $t$  をとる. 例えば  $A$  に (10) による

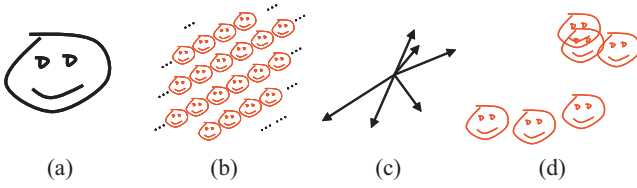


図 4: (a) 任意の部分集合  $B$ . 密な表現によるデータ. (b)  $B$  を規則的に並べた集合. (c) 任意のベクトルの集合  $A$  (d)  $B$  を  $A$  に従って並べた集合.

格子点,  $B$  に図 4(a) のような任意の部分集合をとると, 図 4(b) のように,  $B$  が格子状に繰り返された壁紙のような模様を得られる. また  $A$  にも図 4(c) のような任意の集合を使えば, 図 4(d) のように任意の位置に  $B$  が繰り返された図形を得る.

このように, 冒頭に述べた MDL のようなデータの規則的な部分とその他の部分への分割, 図式とその断面による表現は可能にする.

## 5.6 計算

次に, 計算を含むいくつかの例を紹介する.

### 5.6.1 階乗

自然数の後継者写像を  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  で, 積を与える写像を  $\text{mult} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  で表すことにする. 次の図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を考える.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(1)} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$$

ここで  $\varphi = (\pi_1 \times \text{mult}) \circ ((\text{succ} \circ \pi_1) \times \pi_2)$  は

$$(n, m) \mapsto (n + 1, m(n + 1))$$

で定義される写像である.  $\mathcal{T} = \{S_1\}$  としてその断面  $t$  を

$$t(S_1) = \{(0, 1)\}$$

で定義する.  $s$  を  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  に含まれる断面とすると,

$$s(S_2) = s(S_1) \cup \varphi(s(S_2)) = \{(0, 1)\} \cup \varphi(s(S_2)) \quad (12)$$

を得る. 関数  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を  $g((n, m)) = n$  で定義すると,  $g$  と  $\varphi$  はあきらかに命題 1 の条件を満たす. 従って (12) より

$$\begin{aligned} s(S_2) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi(\{(0, 1)\}) \\ &= \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 6), \dots, (n, n!), \dots\} \quad (13) \end{aligned}$$

である.

したがって,  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  は  $s(S_1) = \{(0, 1)\}$  と (13) で定義される断面  $s$  のみを含み,  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, S_2)$  はすべての自然数とその階乗の組の集合を表現する.

この図式を少し拡張して

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(1)} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C} \\ & & \downarrow \text{id} \\ \mathbb{N}_{(3)} & \xrightarrow{\pi_1^{-1}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(4)} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{N}_{(5)} \end{array}$$

とすると,  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, S_3, S_5)$  によって自然数の階乗を与える写像 (の冪写像) が表現される.

### 5.6.2 フィボナッチ数

次の図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を考える.

$$\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+_{(1)} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+_{(2)} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{N}^+_{(3)} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$$

ここで  $\mathbb{N}^+$  は正の自然数の集合,  $\varphi = \pi_2 \times \text{add}$ ,  $\text{add} : \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  は加法関数である. 従って  $\varphi((n, m)) = (m, n+m)$  が成り立つ.  $\mathcal{T} = \{S_1\}$  としてその断面  $t$  を  $t(S_1) = \{(1, 1)\}$  で定義する. すると, もし  $s \in \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | t)$  なら

$$s(S_2) = \{(1, 1)\} \cup \varphi(s(S_2))$$

が成り立つ. もし  $(n, m) \in s(S_2)$  が  $(1, 1)$  と異なれば,  $(n, m) \in \varphi(s(S_2))$  であり, 従って  $(m-n, n)$  が  $s(S_2)$  でなければならぬ. これもまた  $(1, 1)$  と異なれば  $(2n-m, m-n)$  が  $s(S_2)$  に含まれなければならない. これを繰り返していくと, 2成分の和は必ず減り,  $\mathbb{N}^+$  が正の数しか含まないことから, 最後には  $(1, 1)$  になることがわかる. したがって

$$s(S_2) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi(\{(1, 1)\}) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), \dots\}$$

であり  $s(S_3) = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ , すなわちフィボナッチ数の集合を与える.

### 5.6.3 マンデルブロ集合

次の図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}_{(1)} & \xrightarrow{\pi_{12}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}_{(2)} \xrightarrow{\text{cml} \circ \pi_1} \mathbb{C}_{(3)} \\ \uparrow \text{id} & & \uparrow \pi_2^{-1} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N}_{(4)} & & \mathbb{C}_{(5)} \end{array}$$

ここで  $\mathbb{C}$  は複素数全体の集合であり, 写像  $\varphi$  は

$$\varphi((c, z, k)) = (c, c + z^2, k + 1)$$

で定義されることとする。部分族  $\mathcal{T} = \{S_4, S_5\}$  の断面  $t$  を

$$t(S_4) = \{(c, 0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N} \mid c \in \mathbb{C}\},$$

$$t(S_5) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}$$

で定義する。  $s$  を  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} \mid t)$  に含まれる断面とすると、

$$\begin{aligned} s(S_1) &= \varphi(s(S_1)) \cup s(S_4) \\ &= \varphi(s(S_1)) \cup \{(c, 0, 0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N} \mid c \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

写像  $g: s(S_1) \rightarrow \mathbb{N}$  を  $g((c, z, k)) = k$  で定義すると、命題 1 より

$$\begin{aligned} s(S_1) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi(s(S_4)) \\ &= \{(c, z_n^c, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N} \mid c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

である。ただし  $z_n^c$  は  $z_0^c = 0$ ,  $z_{n+1}^c = (z_n^c)^2 + c$  で定義される。

従って、 $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} \mid t)$  は次で定義される断面  $s$  のみを含む。

$$\begin{aligned} s(S_1) &= \{(c, z_n^c, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N} \mid c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}, \\ s(S_2) &= \{(c, z_n^c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, |z_n^c| > 2\}, \\ s(S_3) &= \{c \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, |z_n^c| > 2\}, \\ s(S_4) &= \{(c, 0, 0) \mid c \in \mathbb{C}\}, \\ s(S_5) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2\}. \end{aligned}$$

マンデルブロ集合は  $z_n^c$  が  $n \rightarrow \infty$  のとき発散しない複素数  $c$  の集合と定義されるが、 $z_n^c$  はある  $n \in \mathbb{N}$  について  $|z_n^c| > 2$  のとき、またそのときに限り発散することが知られている。従って  $s(S_3)$  はマンデルブロ集合である。

## 6 情報計量

本節では、何らかの空間の部分集合として、つまり基底表現で与えられた一般対象の情報計量を定義する。その空間を特徴付ける構造写像の集合を与え、それに相対的に計量を定義する。大雑把に言って、与えられた部分集合を表現する最小の図式の大きさを情報量を計る。ただしその図式は与えられた構造写像の組み合わせで作られる写像のみを含むものに制限する。

### 6.1 写像から生成される図式

**定義 6.**  $\mathcal{M}$  を写像の集合とする。  $\mathcal{M}$  で生成される写像の集合  $\langle \mathcal{M} \rangle$  は次のように定義される。

- $\mathcal{M}$  に含まれる写像,  $\text{id}$ ,  $\omega$ , および射影  $\pi_i$  は  $\langle \mathcal{M} \rangle$  に含まれる。
- 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  が  $\langle \mathcal{M} \rangle$  に含まれれば、その合成  $g \circ f: X \rightarrow Z$  も  $\langle \mathcal{M} \rangle$  に含まれる。
- 写像  $f_i: X \rightarrow Y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が  $\langle \mathcal{M} \rangle$  に含まれれば、その積写像  $f_1 \times \dots \times f_n: X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$  も  $\langle \mathcal{M} \rangle$  に含まれる。

任意の集合  $X$  とその元  $x$  について定数写像  $x: \mathbf{1} \rightarrow X$  が定義され、この文脈で  $\mathcal{M}$  に含むことができることに注意されたい。  $\mathcal{M}$  が  $X$  の元  $x$  すべてについて  $x: \mathbf{1} \rightarrow X$  を含むとき、 $X \subset \mathcal{M}$  と書く。

**定義 7.**  $\mathcal{M}$  を写像の集合とする。  $\mathcal{M}$  で生成される写像の集合  $\langle \mathcal{M} \rangle$  に含まれる写像  $f$  の  $\mathcal{M}$  に相対的な大きさ  $|f|_{\mathcal{M}}$  は次のように定義される。

- $f$  が  $\mathcal{M}$  に含まれるか、 $\text{id}$ ,  $\omega$ , または射影  $\pi_i$  であるときは、 $|f|_{\mathcal{M}} = 1$ 。
- $f$  が  $\langle \mathcal{M} \rangle$  に含まれる写像の合成あるいは積で定義されるときは、 $|f|_{\mathcal{M}}$  は  $f$  を表す合成あるいは積の可能なすべての組み合わせについて、その成分写像の  $\mathcal{M}$  に相対的な大きさの和の最小値をとり、それに 1 を加えたものとする。つまり、 $f \in \langle \mathcal{M} \rangle$  が

i) 合成で与えられるなら、

$$|f|_{\mathcal{M}} = 1 + \min_{\substack{g, h \in \langle \mathcal{M} \rangle \\ f = g \circ h}} (|g|_{\mathcal{M}} + |h|_{\mathcal{M}}),$$

ii) 積で与えられるなら

$$|f|_{\mathcal{M}} = 1 + \min_{\substack{f_1, \dots, f_n \in \langle \mathcal{M} \rangle \\ f = f_1 \times \dots \times f_n}} (|f_1|_{\mathcal{M}} + \dots + |f_n|_{\mathcal{M}}).$$

**定義 8.**  $\mathcal{M}_S$  を写像の集合とする。図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  は  $\mathcal{M}$  の各写像が

- $\langle \mathcal{M}_S \rangle$  に含まれる写像  $f: X \rightarrow Y$  の冪写像  $f: 2^X \rightarrow 2^Y$  であるか、
- $\langle \mathcal{M}_S \rangle$  に含まれる写像  $f: X \rightarrow Y$  の逆写像  $f^{-1}: 2^Y \rightarrow 2^X$  である

とき、 $\mathcal{M}_S$  によって生成されるという。

**定義 9.**  $\mathcal{M}_S$  を写像の集合とし、 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  を  $\mathcal{M}_S$  によって生成される図式とする。  $\mathcal{M}$  の写像  $\varphi$  の  $\mathcal{M}_S$  に相対的な大きさ  $|\varphi|_{\mathcal{M}_S}$  は、 $\langle \mathcal{M}_S \rangle$  に含まれる  $\varphi = f$  または  $\varphi = f^{-1}$  である写像  $f$  の  $\mathcal{M}_S$  に相対的な大きさによって  $|\varphi|_{\mathcal{M}_S} = |f|_{\mathcal{M}_S}$  と定義される。

円を表現する図式 (4) は  $\mathcal{M}_S = \{\text{len}, \text{sub}\}$  で生成され、図式内の各写像は  $\mathcal{M}_S$  に相対的な大きさ 1 を持つ。直線を表現する図式 (6) は  $\{\text{sub}, \text{mult}\}$  によって生成される。

## 6.2 計量の定義

集合  $X$  の部分集合  $A \subset X$  に含まれる情報量を、固定した構造写像の集合  $\mathcal{M}_S$  に相対的に定義する。そのため、 $A$  を表現する組み合わせ  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, X)$  で図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  が  $\mathcal{M}_S$  により生成されるものをすべて考え、その中で図式中に現れる写像の大きさの和の最小値をとる。しかし、何らかの制限をしないと、それだけではまだ不十分である。なぜなら、任意の  $A \subset X$  と  $\mathcal{M}_S$  について、 $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{X\}$ ,  $\mathcal{M} = \emptyset$ , として  $t$  を  $t(X) = A$  で定義する自明な表現の存在のため、その最小値は常に 0 になるからである。

この問題に対処するため、部分断面で与えられる密なデータの情報量をシャノン情報量 [11] で測ってバランスをとる。

**定義 10.**  $X$  を集合、 $A$  をその部分集合、 $\mathcal{M}_S$  を写像の集合とする。また  $\mathcal{P}$  を確率空間の族、すなわち、可測集合  $Y$  とその上の確率測度  $P_Y$  の組の族とする。 $A$  を表現する組み合わせ  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \mathcal{T}, t, X)$  で、

- 図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  が  $\mathcal{M}_S$  により生成され、
- $\mathcal{T}$  の各集合が  $\mathcal{P}$  に含まれ、
- 各  $T \in \mathcal{T}$  について  $t(T)$  が可測である

ものをすべて考える。 $A$  の  $\mathcal{M}_S$  と  $\mathcal{P}$  に相対的な情報量  $I(A|\mathcal{M}_S, \mathcal{P})$  とはその中における次式の最小値である。

$$\sum_{\varphi \in \mathcal{M}} |\varphi|_{\mathcal{M}_S} - \sum_{T \in \mathcal{T}} \log_2 P_T(t(T))$$

この和が有限になるような図式および部分断面が存在しない場合は、 $I(A|\mathcal{M}_S, \mathcal{P}) = \infty$  とする。

$X$  自体が確率空間で  $X \in \mathcal{P}$  である場合を考える。すると、自明な表現によって次の上界が得られる。

$$I(A|\mathcal{M}_S, \mathcal{P}) \leq -\log_2 P_X(A).$$

一般に  $\mathcal{T}$  に含まれる集合はパラメータ空間と考えることができる。定義 10 は、データ中の規則性をアルゴリズム的に取り込む一方で、シャノン情報量のような対象の確率集団についての情報量の定義を可能にする。つまり、コルモゴロフ複雑性とシャノン情報量の間を内挿する。

しかし、本稿では以下、有限の情報を持つ個別の対象の情報量に集中する。そのため、これ以降は、 $\mathbf{1}$  上の確率測

度  $P_{\mathbf{1}}$  を  $P_{\mathbf{1}}(\emptyset) = 0, P_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}) = 1$  で定義して、 $I(A|\mathcal{M}_S, \mathcal{P})$  で  $\mathcal{P} = \{\mathbf{1}\}$  である特殊な場合のみを扱う。つまり、 $\mathcal{T} = \{\mathbf{1}\}$  を要求し、 $s_{\mathbf{1}}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  で定義される  $\mathcal{T}$  の断面  $s_{\mathbf{1}}$  のみを部分断面として使う。

**定義 11.** 情報計量  $I(A|\mathcal{M}_S, \mathcal{P})$  で  $\mathcal{P} = \{\mathbf{1}\}$  と固定したものを情報計量  $I(A|\mathcal{M}_S)$  とする。

例えば、円を表現する図式 (4) は次のように変更できる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1}_{(1)} & \xrightarrow{r} & \mathbb{R}_{(2)} & \xrightarrow{\text{len}^{-1}} & V_{(3)} \\ & & & & \downarrow \text{sub}^{-1} \\ \mathbf{1}_{(4)} & \xrightarrow{p} & X_{(5)} & \xrightarrow{\pi_2^{-1}} & X \times X_{(6)} \xrightarrow{\pi_1} X_{(7)} \end{array} \quad (14)$$

定数  $r \in \mathbb{R}$  と  $p \in X$  は定数写像  $r: \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{R}$  と  $p: \mathbf{1} \rightarrow X$  で置き換えることができる。このような場合には図式中の  $\mathbf{1}$  を省略することを思い出すと、直線を表現する図式 (6) は次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc} v & & & & \\ \downarrow & & & & \\ V_{(1)} & \xrightarrow{\pi_1^{-1}} & V \times \mathbb{R}_{(2)} & & \\ & & \downarrow \text{sub}^{-1} \circ \text{mult} & & \\ p & & & & \\ \downarrow & & & & \\ X_{(3)} & \xrightarrow{\pi_2^{-1}} & X \times X_{(4)} & \xrightarrow{\pi_1} & X_{(5)} \end{array} \quad (15)$$

この図式は  $\mathcal{M}_S = \{p, v, \text{sub}, \text{mult}\}$  により生成される。ただし、写像  $\text{sub}^{-1} \circ \text{mult}$  は本当は  $\langle \mathcal{M}_S \rangle$  に含まれない。しかし一般に、 $\varphi: \mathbf{2}^S \rightarrow \mathbf{2}^T$  と  $\psi: \mathbf{2}^T \rightarrow \mathbf{2}^U$  が  $\langle \mathcal{M}_S \rangle$  に含まれる場合、常に  $S \xrightarrow{\psi \circ \varphi} U$  を  $S \xrightarrow{\varphi} T \xrightarrow{\psi} U$  の略記法と考えることにする。

このように、図 1 や図 3 に示したような図形が有限の情報を持つように一般の情報量を定義することができる。円周  $C$  の情報量は上界  $I(C|\{r, p, \text{len}, \text{sub}\}) \leq 6$ 、直線  $L$  の情報量は上界  $I(L|\{p, v, \text{sub}, \text{mult}\}) \leq 7$  を持つことが、(14) および (15) からわかる。

構造写像として与える写像としては、その空間および関連する空間を特徴付けるものはすべて入れるべきである。ユークリッド空間の場合には、それには  $\text{len}, \text{sub}, \text{mult}$  およびすべての実数、ベクトル、ユークリッド空間上の点などの定数関数が含まれる。従って、ユークリッド空間の部分集合の情報量を計る場合に適当な構造写像は少なくとも

$$\mathcal{M}_E = \{\text{len}, \text{sub}, \text{mult}\} \cup X \cup V \cup \mathbb{R}$$

を含む。

上述の円および直線の情報量の上界はこれによっても変わらず、 $I(C|\mathcal{M}_E) \leq 6, I(L|\mathcal{M}_E) \leq 7$  である。

また、定数写像をすべて含んだことにより、任意の有限集合  $A \subset X$  について、その情報量は  $A$  に含まれる点の数を上界に持つこともわかる。なぜなら、有限個の点をそれぞれ与える定数写像を使えば表現できるからである。もちろん、その有限集合に規則性があればさらに少ない写像で表現できる可能性もある。

## 7 計算の表現

本節では、自然数を特徴付ける写像によって生成される図式によって、チューリング計算が可能であることを示す。図式によって直接チューリングマシンを構成することも可能 [6] だが、ここではより証明が簡単のため、任意の帰納的部分関数が図式によって表現できることを示す。

### 7.1 帰納的部分関数

まず、帰納的部分関数の標準的な定義を述べる [2]。記号  $f(x) = \uparrow$  は、部分関数  $f$  の値が  $x$  について定義されないことを意味する。また  $f(x) \neq \uparrow$  で部分関数  $f$  の値が  $x$  について定義されることを意味する。

**定義 12.** 部分関数  $f_1, \dots, f_l : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  と  $g : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$  から次式で定義される部分関数  $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  を作る操作を合成という。

$$h(n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} g(m_1, \dots, m_l) & m_i = f_i(n_1, \dots, n_k) \neq \uparrow, 1 \leq i \leq l \\ \uparrow & \text{それ以外のとき.} \end{cases} \quad (16)$$

**定義 13.** 部分関数  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  と  $g : \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$  から次式で定義される部分関数  $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$  を作る操作を原始帰納法という。

$$h(0, n_1, \dots, n_k) = f(n_1, \dots, n_k) \quad (17)$$

$$h(m+1, n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} g(p, m, n_1, \dots, n_k) & p = h(m, n_1, \dots, n_k) \neq \uparrow \\ \uparrow & \text{それ以外のとき.} \end{cases} \quad (18)$$

**定義 14.** 部分関数  $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$  から次式で定義される部分関数  $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  を作る操作を最小化という。

$$g(n_1, \dots, n_k) = \begin{cases} y & f(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \text{ かつ } \forall t < y \text{ について} \\ & f(x_1, \dots, x_n, t) \neq \uparrow, f(x_1, \dots, x_n, t) \neq 0 \\ \uparrow & \text{そのような } y \text{ が存在しないとき.} \end{cases} \quad (19)$$

**定義 15.** 基本関数とは、つぎのいずれかをいう。

- i) 射影関数  $\pi_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ,
- ii) 後継者関数  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\text{succ}(n) = n + 1$ ,
- iii) 零関数  $\text{zero} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\text{zero}(n) = 0$ .

**定義 16.** 帰納的部分関数とは、基本関数から出発して、合成、原始帰納法、最小化の操作を有限回適用することによって得られる部分関数のことである。

### 7.2 図式による帰納的部分関数の表現

自然数を特徴付ける関数の集合を  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}} = \{0, \text{succ}\}$  で定義する。ここで  $0 : \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{N}$  は  $0(0) = 0$  で定義される定数関数である。

**定義 17.** 部分関数  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  は、 $A \subset \mathbb{N}^k$  に対して

$$\varphi_f(A) = \{f(n_1, \dots, n_k) \mid (n_1, \dots, n_k) \in A, f(n_1, \dots, n_k) \neq \uparrow\}$$

で定義される冪写像  $\varphi_f : \mathbf{2}^{\mathbb{N}^k} \rightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  が定義 5 の意味で図式で表現されるとき、その図式によって表現されるという。

**定理 1.** 任意の帰納的部分関数は  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される有限な図式によって表現される。

技術的理由から、次で定義される意味で積と可換に表現可能であることを証明する。

**定義 18.** 部分関数  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  は、それが図式で表現され、しかも任意の写像  $r : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^l$  について

$$\varphi_{f \times r}(A) = \{(f(n_1, \dots, n_k), r(n_1, \dots, n_k)) \mid (n_1, \dots, n_k) \in A, f(n_1, \dots, n_k) \neq \uparrow\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}^l$$

で定義される冪写像  $\varphi_{f \times r} : \mathbf{2}^{\mathbb{N}^k} \rightarrow \mathbf{2}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}^l}$  も図式で表現されるとき、積と可換に図式で表現されるという。

**証明.** 任意の帰納的部分関数が  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される図式によって積と可換に表現されることを示す。射影  $\pi_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  は

$$\mathbb{N}^k \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{N}$$

で表現される。また任意の写像  $r : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^l$  に対して  $\varphi_{\pi_i \times r}$  は

$$\mathbb{N}^k \xrightarrow{\pi_i \times r} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^l$$

で表現される。同様に、後継者関数  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  も積と可換に図式で表現される。定数関数  $\text{zero} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  は

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\omega} \mathbf{1} \xrightarrow{0} \mathbb{N}$$



で表現される。また任意の写像  $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^l$  に対して  $\varphi_{\text{zero} \times r}$  は

$$\mathbb{N} \xrightarrow{(0 \circ \omega) \times r} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^l$$

で表現される。

あとは、合成、原始帰納法、最小化の操作に対応する図式の作り方を以下の各補題で示す。□

**補題 1 (合成).** 部分関数  $f_1, \dots, f_l : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  と  $g : \mathbb{N}^l \rightarrow \mathbb{N}$  が  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される図式によって積と可換に表現されるならば、(16) で定義されるそれらの合成  $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  も同様である。

証明. 仮定から、 $i = 1, \dots, l$  について写像  $\varphi_{f_i \times \text{id}} : \mathbb{2}^{\mathbb{N}^k} \rightarrow \mathbb{2}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}^k}$  は  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される図式によって表現される。  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N}^k_{(1)} & \xrightarrow{\varphi_{f_1 \times \text{id}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k_{(2_1)} & & \\ & \searrow \varphi_{f_j \times \text{id}} & \vdots & \searrow ((\pi_1 \circ \pi_1) \times \pi_2)^{-1} & \\ & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k_{(2_l)} & \xrightarrow{((\pi_1 \circ \pi_1) \times \pi_2)^{-1}} & \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^k_{(3)} \\ & & & & \downarrow \pi_1 \\ & & & & \mathbb{N}^l_{(4)} \\ & & & \xleftarrow{\varphi_g} & \mathbb{N}_{(5)} \end{array}$$

この図式の断面を  $s$  とすると、

$$\begin{aligned} s(S_2) &= \{(f_i(x), x) \mid x \in s(S_1); f_i(x) \neq \uparrow\}, \quad i = 1, \dots, l \\ s(S_3) &= \{((f_1(x), \dots, f_l(x)), x) \mid \\ &\quad x \in s(S_1); f_1(x) \neq \uparrow, \dots, f_l(x) \neq \uparrow\} \\ s(S_4) &= \{(f_1(x), \dots, f_l(x)) \mid \\ &\quad x \in s(S_1); f_1(x) \neq \uparrow, \dots, f_l(x) \neq \uparrow\} \\ s(S_5) &= \{g(f_1(x), \dots, f_l(x)) \mid x \in s(S_1); \\ &\quad f_1(x) \neq \uparrow, \dots, f_l(x) \neq \uparrow, g(f_1(x), \dots, f_l(x)) \neq \uparrow\}. \end{aligned}$$

従って、 $h$  はこの図式で表現される。

同様に、任意の写像  $r : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^m$  について、 $\varphi_{h \times r}$  は次の図式で表現される。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N}^k & \xrightarrow{\varphi_{f_1 \times (\text{id} \times r)}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m & & \\ & \searrow \varphi_{f_j \times (\text{id} \times r)} & \vdots & \searrow ((\pi_1 \circ \pi_1) \times \pi_{23})^{-1} & \\ & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m & \xrightarrow{((\pi_1 \circ \pi_1) \times \pi_{23})^{-1}} & \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m \\ & & & & \downarrow \pi_{13} \\ & & & & \mathbb{N}^l \times \mathbb{N}^m \\ & & & \xleftarrow{\varphi_{g \times \text{id}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}^m \end{array}$$

□

**補題 2 (原始帰納法).** 部分関数  $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  と  $g : \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$  が  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される図式によって積と可換に表現さ

れるならば、(17) と (18) で定義される原始帰納法によってそれらから得られる  $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$  も同様である。

証明. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k_{(1)} & \xrightarrow{\pi_{23}^{-1}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k_{(2)} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{N}_{(3)} \\ \downarrow \pi_2 & & \uparrow \text{id} \\ \mathbb{N}^k_{(4)} & \xrightarrow{\varphi_{f \times 0 \times \text{id}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k_{(5)} \end{array} \quad \varphi_{g \times (\text{succ} \circ \pi_2) \times \pi_3}$$

この図式の断面を  $s$  とすると、

$$\begin{aligned} s(S_4) &= \{x \mid (m, x) \in s(S_1)\} \\ s(S_5) &= \{(f(x), 0, x) \mid (m, x) \in s(S_1), f(x) \neq \uparrow\} \cup \\ &\quad \{(g(p, m, x), m+1, x) \mid (p, m, x) \in s(S_5), g(p, m, x) \neq \uparrow\} \\ &= \{(f(x), 0, x), (g(f(x), 0, x), 1, x), \\ &\quad (g(g(f(x), 0, x), 1, x), 2, x), \dots \mid (m, x) \in s(S_1)\} \\ &= \{(h(i, x), i, x) \mid i = 0, 1, \dots; (m, x) \in s(S_1)\} \\ s(S_2) &= \{(h(m, x), m, x) \mid (m, x) \in s(S_1); h(m, x) \neq \uparrow\} \\ s(S_3) &= \{h(m, x) \mid (m, x) \in s(S_1); h(m, x) \neq \uparrow\}. \end{aligned}$$

従って、 $h$  はこの図式で表現される。

同様に、任意の写像  $r : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^m$  について、 $\varphi_{h \times r}$  は次の図式で表現される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k & \xrightarrow{\pi_{23}^{-1}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^m \xrightarrow{\pi_{14}} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^m \\ \downarrow \pi_2 & \nearrow \pi_{34}^{-1} \circ (\text{id} \times r) & \uparrow \pi_{123}^{-1} \\ \mathbb{N}^k & \xrightarrow{\varphi_{f \times 0 \times \text{id}}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \end{array} \quad \varphi_{g \times (\text{succ} \circ \pi_2) \times \pi_3}$$

□

**補題 3 (最小化).** 部分関数  $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$  が  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される図式によって積と可換に表現されるならば、(19) で定義される最小化によって得られる  $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  も同様である。

証明. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} & & \text{succ} \\ & & \downarrow \text{succ} \circ 0 \\ \mathbb{N}^k_{(1)} & \xrightarrow{\text{id} \times 0} & \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} \xleftarrow{\pi_3^{-1}} \mathbb{N}_{(3)} \\ \downarrow \text{id} \times 0 & \nearrow \pi_1 \times (\text{succ} \circ \pi_2) & \uparrow \text{id} \\ \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}_{(4)} & \xrightarrow{\varphi_{\pi_1 \times \pi_2 \times f}} & \mathbb{N}^k \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(5)} \\ \downarrow \pi_{23} & & \downarrow \pi_2^{-1} \circ 0 \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(6)} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{N}_{(7)} \end{array}$$

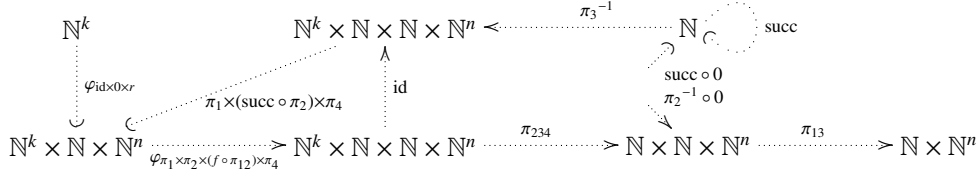


図 5: 最小化を表現する図式.

この図式の断面を  $s$  とすると,

$$\begin{aligned}
 s(S_3) &= \{t \in \mathbb{N} \mid t \neq 0\} \\
 s(S_2) &= \{(x, m, t) \mid (x, m, t) \in s(S_5), t \neq 0\} \\
 s(S_4) &= \{(x, 0) \mid x \in s(S_1)\} \cup \{(x, m+1) \mid (x, m, t) \in s(S_2)\} \\
 &= \{(x, 0) \mid x \in s(S_1)\} \cup \\
 &\quad \{(x, m+1) \mid (x, m, t) \in s(S_5), t \neq 0\} \\
 s(S_5) &= \{(x, m, f(x, m)) \mid (x, m) \in s(S_4); f(x, m) \neq \uparrow\} \\
 &= \{(x, 0, f(x, 0)) \mid x \in s(S_1); f(x, 0) \neq \uparrow\} \\
 &\quad \cup \{(x, m+1, f(x, m+1)) \mid \\
 &\quad \exists t \neq 0, (x, m, t) \in s(S_5); f(x, m+1) \neq \uparrow\} \\
 &= \{(x, m, f(x, m)) \mid x \in s(S_1); m \in \mathbb{N}, f(x, m) \neq \uparrow; \\
 &\quad f(x, t) \neq \uparrow, f(x, t) \neq 0, t = 0, \dots, m-1\} \\
 s(S_6) &= \{(m, f(x, m)) \mid x \in s(S_1), m \in \mathbb{N}, f(x, m) \neq \uparrow, \\
 &\quad f(x, m) = 0; f(x, t) \neq \uparrow, f(x, t) \neq 0, t = 0, \dots, m-1\} \\
 s(S_7) &= \{m \mid m \in \mathbb{N}, \exists x \in s(S_1), f(x, m) \neq \uparrow, f(x, m) = 0; \\
 &\quad f(x, t) \neq \uparrow, f(x, t) \neq 0, t = 0, \dots, m-1\}
 \end{aligned}$$

となり,  $h$  はこの図式で表現される.

同様に, 任意の写像  $r: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$  について,  $\varphi_{h \times r}$  は図 5 に示した図式で表現される.  $\square$

### 7.3 文字列と自然数

帰納的部分関数は  $\mathbb{N}$  に値をとる関数であるが, コルモゴロフ複雑性と前節で定義した情報計量を直接関係づけるために, 文字列の基底表現を定義する. 以下は  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$  の元の有限列であるバイナリ文字列の場合だけを扱う. バイナリ文字列  $\sigma \in \mathbf{2}^*$  を  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  の部分集合

$$\bar{\sigma} = \{(i, \sigma[i]) \mid i = 0, 1, \dots, |\sigma| - 1\} \cup \{(|\sigma|, 0), (|\sigma|, 1)\} \quad (20)$$

で表現することにする. ここで  $|\sigma|$  は  $\sigma$  の長さを,  $\sigma[i]$  はその  $i$  番目の文字を表す.

バイナリ文字列と自然数の間に以下のように一対一対応をつける.

$$\mathbf{2} \ni \sigma \leftrightarrow N_\sigma = \sum_{i=0}^{|\sigma|-1} 2^i \sigma[i] + 2^{|\sigma|} - 1 \quad (21)$$

つまり, 次のような対応になる ( $\epsilon$  は長さ 0 の文字列):

$$\begin{aligned}
 \epsilon &\leftrightarrow 0, & 0 &\leftrightarrow 1, & 1 &\leftrightarrow 2, & 00 &\leftrightarrow 3, \\
 10 &\leftrightarrow 4, & 01 &\leftrightarrow 5, & 11 &\leftrightarrow 6, & 000 &\leftrightarrow 7, \\
 100 &\leftrightarrow 8, & 010 &\leftrightarrow 9, & 110 &\leftrightarrow 10, & \dots &
 \end{aligned}$$

以下では (20) のように  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  の部分集合として表現されたバイナリ文字列とそれに (21) で対応する自然数を相互に変換するための図式を与える.

#### 7.3.1 文字列 $\rightarrow$ 自然数

まず次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(1)} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} & \xrightarrow{(0 \times \text{id})^{-1}} & \mathbb{N}_{(3)} \\
 & & \downarrow \pi_1 \times (\text{succ} \circ \pi_2) & & \\
 & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(4)} & & 
 \end{array} \quad (22)$$

$((\text{succ} \circ \pi_1) \times \pi_2)^{-1}$

断面  $s$  について

$$\begin{aligned}
 s(S_4) &= \{(n, m+1) \mid (n, m) \in s(S_2)\} \\
 s(S_2) &= \{(n, m) \mid (n+1, m) \in s(S_4)\} \cup s(S_1) \\
 &= \{(n, m) \mid (n+1, m-1) \in s(S_2)\} \cup s(S_1)
 \end{aligned}$$

より,  $(n, m) \in s(S_1)$  ならば  $(n, m), (n-1, m+1), (n-2, m+2), \dots, (0, m+n) \in s(S_2)$ . よって

$$\begin{aligned}
 s(S_3) &= \{s \mid (0, s) \in s(S_2)\} \\
 &= \{n+m \mid (n, m) \in s(S_1)\}
 \end{aligned}$$

となり, (22) は自然数の加法を表現することがわかる. 以下, この図式を  $\text{add}$  と書いて他の図式の一部に使う. 次に

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(1)} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} \\
 \downarrow (\text{succ} \times 0)^{-1} & & \downarrow (\text{succ} \times 1)^{-1} \\
 \mathbb{N}_{(3)} & \xrightarrow{\text{succ} \times 1} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(4)} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{N}_{(5)} \\
 & \downarrow \text{id} \times 0 & & & \downarrow ((\text{succ} \circ \pi_1) \times \pi_2)^{-1}
 \end{array} \quad (23)$$

は断面  $s$  について

$$s(S_3) = \{n \mid (n, 0), (n, 1) \in s(S_1)\}$$

$$s(S_4) = \{(i, 0) \mid i = 0, \dots, n-1; n \in s(S_3)\} \cup \\ \{(i, 1) \mid i = 0, \dots, n; n \in s(S_3)\} \\ s(S_2) = s(S_1) \cap s(S_4)$$

を与える。よって、(20) のようにバイナリ文字列  $\sigma$  を表現したものを  $s(S_1) = \bar{\sigma}$  とすると、

$$s(S_2) = \{(i, \sigma[i]) \mid i = 0, 1, \dots, |\sigma| - 1\} \cup \{(|\sigma|, 1)\}$$

となる。図式 (23) の  $S_1 \rightarrow S_2$  で表される冪写像を  $\varphi$  と書くことにする。次に

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(1)} & \xrightarrow{\pi_{121}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} & \xrightarrow{(\pi_{12} \times 0)^{-1}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(3)} \\ & & \downarrow \pi_1 \times (\text{add} \circ \pi_{22}) \times \pi_3 & & \downarrow (\pi_{12} \times (\text{succ} \circ \pi_3))^{-1} \\ & & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(4)} & & \end{array} \quad (24)$$

は断面  $s$  について

$$s(S_4) = \{(n, m, k) \mid (n, m, k+1) \in s(S_2)\} \\ s(S_2) = \{(n, 2m, k) \mid (n, m, k+1) \in s(S_2)\} \cup \\ \{(n, m, n) \mid (n, m) \in s(S_1)\} \\ s(S_3) = \{(n, 2^n m) \mid (n, m) \in s(S_1)\}$$

を与える。図式 (24) の  $S_1 \rightarrow S_3$  で表される冪写像を  $\psi$  と書くことにする。

最後に、図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(1)} & \xrightarrow{(\pi_1 \times 0)^{-1}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{N}_{(3)} \\ & \searrow (\pi_1 \times 1)^{-1} & & \searrow ((\text{succ} \circ \pi_1) \times (\text{succ} \circ \pi_2))^{-1} & (0, 0) \\ \downarrow \psi \circ \varphi & & & & \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(4)} & \xrightarrow{\pi_{12}^{-1}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(5)} & \xrightarrow{\text{succ} \times \text{add}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(6)} \\ & & & \searrow \pi_{13}^{-1} & \end{array} \quad (25)$$

を考える。

断面  $s$  について  $s(S_1) = \bar{\sigma}$  が (20) のようにバイナリ文字列  $\sigma$  を基底表現したものとすると、

$$k_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \sigma[i]$$

とおくと、

$$s(S_4) = \{(n, 2^n \sigma[n]) \mid n = 0, 1, \dots, |\sigma| - 1\} \cup \{(|\sigma|, 2^{|\sigma|})\} \\ s(S_5) = \{(n, m, k) \mid (n, m) \in s(S_4), (n, k) \in s(S_6)\} \\ s(S_6) = \{(n+1, m+k) \mid (n, m, k) \in s(S_5)\} \cup \{(0, 0)\} \\ = \{(n, k_n) \mid n = 0, \dots, |\sigma|\} \cup \{(|\sigma|+1, k_{|\sigma|} + 2^{|\sigma|})\} \\ s(S_2) = \{(n, m) \mid (n+1, m+1) \in s(S_6), (n, 0), (n, 1) \in s(S_{11})\}$$

$$= \{(|\sigma|, k_{|\sigma|} + 2^{|\sigma|} - 1)\}$$

$$s(S_4) = \{k_{|\sigma|} + 2^{|\sigma|} - 1\} = \{N_{\sigma}\}.$$

となり、図式 (25) はバイナリ文字列をそれに対応する自然数に変換する。

### 7.3.2 自然数 $\rightarrow$ 文字列

逆に、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N}_{(1)} & \xrightarrow{\text{succ} \times 0 \times 0} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)} & \xrightarrow{\pi_1 \times (\text{succ} \circ \pi_2) \times \pi_3} & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(3)} \\ & & \downarrow (\text{succ} \circ \pi_1) \times \pi_3 & & \downarrow ((\text{succ} \circ \pi_1) \times \pi_{23})^{-1} \\ & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(4)} & \xrightarrow{\pi_{23}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(5)} & \xrightarrow{\pi_1^{-1}} & \mathbb{N}_{(6)} \\ & & \downarrow ((\text{succ} \circ \pi_1) \times \pi_2)^{-1} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{succ} \\ & & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(7)} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(8)} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(9)} \\ & & \downarrow (0 \times \text{id})^{-1} & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \pi_{13} \\ & & \mathbb{N}_{(10)} & \xrightarrow{\pi_2 \times 1} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(11)} & \xrightarrow{\pi_2 \times 0} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(11)} \\ & & & & \downarrow (0 \times \text{id})^{-1} & & \downarrow \text{id} \times 0 \\ & & & & \mathbb{N}_{(10)} & \xrightarrow{\text{id} \times 0} & \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(11)} \end{array} \quad (26)$$

断面を  $s$  として  $s(S_1) = \{N\}$  とすると、

$$s(S_2) = \{(N+1, 0, 0)\} \cup \\ \{(n, m+1, k) \mid (n+1, m, k) \in s(S_2)\} \cup \\ \{(n, 0, k+1) \mid (n, k) \in s(S_5)\}$$

いま、 $(n, 0, k) \in s(S_2)$  として、第3成分が  $k$  であるところだけを見ると

$$(n, 0, k), (n-1, 1, k), \dots, (0, n, k) \in s(S_2)$$

である。もし  $n$  が偶数ならば  $(n/2, n/2, k) \in s(S_2)$  なので  $(n/2, k) \in s(S_9)$ 、奇数ならば  $((n-1)/2, (n+1)/2, k) \in s(S_2)$  より  $((n+1)/2, k) \in s(S_4)$ 、 $((n-1)/2, k) \in s(S_7)$  つまりどちらにしても  $(\lfloor n/2 \rfloor, k) \in s(S_8)$  となる。そして  $\lfloor n/2 \rfloor = 0$  でない限り  $(\lfloor n/2 \rfloor, k) \in s(S_5)$ 、 $(\lfloor n/2 \rfloor, 0, k+1) \in s(S_2)$  となる。 $n$  が偶数で  $(n/2, k) \in s(S_9)$  なら  $(k, 0) \in s(S_{11})$ 、奇数で  $((n-1)/2, k) \in s(S_7)$  なら  $(k, 1) \in s(S_{11})$  となる。このように、

$$x_0 = N+1,$$

$$x_k = \left\lfloor \frac{x_{k-1}}{2} \right\rfloor,$$

$$y_k = x_k - 2x_{k+1}$$

と定義すると

$$(0, y_0), (1, y_1), \dots, (M, y_M) \in s(S_{11})$$

となる。ここで  $M$  は  $N+1 < 2^{M+1}$  となる最小の自然数である。また  $n$  の偶奇によって  $s(S_7)$  か  $s(S_9)$  が  $(0, M)$  を含むから、 $M \in s(S_{10})$  よって  $(M, 0) \in s(S_{11})$ 。

特に (21) に従って  $N = N_\sigma$  なら  $M = |\sigma|$  で、

$$\begin{cases} x_k = \sum_{i=k}^{|\sigma|-1} 2^{i-k} \sigma[i] + 2^{|\sigma|-k}, & (k = 0, \dots, |\sigma|-1) \\ y_k = \sigma[k] \\ x_{|\sigma|+1} = 0 \\ y_{|\sigma|} = 1 \end{cases}$$

より

$$(0, \sigma[0]), \dots, (|\sigma|-1, \sigma[|\sigma|-1]), (|\sigma|, 1), (|\sigma|, 0) \in s(S_{11})$$

であり、 $\bar{\sigma} = s(S_{11})$  となり、図式 (26) は自然数をそれに対応するバイナリ文字列の規定表現に変換することがわかる。

## 7.4 コルモゴロフ複雑性との関係

チューリング計算可能な部分関数のクラスは、帰納的部分関数のクラスに一致することが知られているから、以上の結果より、任意のチューリングマシンを図式で表現できることがわかる。チューリングマシンはバイナリ文字列からバイナリ文字列への部分関数を定義する。以下、その部分関数をチューリングマシンと同じ文字で表す。

**定理 2.** バイナリアルファベットを持つ任意のチューリングマシン  $M$  について、 $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される有限の図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  と  $\mathcal{S}$  に属する集合  $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  および  $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  が存在して、 $M$  の定義するバイナリ文字列間の部分関数を、(20) で表現された文字列間の冪写像  $2^S \rightarrow 2^T$  として  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \{\mathbf{1}\}, s_1, S, T)$  が表現する。

証明. 前項の結果より、バイナリ文字列と自然数の間の一対一対応を与える双方向の写像を表現する、 $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される有限の図式が存在する。この対応によって  $M$  の定義するバイナリ文字列間の部分関数から得られる自然数から自然数への部分関数は帰納的部分関数だから、定理 1 より、それを表現する  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される有限の図式が存在する。□

これから、第 6 節で定義した情報計量が、 $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  に相対的に定義されたときコルモゴロフ複雑性と同値であることが次のようにわかる。

**定義 19.** 万能チューリングマシン  $U$  についてのバイナ

リ文字列  $\sigma$  のコルモゴロフ複雑性は次式で定義される。

$$K_U(\sigma) = \min_{p \in 2^*, U(p) = \sigma} |p|.$$

**定理 3.** バイナリアルファベットを持つ任意の万能チューリングマシン  $U$  について、定数  $c_U \in \mathbb{N}$  が存在し、任意のバイナリ文字列  $\sigma$  について次式を満たす。

$$I(\bar{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}}) \leq 6K_U(\sigma) + c_U.$$

証明. 定理 2 より、 $U$  をエミュレートする  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される有限の図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  が存在する。またコルモゴロフ複雑性の定義から、バイナリ文字列  $p$  で  $U(p) = \sigma$  および  $|p| = K_U(\sigma)$  を満たすものが存在する。 $\mathcal{S}$  に属する集合  $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  と  $T = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  が存在し、 $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | s_1)$  の任意の断面  $s$  について  $s(S) = \bar{p}$  なら  $s(T) = \bar{\sigma}$  を満たす。この図式に

$$\begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \mathbb{N}_{(A,0)} \xrightarrow{\text{succ}} \mathbb{N}_{(A,1)} \xrightarrow{\text{succ}} \cdots \xrightarrow{\text{succ}} \mathbb{N}_{(A,|p|)} \end{array}$$

をつけたし、 $i = 0, 1, \dots, |p|-1$  について  $S_{A,i}$  からの写像の行き先を  $S$  にする：

$$\mathbb{N}_{(A,i)} \xrightarrow{\text{id} \times p[i]} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

ここで  $\text{id} \times p[i] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  は  $p[i] = 0$  なら写像  $\text{id} \times 0$  を、また  $p[i] = 1$  なら写像  $\text{id} \times (\text{succ} \circ 0)$  を表す。最後に、 $S_{A,|p|}$  から  $S$  への写像

$$\mathbb{N}_{(A,|p|)} \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} \text{id} \times 0 \\ \text{id} \times 1 \end{array} \right\}} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

を付け足す。すると、こうしてできた図式の断面  $s$  は  $s(S) = \bar{p}$ 、したがって  $s(T) = \bar{\sigma}$  を満たす。

以上の図式の増設では、文字列  $p$  の 1 文字ごとに写像  $\text{succ}$  と  $\text{id} \times p[i]$  が付け加えられる。 $\text{succ}$  の大きさは 1、 $\text{id} \times (\text{succ} \circ 0)$  の大きさは 5 であるから、増設された図式の大きさは最大でも  $6|p| + \text{定数}$  である。文字列  $\sigma$  に依存する部分はここで増設された部分だけであるから、この図式の存在が定理の式を証明する。□

## 8 表現の計算

逆に、バイナリ文字列  $\sigma$  について、 $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される有限な図式が  $\bar{\sigma}$  を表現するならば、 $\sigma$  を書き出して停止するアルゴリズムが存在する。

$X$  をブール値変数、つまり  $\mathbf{2} = \{0, 1\}$  に値をとる変数の集合とする。通常の論理記号  $\wedge$  (AND) と  $\vee$  (OR) を、1 が真、0 が偽を表すものとして使う。 $X$  への真理値割当とは、 $X$  の各変数に 0 か 1 を与える写像  $f : X \rightarrow \mathbf{2}$  の

ことである。つまり  $X$  への真理値割当は  $2^X$  の元である。 $Y \subset X$  なら、 $X$  への真理値割当を  $Y$  に制限することによる自然な写像  $2^X \rightarrow 2^Y$  が存在する。ブール値変数の集合  $X$  上の論理条件  $\chi$  とは写像  $\chi: 2^X \rightarrow 2$  のことで、 $X$  への真理値割当  $f \in 2^X$  が  $\chi(f) = 1$  を満たすとき、 $f$  は  $\chi$  を満たすという。 $X$  上の論理条件の集合  $C$  について、 $X$  への真理値割当  $f$  が  $C$  に属するすべての論理条件を満たすとき、 $f$  は  $C$  を満たすという。

**定理 4.**  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  で生成される任意の有限な図式  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  で、 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \{\mathbf{1}\}, s_1, S)$  があるバイナリ文字列  $\sigma$  に対応する部分集合  $\bar{\sigma} \subset S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  を表現するものを入力とし、 $\sigma$  を出力して停止するアルゴリズムが存在する。従って、任意の万能チューリングマシン  $U$  について、定数  $d_U, e_U \in \mathbb{N}$  が存在して、任意のバイナリ文字列  $\sigma \in 2^*$  について

$$K_U(\sigma) \leq d_U I(\bar{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}}) + e_U$$

を満たす。

**証明.** 集合族  $\mathcal{S}$  に属する各集合  $T$  の各元  $t$  について、ブール値変数  $x_t$  を定義する。また、 $\mathcal{S}$  に属する各集合  $T$  と各写像  $\varphi \in \text{in}(T)$  と各元  $t \in T$  について、ブール値変数  $y_t^\varphi$  を定義する。これらの変数の集合を  $X$  とする。変数  $x_t$  は  $t$  が断面に含まれるかどうかを表し、 $y_t^\varphi$  は  $t$  が  $\varphi$  による断面の像に含まれるかどうかを表す。 $X$  上の論理条件の集合  $C$  を、 $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | s_1)$  内の断面と  $C$  を満たす  $X$  への真理値割当の間に一対一対応が成立するように定義する。そのため、 $C$  には以下のものを加える。

i) 各写像  $\varphi \in \mathcal{M}$  について:

a)  $\varphi$  が  $f: U \rightarrow T$  の冪写像  $f: 2^U \rightarrow 2^T$  ならば、 $C$  は各  $t \in T \setminus f(U)$  について論理条件  $y_t^\varphi = 0$  を、また各  $t \in f(U)$  について論理条件

$$y_t^\varphi = \bigwedge_{u \in f^{-1}(t)} x_u.$$

を含む。

b)  $\varphi$  が  $f: T \rightarrow U$  の逆写像  $f^{-1}: 2^U \rightarrow 2^T$  ならば、 $C$  は各  $t \in T$  について論理条件

$$y_t^\varphi = x_{f(t)}$$

を含む。

ii)  $\text{in}(T) \neq \emptyset$  を満たす  $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$  の各集合  $T$  と各元  $t \in T$  について、 $C$  は論理条件

$$x_t = \bigwedge_{\varphi \in \text{in}(T)} y_t^\varphi.$$

を含む。

iii)  $\text{in}(T) \neq \emptyset$  を満たす  $\mathcal{S}'$  の各集合  $T$  と各元  $t \in T$  について、 $C$  は論理条件

$$x_t = \bigvee_{\varphi \in \text{in}(T)} y_t^\varphi.$$

を含む。

iv)  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \{\mathbf{1}\}, s_1, S)$  に現れる  $\mathbf{1}$  の元  $0$  に対応する変数  $x_0$  について、 $C$  は論理条件  $x_0 = 1$  を含む。

以下の点に注意する:

- 各変数  $x \in X$  について、それを左辺に持つ論理条件を  $C$  は丁度一つ含む。これを特に  $\chi_x$  と書くことにする。
- $C$  に属する論理条件のうち論理積はすべて有限個の変数のそれになっている。
- $X$  に含まれる変数は可算個である。後の使用のため、 $X$  に含まれる変数と自然数の一対一対応  $v: X \rightarrow \mathbb{N}$  を固定する。

$X$  への真理値割当  $g$  について、集合族  $\mathcal{S}$  の断面  $s_g$  を、各  $T \in \mathcal{S}, t \in T$  について

$$g(x_t) = 1 \iff t \in s_g(T)$$

とすることで定義する。

すると、 $s_g$  は  $g$  が  $C$  を満たすとき、またそのときに限り  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | s_1)$  に含まれることが、以下のようにわかる。

まず、 $g$  が  $C$  を満たすと仮定する。もし  $T \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$  ならば  $g(x_t) = \bigwedge_{\varphi \in \text{in}(T)} g(y_t^\varphi)$  であり、従って

$$t \in s_g(T) \iff g(x_t) = 1 \iff \forall \varphi \in \text{in}(T), g(y_t^\varphi) = 1 \iff \forall \varphi \in \text{in}(T), t \in \varphi(s_g(\text{dm}(\varphi))) \iff t \in \bigcap_{\varphi \in \text{in}(T)} \varphi(s_g(\text{dm}(\varphi)))$$

であり、断面の条件 (1) を満たす。もし  $T \in \mathcal{S}'$  ならば  $g(x_t) = \bigvee_{\varphi \in \text{in}(T)} g(y_t^\varphi)$  であり、

$$t \in s_g(T) \iff g(x_t) = 1 \iff \exists \varphi \in \text{in}(T), g(y_t^\varphi) = 1 \iff \exists \varphi \in \text{in}(T), t \in \varphi(s_g(\text{dm}(\varphi))) \iff t \in \bigcup_{\varphi \in \text{in}(T)} \varphi(s_g(\text{dm}(\varphi)))$$

であり、断面の条件 (2) を満たす。以上と  $g(x_0) = 1$  より  $s_g \in \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | s_1)$  である。

逆に  $s_g \in \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} | s_1)$  のとき、上の同値関係を逆にたどれば  $g$  が  $C$  を満たすことがわかる。

自然数  $i \in \mathbb{N}$  について  $X$  の部分集合  $X_i$  を次で定義する。

$$X_0 = \{x_0\},$$

$$X_{i+1} = X_i \cup \{x \in X \mid x \text{ は } X_i \text{ によって強制される}\}.$$

ここで、変数  $x \in X$  が  $X$  の部分集合  $Y$  によって強制されるとは、 $\chi_x$  の右辺が論理和でその要素の少なくとも一つが  $Y$  に含まれるか、 $\chi_x$  の右辺が論理積でその要素のすべてが  $Y$  に含まれることを意味する。  $X$  への真理値割当  $g$  が  $C$  を満たすならば  $g(x_0) = 1$  であり、定義により  $X_i$  に含まれるすべての変数  $x$  について  $g(x) = 1$  である。

$X$  上の関数  $\tau$  を次のように定義する。

$$\tau(x) = \begin{cases} i & x \in X_i \setminus X_{i-1} \text{ のとき} \\ \infty & \text{そのような } i \text{ がいない場合} \end{cases}$$

すると、変数  $x \in X$  について  $\chi_x$  が  $x = \wedge y_j$  の形のときは、すべての  $y_j$  が  $\tau(y_j) < \tau(x)$  を満たし、少なくとも一つの  $y_j$  について  $\tau(x) = \tau(y_j) + 1$  である。また  $\chi_x$  が  $x = \vee y_j$  の形のときは、 $\tau(x) = \min_{y_j} \tau(y_j) + 1$  である。

次に、 $\tau$  を使って  $X$  への真理値割当  $h$  を次のように定義する。

$$h(x) = 1 \iff \tau(x) < \infty.$$

すると  $h$  は  $C$  を満たす。

これを示すために、論理条件  $\chi \in C$  が  $h$  に満たされないと仮定する。

- i) もし  $\chi$  が  $x = \wedge y_j$  の形ならば右辺の  $y_j$  は有限個であり、a)  $h(x) = 1$  かつある  $y_j$  について  $h(y_j) = 0$  であるか、または b)  $h(x) = 0$  かつすべての  $y_j$  について  $h(y_j) = 1$  である。しかし  $h$  の定義によってこれらはどちらも不可能である。実際、もしある  $y_j$  について  $h(y_j) = 0$  ならば  $\tau(y_j) = \infty$  であり、従って  $\tau(x) = \infty$  であるし、もしすべての  $y_j$  について  $\tau(y_j) < \infty$  ならば  $\tau(y_j)$  の最大値を  $k$  として  $y_j$  はすべて  $X_k$  に含まれるから、 $\tau(x) = k + 1$  である。
- ii) もし  $\chi$  が  $x = \vee y_j$  の形ならば a)  $h(x) = 1$  かつすべての  $y_j$  について  $h(y_j) = 0$  であるか、または b)  $h(x) = 0$  かつある  $y_j$  について  $h(y_j) = 1$  である。これらも不可能である。もしすべての  $y_j$  について  $h(y_j) = 0$  ならば  $\tau(y_j) = \infty$  より  $\tau(x) = \infty$  であるし、もしある  $y_j$  について  $h(y_j) = 1$  ならば  $\tau(y_j) < \infty$  より  $\tau(x) \leq \tau(y_j) + 1$  である。

$\tau(x) < \infty$  を満たす任意の  $x \in X$  について、 $X_{\tau(x)}$  の有限部分集合  $Y_x$  を次のように定義する。

$$x \in Y_x,$$

$$y \in Y_x, \chi_y = "y = \wedge y_j" \Rightarrow \forall y_j \in Y_x,$$

$$y \in Y_x, \chi_y = "y = \vee y_j" \Rightarrow \left( \arg \min_{\tau(y_j)+1=\tau(y)} \nu(y_j) \right) \in Y_x.$$

$C$  に現れる論理積は有限個の変数についてのものであるため、既に  $Y_x$  内にある変数  $y$  について、各ルールはたかだか有限個の変数  $y_j$  しか  $Y_x$  に加えない。また新しく加えられる  $y_j$  は  $\tau(y_j) < \tau(y)$  を満たす。これは  $\chi_y$  が  $y = \vee y_j$  の形のときは上のルールより、また  $y = \wedge y_j$  の形のときは  $\tau$  の定義の直後に書いたことからわかる。以上から、 $Y_x$  は有限個の変数しか含まない。

今、 $Y_x^i = Y_x \cap X_i$  と書いて  $y \in Y_x^i$  とする。  $\chi_y$  が  $y = \vee y_j$  の形のときは  $y_j$  のうち一つは  $Y_x^{i-1}$  に含まれる。また  $y = \wedge y_j$  の形のときは  $y_j$  のすべてが  $Y_x^{i-1}$  に含まれる。したがって、 $i = 1, \dots, \tau(x)$  について  $Y_x^i$  の各変数は  $Y_x^{i-1}$  によって強制される。

次のアルゴリズムを考える。

IsONE(x)

- 1 **for each** 拡大する有限な  $Z \subset X$ , s. t.  $x_0, x \in Z$
- 2  $Z_0 \leftarrow \{x_0\}$
- 3 **for**  $i = 1, 2, \dots$
- 4  $Z_i \leftarrow Z_{i-1}$
- 5 **for each**  $z \in Z$
- 6  $z$  が  $Z_{i-1}$  に強制されるなら  
 $z$  を  $Z_i$  に加える
- 7 **until**  $Z_i = Z_{i-1}$
- 8 **until** ある  $i$  について  $x \in Z_i$

1 行目においては、部分集合  $Z$  が拡大し、 $X$  の各変数がいつかは  $Z$  に含まれるようにすればよいが、具体的には  $Z = \{x_0, x\}$  からはじめて、以後  $k$  回目のループでは  $\nu^{-1}(k)$  を加えることにすればよい。

まず  $Z_i \subset X_i$  であるから、IsONE(x) が有限ステップで停止するならば  $x \in X_i$  であり  $\tau(x) < \infty$ 。

逆に  $\tau(x) < \infty$  とする。  $Y_x$  は有限だから、いつかは 2 行目の時点で  $Y_x \subset Z$  となる。そのとき、各  $i$  について  $Y_x^i$  の各変数は  $Y_x^{i-1}$  によって強制されることから  $Y_x^i \subset Z_i$  であり、従って  $x \in Z_{\tau(x)}$  より IsONE(x) は有限ステップで停止する。

さて、 $\bar{\sigma} \subset S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  が  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \{\mathbf{1}\}, s_1, S)$  で表現されるから、 $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M} \mid s_1)$  に属する任意の断面  $s$  は  $s(S) = \bar{\sigma}$  を満たす。真理値割当  $h$  は  $C$  を満たすから  $s_h(S) = \bar{\sigma}$  であり、 $s_h$  の定義から  $h$  は任意の  $t \in S$  について

$$h(x_t) = 1 \iff t \in \bar{\sigma}$$

を満たす。これは、 $(i, b) \in S$  について、 $(i, b) \in \bar{\sigma}$  であるとき、またそのときに限り  $\tau(x_{(i,b)}) < \infty$  であることを意



味する。

次のアルゴリズムを考える。

```
1 入力： $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \{\mathbf{1}\}, s_1, S)$  を符号化したもの
2  $\rho$  を文字列変数とし空列で初期化
3 for  $i = 0, 1, \dots$ 
4    $\text{IsONE}(x_i)$  を
     プロセス 0:  $t = (i, 0)$ 
     プロセス 1:  $t = (i, 1)$ 
     また  $i > 0$  のときは
     プロセス 2:  $t = (i - 1, 1 - \rho[i - 1])$ 
     について並列に実行
5 until プロセスのどれか一つが停止する
6 if  $i > 0$  でプロセス 2 が停止
7 then  $\rho[i - 1]$  をポップして  $\rho$  を返し停止
8 else if プロセス 0 が停止
9 then  $\rho[i] \leftarrow 0$ 
10 else if プロセス 1 が停止
11 then  $\rho[i] \leftarrow 1$ 
```

$i = 0, 1, \dots, |\sigma| - 1$  のとき、プロセス  $\sigma[i]$  は有限ステップで停止するが他のプロセスは停止しない。 $i = |\sigma|$  のときプロセス 0 かプロセス 1 のどちらかが先に停止する。 $i = |\sigma| + 1$  のとき、プロセス 2 だけが停止する。このように、アルゴリズムは常に停止し  $\sigma$  を返す。

最後に、 $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M})$  の大きさが  $I(\bar{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}})$  であるとする。任意の万能チューリングマシン  $U$  について、 $U$  でのアルゴリズムを実行すれば  $\sigma$  を出力する。データ  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{M}, \{\mathbf{1}\}, s_1, S)$  は長さがたかだか  $I(\bar{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}})$  の定数倍の文字列で符号化できるから、 $\sigma$  に依存しない定数  $d_U, e_U \in \mathbb{N}$  が存在して

$$K_U(\sigma) \leq d_U I(\bar{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}}) + e_U$$

を満たす。□

定理 3 と定理 4 から、 $I(\bar{\sigma} | \mathcal{M}_{\mathbb{N}})$  はコルモゴロフ複雑性  $K_U(\sigma)$  と同値であるといえる。

## 9 むすび

本稿では、パターン一般の自動発見を目指して、一般にパターンとは何かを考え、任意の空間内でその空間における規則性あるいは構造を規定する写像によって直接定義された、計算と情報量の概念について紹介した。特に、情報、計算、アルゴリズムといった概念が符号化されてからでないことと形式的に定義されないことからくる二つの問題点を、記号列への符号化を必ずしも伴わない情報の表現を使うことにより克服できることを示した。

第一の問題点は符号化の自然さの問題である。これは、対象を符号化してからそこにアルゴリズム的な規則性を探すと、規則性の基礎になる対象間の関係が符号化されていないために対象の構造を見つけられない場合や、逆に、符号化が変われば意味のなくなる、符号化から生じた偽の構造を見つけてしまう問題である。本稿で紹介した表現では、対象の持つ規則性の基礎となる構造を特徴付ける写像の組を指定し、それらによって直接計算を定義することにより、対象の空間にある構造を捉え、また符号化から生じる偽の規則性を避けることができる。

第二の問題点は、符号化により情報のボトルネックが生じ、抽象的なレベルでも記号列全体の集合より大きな集合が扱えない問題である。結果として有限の情報を持つ対象であっても、そのような大きな集合に埋め込まれている場合は、アルゴリズムによる圧縮が符号化後にしか定義されなければ定義することができないが、符号化することなく、対象を直接アルゴリズムによる表現によって圧縮することを可能にすることにより、これらの対象を定義できる。

本稿で紹介した表現は写像も表現できる。それは対象の空間の構造を表す写像（構造写像）の集合に相対的に定義されるが、その集合を自然数を特徴付ける写像の集合（0 を与える定数写像と、次の自然数を与える後継者写像）としたとき、それで表現される写像はチューリング計算に一致する。

またこの表現の大きさによって、一般の空間における情報量が構造写像に相対的に定義され、これも自然数を特徴付ける写像の集合について定義されるとき、コルモゴロフ複雑性と同値である。この情報量を使って、有限集合の場合はその要素数に比して小さい情報量を持つ場合、無限集合の場合は有限の情報量を持つ場合、パターンを持つといえるのではないかと思われる。

また本稿で定義した情報量は、データ中の規則性をアルゴリズム的に取り込む一方で、シャノン情報量のような対象の確率集団についての情報量の定義をも可能にし、その場合、確率的情報量とアルゴリズム情報量の間を内挿して最も小さくなる値を情報量として与えると考えられる。

ここで与えた表現は、チューリング計算を一般の空間にその構造だけを使って埋め込む方法と考えることができる。その定義が非常に少ない構成要素しか導入しないことから、ここで定義した表現と情報計量が一般の空間におけるチューリング計算とコルモゴロフ複雑性の一般化である、あるいは逆にチューリング計算とコルモゴロフ複雑性はここで定義した表現と情報計量を自然数に適用した特殊な場合であるという主張は、一定の説得力を

持つのではないかとと思われる。もちろんそれがどのような意味であるか、本質的に計算として拡張になっているかどうかについては、さらに精密な議論が必要である。

謝辞 本稿で紹介した研究は比較的長期にわたるが、その間にスズキ財団科学技術研究助成、中部電力基礎技術研究所研究助成、掘情報科学振興財団研究助成、稲盛財団研究助成、栢森情報科学振興財団研究助成、および科学研究費補助金萌芽研究 19650065 の補助を受けた。

## 参考文献

- [1] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, and S. Smale, *Complexity and Real Computation*, Springer Verlag, 1997.
- [2] G. S. Boolos, J. P. Burgess, and R. C. Jeffrey, *Computability and Logic*, Fifth Edition, Cambridge University Press, 2007.
- [3] P. Bürgisser, M. Clausen, and M. A. Shokrollahi, *Algebraic Complexity Theory*, Springer Verlag, 1997.
- [4] G. J. Chaitin, On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequences, *J. Assoc. Comput. Mach.*, vol. 13, pp. 547–569, 1966.
- [5] G. J. Chaitin, On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequences: Statistical Considerations, *J. Assoc. Comput. Mach.*, vol. 16, pp. 145–159, 1969.
- [6] H. Ishikawa, Representation and Measure of Structural Information, arXiv:0711.4508. November 2007.
- [7] A. N. Kolmogorov, Three Approaches to the Quantitative Definition of Information, *Problems of Information Transmission*, vol. 1, pp. 4–7, 1965.
- [8] M. Li and P. Vitányi, *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications (2nd ed.)*, Springer-Verlag, 1997.
- [9] J. Rissanen, Modeling by the shortest data description, *Automatica*, vol. 14, pp. 465–471, 1978.
- [10] J. Rissanen, *Information and Complexity in Statistical Modeling*, Springer, 2007.
- [11] C. E. Shannon. The mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.*, vol. 27, pp. 379–423, 623–656, 1948.
- [12] R. J. Solomonoff, A Preliminary Report on a General Theory of Inductive Inference, Report ZTB-135, Zator Co., Cambridge, MA, 1960.
- [13] R. J. Solomonoff, A Formal Theory of Inductive Inference, *Information and Control*, vol. 7, pp. 1–22, 224–254, 1964.
- [14] A. M. Turing, On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Ser. 2, Vol. 42, pp. 230–65, 1937.

Revised, June 2008.