有限群の表現，対称群の表現の基礎

本間 泰史 [*]

概 要

このノートでは有限群の表現論および対称群の表現論の基本的なことを論じる．

目 次

*理科大理工

はじめに

このノートで述べることは，

1. 有限群の表現．

2. 対称式．

3. 対称群の表現論．

4. 交代群の表現論．

5. Weyl 構成．

です．このノートを書いた動機は，いろいろな事情から「Fulton-Harris の表現論の本 [1] の理解しよう」と思ったことです．この本は最初に有限群，対称群の表現論がありまして，その後リー群やリー環の表現論に入ります（扱うの古典群）．コンパクト群の表現論を理解するには，まず有限群の表現から勉強したほうが理解しやすく，対称群という有限群の表現論を学べば，$U(n)$, $SU(n)$ の表現へと繋がります（よって $GL(n,\mathbb{C})$，$SL(n,\mathbb{C})$ の正則表現へも繋がる）．本当は，コンパクト群の表現を自由に扱えるようになることが目的で読み始めたのですが，このノートでは有限群，対称群の表現を扱います.（ノートの量が多くなってしまったので，$SU(n)$ の表現論は，またべつの機会で）．

このノートの読み方としては，そのまま，はじめから順に読むのがよいんでしょうが，有限群の表現論のみを勉強したいなら Section 3 を読む．対称式を勉強したいなら Section 2 と Section 5 を読む．対称群の表現論を勉強したいなら，すべて読む．という方法がよいかと思います．もとの本 [1] が演習問題ばかりなので，このノートは，話題がばらばらになって，まとまりがないです．逆に，演習問題をといたおかげで，このノートには具体例をたくさん書いてあります．その意味では，一般論と計算法のどちらの勉強にもなる．また，ほとんどに証明がついてますが，証明がついてないものは Littlewood-Ricahrdson rule などです（その証明は [2] を参照．このノートを読んだあとなら難しくないと思う）．

シューア多項式などの対称式は，いろんなところでお見かけする重要な話題で，幾何へもいろいろと応用が利く話題です．そんなわけで，一回はまじめに勉強しなくてはと前から思っていただけに，このノートを作るのは，よい機会でした．このノートがあれば，Macdonald の [2] の第一部はすらすら読めると思います．また Fulton-Harris の本 [1] の第一部の解説にもなっています．[1] は演習問題が多いので苦労するけど，表現論の具体的な計算のためにはよい本です．幾何，無限可積分系，数理物理をやる人には役立つ本だと思う．僕自身は幾何が専門と称しているので，間違いや勘違いはたくさんあることでしょう．数学的な間違いをみつけたら，ご一報を．

本間　泰史

1　対称群

ここでは対称群についての基礎を学ぶ.

1.1　定義

集合 X に対する置換群とは X から X への全単射（置換）写像の全体であり，写像の合成により群になるものである.

定義 1.1. $X = \{1, 2, \cdots, d\}$ に対する置換群を d **次対称群**とよび $\mathfrak{S}_d$ と書く. そして恒等写像である単位元を 1, id, e などと書く.

1. $i \neq j$ に対して $(i, j) \in \mathfrak{S}_d$ を i, j を入れ替えて，$\{1, \cdots, d\} \setminus \{i, j\}$ を動かさない置換とする．これを i と j の**互換**という（ここで $(i, j) = (j, i)$ に注意）.
2. $(i, i+1)$ のように．i, j が 1 だけ異なるものを**隣接互換**とよぶ.
3. 互いに異なる l 個の数 $i_1, \cdots, i_l$ に対して，$(i_1, i_2, \cdots, i_l) \in \mathfrak{S}_d$ を「i_1 を i_2 に，i_2 を i_3 に, $\cdots$, i_{l-1} を i_l に，i_l を i_1 に移し，$\{1, \cdots, d\} \setminus \{i_1, \cdots, i_l\}$ を動かさない置換」と定義して l **次の巡回置換**とよぶ.

例 1.1. 次にような $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ を考える.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

これは巡回置換 $(1, 5, 3)$ と互換 $(2, 6)$ の積である.

練習問題 1.2.

1. $|\mathfrak{S}_d| = d!$ である.
2. σ を l 次巡回置換とすると，$\sigma^l = 1$ である．特に $(i, j)^2 = 1$ である.
3. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & d \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_i & \cdots & k_j & \cdots & k_d \end{pmatrix}$$
   に対して，$\sigma \cdot (i, j)$ は
   $$\sigma \cdot (i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & d \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_j & \cdots & k_i & \cdots & k_d \end{pmatrix}$$
   となる.

1.2 生成元と関係式

群GとGのいくつかの元$g_1, \cdots, g_l$があって，Gの任意の元が$g_1, \cdots, g_l, g_1^{-1}, \cdots, g_l^{-1}$の積で表せるとき$\{g_1, g_2, \cdots, g_l\}$を$G$の**生成元**とよび，$G = \langle g_1, \cdots, g_l \rangle$などと書く．次の目的は，対称群$\mathfrak{S}_d$の生成元をもとめることである．

命題 1.3. 対称群$\mathfrak{S}_d$は隣接互換$(1,2)$, $(2,3)$, ⋯ ,$(d-1,d)$で生成される．簡単のため$s_i = (i, i+1)$とすれば，$\mathfrak{S}_d = \langle s_1, \cdots, s_{d-1} \rangle$である．またこれらの生成元は次の関係式を満たす．

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & i = 1, \cdots, d-1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & i = 1, \cdots, d-2 \\ s_i s_j = s_j s_i & |i-j| \geq 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

さらに，上の関係式で$\mathfrak{S}_d$のすべての関係式をかくことができる．つまり

$$\mathfrak{S}_d = \left\langle s_1, \cdots, s_{d-1} \,\middle|\, \begin{cases} s_i^2 = 1 & i = 1, \cdots, d-1 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & i = 1, \cdots, d-2 \\ s_i s_j = s_j s_i & |i-j| \geq 2 \end{cases} \right\rangle$$

Proof. まず，隣接互換が生成元となることを簡単な例で証明する．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$$

を考える．まず隣接互換をかけて二行目の4を最も後ろへ持って行く．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (1,2)(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} (2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (1,2)(2,3)(3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．次に二列目の3を3番目にもっていく操作を行う．以下同様．すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (1,2)(2,3)(3,4)(1,2)(2,3)(1,2) = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$\sigma = (1,2)^{-1}(2,3)^{-1}(1,2)^{-1}(3,4)^{-1}(2,3)^{-1}(1,2)^{-1} = (1,2)(2,3)(1,2)(3,4)(2,3)(1,2)$$

となり σ は隣接互換の積でかけたことになる．

生成元の関係式 (1.1) は直接証明すればよい．

つぎに $\mathfrak{S}_d$ が隣接互換を生成元とし，関係式 (1.1) で生成される群であることを証明する．

$$G_d := \langle s_1, \cdots, s_{d-1} \mid (1.1) \rangle$$

とする．$G_d \ni s_i \to (i, i+1) \in \mathfrak{S}_d$ という写像を定義すれば，s_i の関係式は $\mathfrak{S}_d$ 内の関係式と同じなので，これは準同形写像になる．さらに全射であることは隣接互換が生成元であることからしたがう．これが同型であることを証明するために次の補題を用いる．

補題 1.4. G_d の任意の元は

$$(s_2, s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積}) s_1 s_2 \cdots s_k, \quad (0 \le k \le d-1)$$

と書ける．

この補題を使って，帰納法により $G_d \cong \mathfrak{S}_d$ であることを証明する．仮定から $G_{d-1} \cong \mathfrak{S}_{d-1}$ である．よって $|G_{d-1}| = (d-1)!$ である．上の補題から G_d の位数は $|G_{d-1}| \times d = d!$ 以下であることがわかる．一方 $G_d \to \mathfrak{S}_d$ は全射準同形であるので，$|G_d| \ge d!$ である．よって $|G_d| = d!$ であり，$G_d \cong \mathfrak{S}_d$ が成立する． □

proof of lemma. 帰納法で証明する．$\{s_2, \cdots, s_{d-1}\}$ と関係式で生成される群を $G_{d-1} \subset G_d$ とする．仮定から G_{d-1} の元は

$$\sigma = (s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積}) s_2 s_3 \cdots s_k, \quad (0 \le k \le d-1)$$

と書ける．このとき $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ を使って，

$$\begin{aligned} &s_1((s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積}) s_2 s_3 \cdots s_k) s_1 = (s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積}) s_1 s_2 s_1 s_3 \cdots s_k \\ =&(s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積}) s_2 s_1 s_2 s_3 \cdots s_k = (s_2, s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積}) s_1 s_2 s_3 \cdots s_k \end{aligned}$$

となる．

さて G_d の元は $g_i \in G_{d-1}$ の元を使って，$g_1 s_1 g_2 s_1 g_3 s_1 \cdots$ という形でかけている．例えば，$g_1 s_1 g_2 s_1 g_3$ において，上の式を使って s_1 の数を減らすことができ，$g_1 s_1 g_2 s_1 g_3 = g_1 (g_2' s_1 g_2'') g_3 = g_1' s_1 g_2''$ と書ける．このようにして s_1 の数をへらすことができ，最終的に s_1 は一個残るか消えることになる．

s_1 が消える場合にはそれでよい．s_1 が一個残る場合には，ある $g, g' \in G_{d-1}$ が存在して $g s_1 g'$ と書ける．そこで g' を仮定を使って，書き換えれば，

$$g s_1 g' = g s_1 (s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積}) s_2 s_3 \cdots s_k = (g(s_3, \cdots, s_{d-1} \text{ の積})) s_1 s_2 s_3 \cdots s_k$$

となる．以上で補題が証明された． □

例 1.5. 生成元のとりかたは，もちろん一つではないが，上の生成元はもっとも標準的なとり方である．他の生成元のとり方としては，例えば，

$$\mathfrak{S}_d = \langle (1,2), (1,3), \cdots, (1,d) \rangle, \quad \mathfrak{S}_d = \langle (1,2), (1,2,\cdots,d) \rangle$$

などがある（二番目は，群 $\mathfrak{S}_d$ がたった二つの元から生成されることを意味する）．

Proof. 二番目を証明する．

$$\begin{aligned}(1,2,\cdots,d)(1,2) &= (1,2)(2,3)(3,4)\cdots(d-1,d)(1,2) = s_1 s_2 s_3 \cdots s_{d-1} s_1 \\ &= s_1 s_2 s_1 s_3 \cdots s_{d-1} = s_2 s_1 s_2 s_3 \cdots s_{d-1}\end{aligned}$$

よって $(1,2,\cdots,d)(1,2)(1,2,\cdots,d)^{-1} = s_2 = (2,3)$ である．また $s_1(s_1 \cdots s_{d-1}) = s_2 \cdots s_{d-1}$ である．そこで

$$\begin{aligned}(1,2)(1,\cdots,d)(2,3)\{(1,2)(1,\cdots,d)\}^{-1} &= (s_2 s_3 s_4 \cdots s_{d-1}) s_2 (s_{d-1} \cdots s_3 s_2) \\ &= s_3 s_2 s_3 s_4 \cdots s_{d-1} s_{d-1} \cdots s_3 s_2 = s_3\end{aligned}$$

以下同様にすれば，すべての隣接互換を $(1,2)$, $(1,2,\cdots,d)$, $(1,2,\cdots,d)^{-1}$ の積で書けることがわかる．

また一番目の $\{(1,2),(1,3),\cdots,(1,d)\}$ が生成元になることは，

$$(1,k)(1,k-1)\cdots(1,3)(1,2) = (1,2,\cdots k)$$

であるので，$(1,2), (1,2,\cdots,d) \in \langle (1,2),(1,3),\cdots,(1,d) \rangle$ となることからわかる．

□

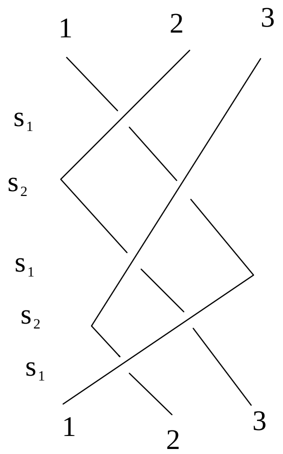
1.3 関係式とあみだくじ

隣接互換の関係式の意味をしらべよう．

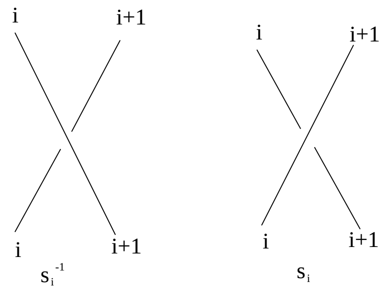
そのために次の $s_i^2 = 1$ という関係式だけ除いた群を考える．

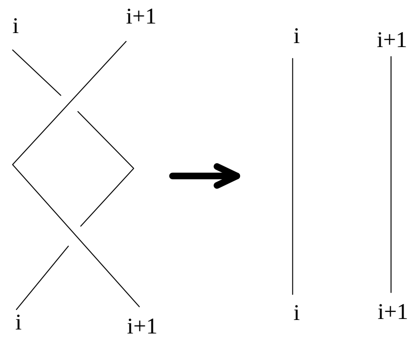
$$B_d = \left\langle s_1, \cdots, s_{d-1} \;\middle|\; \begin{cases} s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & i = 1, \cdots, d-2 \\ s_i s_j = s_j s_i & |i-j| \geq 2 \end{cases} \right\rangle.$$

これを**組紐群**とよぶ．（B_d は無限群であることに注意．たとえば $B_2 = \langle s_1 \rangle$ は $B_2 \ni s_1^k \mapsto k \in \mathbb{Z}$ により $\mathbb{Z}$ に同型である）．この幾何学的な意味を考えるよう．$\{1,\cdots,d\}$ からなる頂点を二組考えて，つぎのように捩れていてもよいが**上から下へ向かう組紐**で結ぶことにする（下は B_3 の元 $s_1 s_2 s_1 s_2 s_1$ を表している）．



このような組紐の形を B_d の元で表すのである．まず下右図に s_i を対応させる．ここで上下関係を入れていることに注意．このとき s_i^{-1} は下左図のようになる．実際，$s_i s_i^{-1}$ は絡んでいない紐になる（ほどける）ことがわかり，$s_i s_i^{-1} = 1$ となる（下左図）．



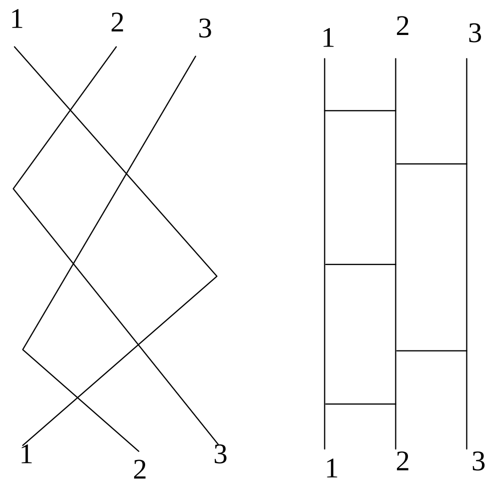


頂点 $\{1, \cdots, d\}$ と頂点 $\{1, \cdots, d\}$ を結ぶすべての組紐が $s_1, \cdots, s_{d-1}, s_1^{-1}, \cdots, s_{d-1}^{-1}$ の積で表せることは直感的に明らかであろう．そして上でのべた関係式をみたすことがわかる．このように組紐群 B_d はまさに組紐に対応しているのである．

練習問題 1.6. 他の関係式 $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ 及び $s_i s_j = s_j s_i$（$|i-j| \geq 2$）を絵を書いて確かめよ．

さて，組紐群の場合には $s_i^2 \neq 1$ となる．この組紐群に $s_i^2 = 1$ という関係式いれたものが $\mathfrak{S}_d$ である．これは組紐を紐の上下関係をなくしたものである（平面へ射影する）．実際 $s_i = s_i^{-1}$ であるので上下は関係ない．

例えば，最初にあげた組紐の上下関係をなくせば，下左図ようになる．これを，あみだくじで書いたものが下右図である．(あみだくじの各横棒が隣接互換である)．



そして，上の図は置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3)$$

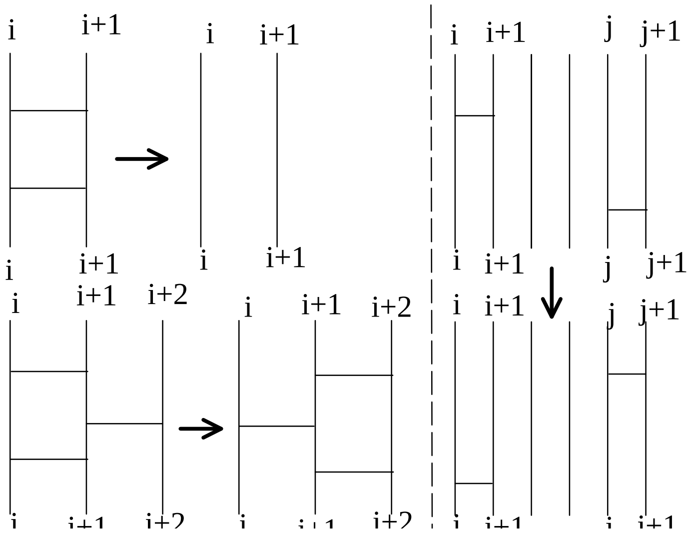
である．また上の図は σ が隣接互換の積で書けることも表している．実際

$$\sigma = (1,2)(2,3)(1,2)(2,3)(1,2)$$

である．一般の場合には

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

に対して，まず $1, \cdots, n$ を上の段と下の段にかき，上の段の k と下の段の i_k を各 k に対して結ぶ．さらに，その図（組紐で上下関係がないものである）をあみだくじの形に綺麗に書き直す．あみだくじの横棒を互換とみなして上から順にかけていけば σ を得ることができる．このように，**あみだくじで書くことにより，$\mathfrak{S}_d$ の任意の元が隣接互換の積で必ず書ける**ことの別証明を得ることができる．さらに $\{s_i\}_i$ の関係式は，あみだくじを次のように変換しても，$i, i+1, i+2$ などの行き先は変化しないことを意味する．



練習問題 1.7. あみだくじを使って，$(1,2,\cdots,d-1,d)=(1,2)(2,3)\cdots(d-1,d)$ であることを証明せよ．

また，ちょっと面倒だが $\sigma=s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ と $\sigma'=s_{j_1}\cdots s_{j_l}$ が同じ置換なら，上のあみだくじ上の変換をもちいて σ' を $s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ の形にすることが直感的に理解できる（これは $G_d\to\mathfrak{S}_d$ が単射であることを意味する．真面目な証明はすでに述べた）．

補足 1.8. わざわざ組紐群から考えたが，初めからあみだくじで考えてもかまわない．

1.4 共役類と分割数

次に $\mathfrak{S}_d$ の共役類について考える．

定義 1.2. 群 G 内で同値関係を定める．$g,g'\in G$ に対して $g\sim g'$ とは $g=xg'x^{-1}$ となる $x\in G$ が存在すること．これは同値関係であることがわかるので，同値類に分ける．この同値類のことを G の**共役類**とよぶ．

$\mathfrak{S}_d$ の共役類をもとめてよう．$\sigma\in\mathfrak{S}_d$ に対して，$X=\{1,\cdots,d\}$ での σ による軌道を求めてみる．$k\in X$ に対して X は有限集合なので $\sigma^l(k)=k$ となるような最小の自然数 l が必ず存在する．つまり k の軌道は $\{k,\sigma(k),\cdots,\sigma^{l-1}(k)\}$ である．このようにして X を軌道分解することができる．この軌道分解の意味するところは次のよう．

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 20 & 3 & 12 & 9 & 6 & 4 & 13 & 5 & 2 & 14 & 1 & 15 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

の軌道は

$$\{1,4,7,12\},\quad \{2,10\},\quad \{3\},\quad \{5,9\},\quad \{6\},\quad \{8,13,15\},\quad \{11,14\}$$

である．そこで

$$\sigma = (1,7,4,2)(8,13,15)(2,10)(5,9)(11,14)(3)(6)$$

と巡回置換の積でかける．ここで (3) などは 3 を 3 にうつし，他を動かさないことを表しているが，単に恒等写像のことである．このように便宜上，1 次巡回置換 (k)（= 恒等写像）も表しておく．また，上の巡回置換の積において互いに共通部分がないこともわかる．よって特に積の順序は関係ない．上のような表示を**サイクル表示**とよぶ．さらに巡回置換の長さは $4,3,2,2,2,1,1$ であるが，これを並べて $[4,3,2,2,2,1,1]$ と書き σ の**サイクルタイプ**とよぶ．または順番を逆にして $[1,1,2,2,2,3,4]$ と書くこともある．今の場合には 15 の分割 $15 = 4+3+2+2+2+1+1$ となっている．

さて，同じサイクルタイプの元で

$$\sigma_0 = (1,2,3,4)(5,6,7)(8,9)(10,11)(12,13)(14)(15)$$

なるものを考える．σ_0 を一行目に σ を二行目に書いた次の置換を考える

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 13 & 15 & 2 & 10 & 5 & 9 & 11 & 14 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

このとき，$\sigma = \tau\sigma_0\tau^{-1}$ となることがわかる．つまり $[\sigma_0] = [\sigma]$ と同じ共役類に属することがわかる．**このようにサイクルタイプにより共役類は分類できる．**

Proof. 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ に対して $\sigma(k_1,k_2,\cdots,k_l)\sigma^{-1} = (\sigma(k_1),\sigma(k_2),\cdots\sigma(k_l))$ であることが簡単にわかる．よって $\tau\sigma_0\tau^{-1} = \tau(1,2,3,4)\tau^{-1}\tau(5,6,7)\tau^{-1}\cdots\tau(15)\tau^{-1} = \sigma$ となる．同様に，サイクルタイプが異なれば，互いに共役でないことも明らか． □

さて，$\mathfrak{S}_d$ においてサイクルタイプが $[d]$ の共役類の代表元の個数は $(d-1)! = d!/d$ である．実際，$2,\cdots,d$ の数を適当に並べて $k_2,\cdots,k_d$ とすれば，$(1,k_2,\cdots,k_d)$ はサイクルタイプが $[d]$ であり，互いに異なる元となる．またサイクルタイプが $[d]$ の元はかならずこの形である．よって代表元の個数は $(d-1)!$ である．

一般の共役類を考える．k サイクルが i_k 個あるとする．つまり $d = \sum_{k=1}^{d} ki_k$ で，サイクルタイプを

$$[\underbrace{d,\cdots,d}_{i_d},\underbrace{d-1,\cdots,d-1}_{i_{d-1}},\cdots,\underbrace{k,\cdots,k}_{i_k},\cdots,\underbrace{1,\cdots,1}_{i_1}]$$

とする．このサイクルタイプの代表元の個数は

$$\frac{d!}{\{d^{i_d}i_d!\}\{(d-1)^{i_{d-1}}i_{d-1}!\}\cdots\{k^{i_k}i_k!\}\cdots\{1^{i_1}i_1!\}}$$

となる．

Proof. 具体例でのみ証明しておこう．サイクルタイプが $[4,3,2,2,2,2,1,1]$ であるとする．このサイクルタイプの元を得るには

$$(k_1,k_2,k_3,k_4)(k_5,k_6,k_7)(k_8,k_9)(k_{10},k_{11})(k_{12},k_{13})(k_{14})(k_{15})$$

と $\{1,\cdots,d\}$ までの数字を適当に入れていけばよい．その入れ方は $15!$ 個ある．しかし重複するものがある．まず 4 次巡回置換において (k_1,k_2,k_3,k_4) は (k_2,k_3,k_4,k_1) などと同じものが 4 つある．そこで 4 で割る必要がある．3 次巡回置換 (k_5,k_6,k_7) についても同様．次に 2 次巡回置換（互換）$(k_8,k_9)(k_{10},k_{11})(k_{12},k_{13})$ を見てみる．今，互換は 3 個あるので，上と同様の理由により 2^3 で割る必要がある．さらに $(k_8,k_9)(k_{10},k_{11})(k_{12},k_{13})=(k_{10},k_{11})(k_8,k_9)(k_{12},k_{13})$ なので，3 個の順列の数 $3!$ で割る必要もある．1 次巡回置換（恒等写像）についても同様である．よってサイクルタイプが $[4,3,2,2,2,1,1]$ の共役類の代表元の数は

$$\frac{15!}{(4^1 1!)(3^1 1!)(2^3 3!)(1^1 2!)}$$

となる． □

命題 1.9 (対称群の共役類). $\mathfrak{S}_d$ の共役類はサイクルタイプで決定できる．よって共役類の全体と d の分割は一対一に対応する．特に共役類の個数は d の分割数 $p(d)$（箱の数が d のヤング図形の数）に等しい．ここで d の分割数とは d の分割 $d=\lambda_1+\cdots+\lambda_d$（$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_d\geq 0$）の数である（ヤング図形との対応は後述）．さらに，サイクルタイプが

$$i=[\underbrace{d,\cdots,d}_{i_d},\underbrace{d-1,\cdots,d-1}_{i_{d-1}},\cdots,\underbrace{k,\cdots,k}_{i_k},\cdots,\underbrace{1,\cdots,1}_{i_1}]$$

の共役類を C_i とすれば，

$$|C_i|=\frac{d!}{\{d^{i_d}i_d!\}\{(d-1)^{i_{d-1}}i_{d-1}!\}\cdots\{k^{i_k}i_k!\}\cdots\{1^{i_1}i_1!\}}.$$

また $i\vdash d$ で i が d の分割であることを表せば，

$$d!=\sum_{i\vdash d}|C_i|$$

が成立する．

補足 1.10. かなり後の系 3.29 で $d!=\sum_{\lambda\vdash d}(\dim V_\lambda)^2$ なる式を証明する．ここで V_λ は λ に対応する $\mathfrak{S}_d$ の既約表現である．かなり似た式だが，d_λ^2 と $|C_\lambda|$ は一致するわけではない．

1.5 符号

対称群 $\mathfrak{S}_d$ の元は互換の積でかならずかけるのであった．そこで

定義 1.3 (符号). **偶数個の積でかけるものを偶置換，奇数個の積で書けるものを奇置換という．そして $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ に対して，その符号を**

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ が偶置換} \\ -1 & \sigma \text{ が奇置換} \end{cases}$$

として定義する．

これが well-defined であることを確かめよう．実際，互換の積への分解は一通りではないので，偶奇が変わらないことを確かめる必要がある．

Proof. $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_d \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ という群準同形を次で定義する．生成元 $s_i = (i, i+1)$ に対して $\epsilon_i = \operatorname{sgn}(s_i) = -1$ とする．ϵ_i は関係式 (1.1) を満たすことがわかるので，sgn は準同形として矛盾無く定義でき，$\mathfrak{S}_d$ 全体へ拡張できる．

さて互換は，s_i の奇数個の積でかならず書けることがわかる．実際あみだくじを使えば，

$$(i,j) = (i,i+1)\cdots(j-2,j-1)(j-1,j)(j-2,j-1)\cdots(i+1,i+2)(i,i+1)$$

となるので奇数個の積でかける．そこで $\operatorname{sgn}((i,j)) = -1$ である．よって準同形 $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_d \to \mathbb{Z}_2$ が well-defined なので (i,j) はどのように s_i の積で表示しても奇数個の積となる．同様に，一般の元を互換の積であらわしたとき偶数，奇数は変化しない．そして準同形 $\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_d \to \mathbb{Z}_2$ は先に与えた符号と一致する． □

補足 1.11. 符号は，**あみだくじ表示を行って，交点数を数えればよい**（交点は隣接互換であったので）．

例 1.12. l 次の巡回置換の符号は $(-1)^{l-1}$ である．

定義 1.4 (交代群). 偶置換全体（つまり ker sgn）は正規部分群となる．それを $\mathfrak{A}_d$ **と書き** d **次交代群**とよぶ．明らかに $\mathfrak{S}_d = \mathfrak{A}_d \cup (1,2)\mathfrak{A}_d$ であり，$|\mathfrak{A}_d| = d!/2$.

交代群の表現は Section 7 で扱う．

2　対称式 1（基本対称式）

ここでは，対称式に対する基本的な事柄を学ぶ．シューア多項式や完全対称式などについてのより深い話は Section 5 で述べる．

d 次対称群 $\mathfrak{S}_d$ を d 変数多項式環 $\mathbb{C}[x]=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_d]$ へ作用させる．まず座標 $(x_1,\cdots,x_d)$ に対して，$\sigma(x_1,\cdots,x_d)=(x_{\sigma^{-1}(1)},\cdots,x_{\sigma^{-1}(d)})$ とする．また x の関数 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_d)$ に対して，$(\sigma f)(x)=f(\sigma^{-1}x)$ として作用させれば，これは関数空間への対称群の作用になる．(作用や表現についてはSection 3 を見よ）．

そこで，$f(x)\in\mathbb{C}[x]$ に対して，

$$(\sigma f)(x_1,\cdots,x_d)=f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\cdots,x_{\sigma(d)})$$

と作用させることになる．また，

$$(\sigma fg)(x)=(\sigma f)(x)(\sigma g)(x)$$

であるので，作用は多項式空間の環構造も保つことに注意する．

定義 2.1 (対称式)**.** $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ が**対称式**または**対称多項式**とは，$\sigma f=f$ $(\forall\sigma\in\mathfrak{S}_d)$ となること．また対称式の全体（$\mathbb{C}[x]$ の部分環）を $S[x]=S[x_1,\cdots,x_d]$ と書く．

対称多項式の基本的な基底とし，基本対称式を導入する．

定義 2.2 (基本対称式)**.** 基本対称式 $\{e_0(x)=1,e_1(x),\cdots,e_d(x)\}$ を

$$\prod_{i=1}^{d}(t-x_i)=\sum_{k=0}^{d}(-1)^{d-k}e_{d-k}(x)t^k$$

により定義する（解と係数の関係を思いだそう）．または，

$$\prod_{i=1}^{d}(1+x_it)=\sum_{k=0}^{d}e_k(x)t^k$$

により定義する．

例えば．

$$\begin{aligned}
e_1(x)&=x_1+\cdots+x_d,\\
e_2(x)&=x_1x_2+x_2x_3+\cdots x_{d-1}x_d=\sum_{i<j}x_ix_j,\\
&\cdots\cdots\\
e_d(x)&=x_1\cdots x_d
\end{aligned}$$

となり，一般には，

$$e_r = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le d} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

となる．

この基本対称式が対称式の代数的な基底となることを証明したい．そこで，次の**軌道和対称式**を定義する．$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d) \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^d$ に対して，

$$M_\lambda(x) = \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sigma x^\lambda = \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sigma(x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d}) = \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{\sigma \in s_d} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \cdots x_{\sigma(d)}^{\lambda_d}$$

とする．ここで $1/c(\lambda)$ は，ある定数で，$x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d}$ の係数が 1 となるように調節している．そこで，

$$M_\lambda(x) = \sum_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

と定義してもよい．ここで和は $(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ のすべての異なる置換 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ でとっている

$\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_d \ge 0$ となる λ の全体を P_+ とすると，$\{M_\lambda \mid \lambda \in P_+\}$ は $S[x]$ のベクトル空間の基底になる．

Proof. f を対称式として，$f = \sum a_\nu x_1^{\nu_1} \cdots x_d^{\nu_d}$ とする．$(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_d)$ を辞書式順序で並べたて，最初の項を $a_\mu x_1^{\mu_1} \cdots x_d^{\mu_d}$ とする．このとき $\sum_\sigma \sigma(x^\mu)$ を考えるとこれは対称式である．これをさらに辞書式で並べれば，$\mu_1 \ge \cdots \mu_d \ge 0$ となる項が第一項であるので，これは $M_\mu(x)$ である．$f(x) - a_\mu M_\mu(x)$ は対称式である．この第一項は $a_{\mu'} x_1^{\mu'_1} \cdots x_d^{\mu'_d}$ を考えるとき，$\mu > \mu'$ である．よって，同じ議論を繰り返せば，$f(x)$ は $\{M_\lambda | \lambda \in P_+\}$ の線形結合でかける．また $\{M_\lambda | \lambda \in P_+\}$ が一次独立であることは，明らかであろう． □

定理 2.1 (対称式の基本定理)．基本対称式は $S[x]$ の代数的に独立な基底である．つまり

1. 対称式は基本対称式の多項式でかける．
2. 基本対称式の間には多項式関係は存在しない．

別の言い方をすれば，

$$\mathbb{C}[y_1, \cdots, y_d] \ni f(y_1, \cdots, y_d) \mapsto f(e_1(x), \cdots, e_d(x)) \in S[x]$$

は環同型となる．

補足 2.2. 実は整数係数の多項式に対しても，同様の事実が成立する．

Proof. 軌道和対称式の λ に辞書式順序をいれておく．$\lambda \in P_+$ に対して，

$$\mu_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}\,(1 \le i \le d-1), \quad \mu_d = \lambda_d$$

とする．つまり，

$$x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_d^{\lambda_d} = x_1^{\mu_1}(x_1x_2)^{\mu_2} \cdots (x_1 \cdots x_d)^{\mu_d}$$

とする．このとき

$$M_\lambda(x) - e_1(x)^{\mu_1} e_2(x)^{\mu_2} \cdots e_d(x)^{\mu_d}$$

とすれば，これは対称式であるが，x^λ という項は含まない．また λ より小さい軌道和対称式の線形和でかける．よって同じ議論を繰り返せば，軌道和対称式が基本対称式の多項式でかけることがわかる．軌道和対称式は対称式の基底であったので，任意の対称式は基本対称式の多項式でかける．

次に代数的に独立であることを証明しよう．d についての帰納法で照明する．$f(e_1(x), \cdots, e_d(x)) = 0$ であると仮定する．$x_d = 0$ とすれば，$e_d(x) = 0$ であり，$e_i(x_1, \cdots, x_{d-1}, 0)$ は $d-1$ 次変数の基本対称式になる．実際，$\prod(1+x_it) = \sum e_k(x)t^k$ で $x_d = 0$ とすればよい．

そこで

$$f(e_1(x_1, \cdots, x_{d-1}, 0), \cdots, e_{d-1}(x_1, \cdots, x_{d-1}, 0), 0) = 0$$

となるが，帰納法の仮定から，$d-1$ 変数の基本対称式が代数的に独立であることから $f(y_1, \cdots, y_{d-1}, 0) = 0$ となる．よって f は y_d を因子としてもつので $f(y) = y_d f'(y)$ となる．そこで，

$$0 = f(e_1, \cdots, e_d) = e_d f'(e_1, \cdots, e_d)$$

となり，$f'(e_1, \cdots, e_d) = 0$ を得る．f' の次数は f の次数より下がっているので，次数に関する帰納法から $f = 0$ であることがわかる． $\square$

さて，**冪和対称式** p_k を $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して，

$$p_k = x_1^k + \cdots + x_d^k$$

とする．（$p_0 = d$）．このとき次の関係式が成立する．

命題 2.3 (Newton の公式)**.** 基本対称式と冪和対称式は次をみたす．

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j p_{k-j} e_j = p_k - e_1 p_{k-1} + \cdots + (-1)^k e_k p_0 = (-1)^k (d-k) e_k \quad 1 \le k \le d$$

$$\sum_{j=0}^{d} (-1)^j p_{k-j} e_j = p_k - e_1 p_{k-1} + \cdots + (-1)^d e_d p_{k-d} = 0 \quad d \le k$$

さらに，この漸化式から，$\{p_1, \cdots, p_d\}$ が $S[x]$ の代数的に独立な基底であることがわかる．

Proof. （より簡単な証明を subsection 5.2 において行う）．$k=d$ の場合にまず証明する．X を対角行列 $\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_d)$ とする．このとき $\mathrm{tr}\,X^k=p_k(x)$ である．また

$$0=\prod(X-x_i)=\sum(-1)^jX^{d-j}e_j(x)$$

となる．この両辺でトレースをとれば，

$$0=\sum_{j=0}^{d}(-1)^jp_{k-j}e_j=0$$

を得る．また $k>d$ の場合も上の式に X^l をかけてトレースをとればよい．

次に，$1\le k<d$ の場合を証明する．左辺は k 次対称式なので，

$$\alpha e_k(x)+(e_i(x)\ (1\le i\le k-1)\ \text{の多項式})$$

と書けるはずである．$\sum_{j=0}^{k}(-1)^jp_{k-j}e_j$ において，$x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots x_d=0$ とすれば，先ほどの場合を使える．ただし $p_0=d$ であるので，$\sum_{j=0}^{k}(-1)^jp_{k-j}e_j|_{x_{k+1}=\cdots=x_d=0}=(-1)^k(d-k)e_k(x)$ をえる．一方，

$$\alpha e_k(x)+(e_i(x)\ (1\le i\le k-1)\ \text{の多項式})$$

において $x_{k+1}=\cdots=x_d=0$ としても，形はかわらない．よって $\alpha=(-1)^k(d-k)$ であり，残りの部分は零でなくてはならない（ここで $\{e_1,\cdots,e_k\}$ が代数的に独立であることを用いた）．以上で証明できた．

さて，$\{p_1,\cdots,p_d\}$ が $S[x]$ を代数的に張ることは明らかである．実際，$\{e_1,\cdots,e_d\}$ は $\{p_1,\cdots,p_d\}$ を使って書ける．そこで代数的に独立であることを証明する．ニュートンの公式から

$$p_k(x)=(-1)^{k+1}ke_k+(e_i(x)\ (1\le i\le k-1)\ \text{の多項式}),\quad (1\le k\le d)$$

となることがわかる．そこで $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$ に対して，$\lambda_d,\lambda_{d-1},\cdots$ の順に比較していく辞書式順序を入れたとき，

$$P^\lambda(x)=p_1^{\lambda_1}(x)\cdots p_d^{\lambda_d}(x)=\alpha e_1^{\lambda_1}\cdots e_d^{\lambda_d}+\text{辞書式で低い項}$$

となる．よって，もし $\{p_1,\cdots,p_d\}$ が代数的に独立でないと仮定すれば，

$$\sum c_\lambda P^\lambda(x)=0$$

となる．$\{e_1,\cdots,e_d\}$ が代数的に独立であることから，もっとも順序が高い λ について $c_\lambda=0$ がわかる．以下同様にして，すべての λ に対して $c_\lambda=0$ を得る．以上で $\{p_1,\cdots,p_d\}$ も代数的に独立であることが証明できた． □

次に交代式について述べよう．

定義 2.3 (交代式). 多項式 f で $(\sigma f) = \operatorname{sgn}(\sigma)f$（$\forall\sigma \in \mathfrak{S}_d$）となる多項式を**交代式**とよぶ.

定義から

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_d) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i \cdots, x_n)$$

であるので

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, \underbrace{x_i}_{j}, \cdots, x_n) = 0$$

である．つまり $(x_i - x_j)$ を因子としてもつ．よって**差積** $\Delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ を因子にもち，$f(x) = \Delta(x)g(x)$ と分解できる．ここで $g(x)$ は対称式である．逆に対称式 $g(x)$ に差積をかければ交代式になることがわかる，つまり，

$$\text{交代式の全体} = \text{対称式の全体} \times \Delta.$$

最後に対称式の次元について述べておこう．多項式環のように，次数によって有限次元の空間に分かれる空間をを次数付きベクトル空間とよぶ．$V = \oplus_{k=0}^{\infty} V_k$. このようなベクトル空間に対する**ポアンカレ級数**とは，

$$P_V(t) = \sum_k (\dim V_k) t^k$$

のことである．また

$$W = \oplus W_k, \quad W_k = \sum_{j=0}^{k} U_j \otimes V_{k-j}$$

なら，$P_W(t) = P_U(t)P_V(t)$ が成立することは明らかである．

例 2.4. $x = x_1$ の場合に $\mathbb{C}[x]$ に対するポアンカレ級数は

$$P(t) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots$$

である．

例 2.5 (多項式空間のポアンカレ級数). 次数付き空間としては $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_d] \cong \mathbb{C}[x_1]^d$ であるので，$V = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_d]$ に対しては，

$$P_V(t) = (\frac{1}{1-t})^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d+k-1}{k} t^k$$

となる．

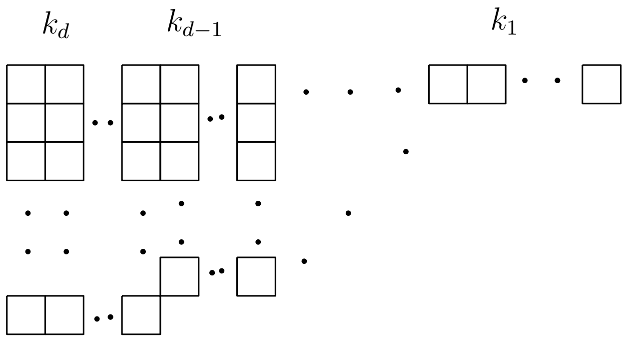
例 2.6 (対称式空間のポアンカレ級数). $S[x]=\mathbb{C}[e_1,\cdots,e_d]$ であり，$\deg(e_l)=l$ であるので，

$$P_S(t)=\prod_{l=0}^{d}\frac{1}{1-t^l}$$

である．t^s の項の係数を考える．$(1+t+t^2+\cdots)$ の項から t^{k_1} を，$1+t^2+t^4+\cdots$ の項から t^{2k_2} をとっていき，$t^s=t^{k_1}\cdots t^{dk_d}$ となったとする．これを s の分割で

$$\underbrace{d+\cdots+d}_{k_d}+\cdots+\underbrace{1+\cdots+1}_{k_1}=\lambda_1+\cdots+\lambda_d$$

というものに対応させる．ヤング図形に対応させれば，次のような s の分割に対するヤング図形 λ であり，行の長さ $l(\lambda)$ が d 以下のものである．



つまり，t^s の係数である．よって

命題 2.7. d 変数 s 次対称式の次元は行の長さが d 以下，箱の数が s ののヤング図形の数に一致する．

3　有限群の表現論

3.1　定義

G を有限群とする．つまり G は群で元の数 $|G|$ が $|G| < \infty$ となるものである．

定義 3.1 (表現). G の有限次元複素ベクトル空間 V への**表現**とは，準同形 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ のことである．**この V を G 加群とよぶ**こともある．また表現のことを G が V へ**作用**しているということもある．

また，簡単のため $\rho(g)v$ を gv と書くこともある．

練習問題 3.1. V, W を G 加群とする．

1. V, W を G 加群として $\phi : V \to W$ を G **線形写像**とする．G 線形写像とは任意の $g \in G$ に対して $\phi(gv) = g\phi(v)$ となるもの．このとき $\ker\phi$, $\mathrm{im}\phi$, $\mathrm{coker}\,\phi$ はどれも G 加群である．

2. また $V \oplus W$, $V \otimes W$，$\Lambda^k(V)$, $S^k(V)$ なども G 加群である．ここで $\Lambda^k(V)$ は V の交代テンソル積．$S^k(V)$ は対称テンソル積．

3. また $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ に対して $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V^*)$ を次で定義する．

$$\langle \rho^*(g)(v^*), \rho(g)u \rangle = \langle v^*, u \rangle, \quad \forall u \in V, \forall v^* \in V^*$$

この定義により ρ^* は G の表現になる．つまり

$$\rho^*(g) = {}^t\rho(g^{-1}) : V^* \to V^*$$

である．この表現を**双対表現**とよぶ．

4. また，$\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ も G 加群となる．つまり $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して $(g\phi)(v) = g\phi(g^{-1}v)$（$\forall v \in V$）とすればよい．

定義 3.2. **V と W の間の G 線形写像全体は線形空間であり $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ と書く．そして $\mathrm{Hom}(V, W)^G$ と一致する**（$\mathrm{Hom}(V, W)$ への G の作用で不変な元全体）．

Proof. $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ への作用は $(g\phi)(v) = g\phi(g^{-1}v)$ であった．よって ϕ が不変な元なら $\phi(gv) = g\phi(v)$ が任意の $g \in G$ に対して成立することを意味する．これはまさに G 線形写像である． □

定義 3.3 (同値な表現). V, W を G 加群として，G 線形な同型写像 $\Phi : V \to W$ が存在したとする．このとき V と W は G 加群として**同値**であるという．また Φ を **intertwining 作用素（絡み作用素）**という．

補足 3.2. 我々は G 加群で同値なものを面倒なので区別しないことにする．本来なら，それなりに区別すべきである．例えば V, W が G 加群として同値であっても，V, W には異なった付加的な構造が入るかもしれないし，幾何的，代数的に異なった意味がつけられるかもしれない．その意味でも Φ を具体的に構成することは意味がある．つまり全く別の方法で構成した表現 V, W が同値であることを見るには，絡み作用素を作る必要がある．

さて，以下で基本的な表現の例を紹介する．

例 3.3. 一次元ベクトル空間 $\mathbb{C}$ を考えて，$\rho(g) = \mathrm{id}$ とすれば，表現になる．これを**自明表現**と呼ぶ.

例 3.4. X を有限集合として，G が左から作用しているとする．つまり，ある準同形 $G \to Aut(X)$ が存在しているとする．ここで $Aut(X)$ は X から X への全単射写像の全体．このとき $\{x| \in x \in X\}$ を基底として有限次元ベクトル空間 V を考えて，

$$g(\sum_{x\in X} a_x x) = \sum a_x gx, \quad a_x \in \mathbb{C}$$

とすれば表現になる．これを**置換表現**とよぶ.

例 3.5. G の G 自身の左作用を考えると $G \to Aut(G)$ を得る．そして，置換表現を得ることができる．つまり，

$$g(\sum a_h h) = \sum a_h(gh), \quad a_h \in \mathbb{C}$$

である．これを**左正則表現**とよび R_G と書く（表現空間も R_G と書くことが多い．群環をベクトル空間とみなしたものである）．特に，**R_G は G 上の複素値関数全体の空間 $\mathbb{C}(G)$ と同一視できる**（つまり G 加群として同値）．ここで関数への G の作用は $(g\alpha)(h) = \alpha(g^{-1}h)$ である.

Proof. G は有限群なので関数全体に位相をいれたりする必要はない（G の表現も連続とかいう必要ない）．R_G が G 上関数全体と一致することを確かめよう．f を G 上の関数とすれば，各 $h \in G$ の値 $f(h)$ で f は決定される．そこで任意の $h \in G$ に対して

$$e_h(h') = \begin{cases} 1 & h = h' \\ 0 & h \neq h' \end{cases}$$

となる関数をつくれば，上の f は

$$f = \sum f(h)e_h$$

と書ける．よって $f = \sum f(h)e_h \to \sum f(h)h$ と対応させれば，R_G は G 上関数全体とみなせる．また作用は

$$g(\sum f(h)h) = \sum f(h)gh = \sum f(g^{-1}h)h \mapsto gf = \sum f(g^{-1}h)e_h$$

であるので，$(gf)(h) := f(g^{-1}h)$ となる. □

補足 3.6. $L(g)(\sum a_h h) = \sum a_h h g^{-1}$ とすれば，右正則表現が定義できる．

$$\Phi : \sum a_h h \mapsto \sum a_h h^{-1}$$

という線形写像を考える．これは全単射である．また

$$\Phi(R(g)(\sum a_h h)) = \Phi(\sum a_h gh) = \sum a_h (gh)^{-1} = \sum a_h h^{-1} g^{-1} = L(g)(\Phi(\sum a_h h))$$

とであるので，左正則表現と右正則表現は同値である．

3.2 完全可約性

有限群 G の表現が完全可約であることを見ていこう．

命題 3.7. G 加群 V の部分 G 加群 W を考える．このとき W の補空間 W' で G 不変空間となるものが存在（$V = W \oplus W'$）．G 不変とは $GW' \subset W'$ となること．

Proof. V に勝手なエルミート内積 H_0 を入れておく，さらにそれを「積分」して，G 不変内積をつくる．つまり

$$H(v,w) = \sum_{g \in G} H_0(gv, gw)$$

このとき W の H に関する直交補空間 W' は G 不変であることが確かめられる． □

上の証明から有限群 G の表現は**ユニタリ表現**にできることがわかる．ユニタリ表現とは表現空間 V に $(gv, gw) = (v, w)$ となるエルミート内積が入ること．このとき $\rho : G \to U(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ という準同形を得ることになる．

定義 3.4. G 加群が真の G 不変部分空間をもたないとき**既約表現**とよぶ．また真の G 不変部分空間をもつときは**可約表現**という．また**完全可約とは表現が既約成分の直和に分解できること**．

上の命題の系として次を得る．

系 3.8 (完全可約性). 有限群 G の任意の表現は完全可約である．

補足 3.9. この完全可約性は有限群やコンパクト群に特有な性質である．たとえば，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}^2$ への表現

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える（これは表現であることはあきらか）．このとき $\{(x,0) | x \in \mathbb{C}\}$ は不変部分空間である．しかし，G 不変な補空間はもたない（これも明らか）．

補足 3.10. 有限体上のベクトル空間への表現などについても完全可約性は成立しない．また次の Schur's lemma も体は $\mathbb{C}$ としなくてはならない．

つぎにシューアの補題は強力な武器である．

補題 3.11 (Schur's lemma)**.** *V, W を G の既約表現とする．$\phi : V \to W$ を G 線形写像とする．このとき，*

1. *ϕ は同型または $\phi = 0$*
2. *$V = W$ なら $\phi = \lambda \mathrm{id}$ となる $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在．*

Proof. $\ker\phi$, $\mathrm{im}\phi$ は不変部分空間であるので，V, W が既約であることをつかえば，最初の主張が成立する．次に $\mathbb{C}$ は**代数閉体**である．よって線形写像 ϕ はある固有値 λ をもつ．そして $\phi - \lambda\mathrm{id}$ は零でない kernel をもつ．この $\phi - \lambda\mathrm{id}$ に最初の主張を適用すれば，$\phi - \lambda\mathrm{id} = 0$ である． □

次の主張は既約成分への分解が唯一つであることを述べている．

命題 3.12. *有限群 G の任意の表現 V は，*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

と分解でき，各 V_i は互いに異なる既約表現である．また V の上のような k 個の成分への分解は唯一つである．また a_i を V_i の重複度という．

Proof. V の他の分解 $V = \oplus W_j^{\oplus b_j}$ が存在したとする．$\mathrm{id} : \oplus V_i^{\oplus a_i} \to \oplus W_j^{\oplus b_j}$ を考えるとこれは G 線形写像である．V_1 に制限すれば，Schur's lemma から $\mathrm{id}|_{V_1}$ は零または同型写像であるが，零はありえない．よって同型写像であり $V_1 \cong W_1$ なるものが存在する．id が単射であることから，$\oplus V_1^{a_1}$ が $W_1^{b_1}$ に移り $a_1 = b_1$ であることがわかる．以下同様． □

補足 3.13. $V = V_i^{\oplus a_i}$（V_i は既約）としたときに，この分解については一通りではないことに注意．例えば，$V = V_i \oplus V_i$ としたときに，$\mathrm{diag}(V) = \{(a,a) \in V_i \oplus V_i | a \in V_i\}$ は既約表現になり V_i と同値である．このように分解の仕方はたくさんある．

この subsection で述べたことから，有限群 G の表現に対して次のことが目標となる

1. すべての既約表現を分類する．
2. 勝手な表現に対する既約分解の方法を述べる．特に，重複度を調べる．
3. 与えられた V に対して $\otimes^k V$, $V \otimes V^*$, $S^k(V)$ などを既約分解し表現の重複度を調べる．

3.3 例

簡単な群に対する表現について考え，一般化するためのアイデアを探ろう．

3.3.1 有限可換群の表現

まず可換群の表現を考えよう．G を可換群とする．V を G の既約表現とする．$g \in G$ に対して $\rho(g) : V \to V$ は，G が可換より G 線形写像であり，シューアの補題から g の作用は $\lambda_g \mathrm{id}$ になる．V の勝手な一次元部分空間 W を考えると，すべての $g \in G$ はスカラー λ_g で作用するので，W は不変部分空間である．よって V が既約なので V は一次元である．また $\lambda_g \lambda'_g = \lambda_{gg'}$ である．そこで，すべての一次元表現はある準同形

$$\rho : G \to \mathbb{C}^*$$

に対応する（これは後で述べる指標にもなっている）．また有限生成アーベル群の基本定理から G は巡回群の直和となる．$G = \oplus \mathbb{Z}_{k_i} \oplus \mathbb{Z}^l$（ここで k_i は素数のべき乗．堀田良之「代数入門」）．今の場合には有限群なので $G = \oplus \mathbb{Z}_{k_i}$ となる．例えば，$G = \mathbb{Z}_p$ の表現を考えると，$l = 0, 1, \cdots, p-1$ に対して，

$$\rho_l : G = \mathbb{Z}_p \ni k \mapsto \exp \frac{(2\pi k)l}{p} \in \mathbb{C}^*$$

が既約表現になり，任意の既約表現はこの方法で与えられる．また $G = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p'}$ なら，

$$\rho_{l,l'} : G \ni (k, k') \mapsto \exp(\frac{2\pi kl}{p} + \frac{2\pi k'l'}{p}) \in \mathbb{C}^*$$

が既約表現になり，任意の既約表現はこの方法で与えられる

3.3.2 ３次対称群の表現

次に対称群 $\mathfrak{S}_3$ の表現論をみていく．まず $\mathfrak{S}_3$ には，1 **次元自明表現** U および 1 **次元交代表現** U'（既約）がある．ここで U' は

$$gv = \mathrm{sgn}(g)v$$

で与えられる．さらに自然に考えられるものとして，3 次元置換表現がある．つまり $\mathbb{C}^3$ の標準基底を e_1, e_2, e_3 としたときに，

$$ge_i = e_{g(i)}$$

で作用させる表現である．座標 (z_1, z_2, z_3) で書けば，

$$g(\sum z_i e_i) = \sum z_i e_{g(i)} = \sum z_{g^{-1}(i)} e_i$$

となるので，

$$g(z_1, z_2, z_3) = (z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)})$$

となる．

この表現は可約であり，実際 2 次元空間

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C} \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

が $\mathfrak{S}_3$ の不変部分空間であり，さらに既約である．これを $\mathfrak{S}_3$ の**標準表現**とよぶ．

Proof. V が既約であることを証明しよう．$L \subset V$ を不変部分空間とすると，

$$L = \{(z_1, z_2, z_3) \mid az_1 + bz_2 + cz_3 = 0, \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

と書けるが $\mathfrak{S}_3$ 不変ということから $a = b = c = 0$ となってしまう． □

さて我々の目標の一つは $\mathfrak{S}_3$ の表現の分類である．次の subsection で一般的な道具である指標を用いるが，ここではそのアイデアを見ていくことにする．アイデアは上の例で見たように「可換群の表現論はすべて一次元表現である」という事実に注目することである．$\tau = (1, 2, 3) \in \mathfrak{S}_3$ をとり，

$$\mathfrak{A}_3 = \langle \tau \rangle = \mathbb{Z}_3 \subset \mathfrak{S}_3$$

という可換群 $\mathfrak{A}_3$ を考える（３次交代群である）．

W を $\mathfrak{S}_3$ 加群とする．W を $\mathfrak{A}_3$ で一次元空間へ分解する．そして，τ に対する固有ベクトルを v_i とし，その固有値を λ_i とすれば，$v_i = \tau^3 v_i = \lambda_i^3 v_i$ であるので $\lambda_i = \omega^{a_i}$（$a_i \in \mathbb{Z}$）となる．ここで $\omega = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$．つまり

$$W = \oplus V_i, \quad V_i = \mathbb{C} v_i, \quad \tau v_i = \omega^{a_i} v_i,$$

となる．

さて $\sigma = (1, 2) \in \mathfrak{S}_3$ とすれば，$\mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$ であり関係式は $\sigma\tau\sigma = \tau^2$ である．そこで，

$$\tau(\sigma(v_i)) = \sigma\tau^2(v_i) = \omega^{2a_i}\sigma(v_i)$$

となるので，$\sigma(v_i)$ も τ に対する固有ベクトルで固有値は ω^{2a_i} である．

1. $\omega^{a_i} \neq 1$ なら，$\omega^{2a_i} \neq \omega^{a_i}$ であるので，v_i, $\sigma(v_i)$ は独立であり，

   $$V_i = \mathbb{C}\{v_i, \sigma(v_i)\} \subset W$$

   は 2 次元 $\mathfrak{S}_3$ 不変部分空間となる．さらに，この表現が標準表現と同値であることを述べる．まず標準表現 V の基底として

   $$\alpha = (\omega, 1, \omega^2), \quad \beta = (1, \omega, \omega^2) \in \mathbb{C}^3$$

を選ぶ．このとき簡単な計算で

$$\tau\alpha = \omega\alpha, \quad \tau\beta = \omega^2\beta, \quad \sigma\alpha = \beta, \quad \sigma\beta = \alpha$$

よって，V_i と標準表現 V が同値である（G 線形同型写像 $\phi : V_i \to V$ が存在）がわかる．

2. $\omega^{a_i} = 1$，つまり $\tau v_i = v_i$ なら，$\sigma(v_i)$ と v_i は一次独立または一次従属のどちらもありえる．
   (a) 一次従属のとき：$\mathbb{C}(v_i) \subset W$ は $\mathfrak{S}_3$ 不変部分空間であり，$\sigma(v_i) = v_i$ なら自明表現．$\sigma(v_i) = -v_i$ なら交代表現になる．
   (b) 一次独立のとき，$\mathbb{C}(v_i + \sigma(v_i))$，$\mathbb{C}(v_i - \sigma(v_i))$ はどちらも不変部分空間であり $\mathbb{C}(v_i + \sigma(v_i))$ は自明表現，$\mathbb{C}(v_i - \sigma(v_i))$ は交代表現であることが直接確かめられる．

命題 3.14. $\mathfrak{S}_3$ の既約表現は，1 次元の自明表現 U，交代表現 U'，2 次元の標準表現 V の三種類だけである．また勝手な表現 W は

$$W = U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}$$

と分解されるが，重複度はつぎのようにしてわかる．c は $\tau = (1,2,3)$ の固有値 ω の重複度である（＝固有値 ω^2 の重複度）．また $a+c$ は $\sigma = (1,2)$ の固有値 1 の重複度．$b+c$ は σ の固有値 -1 の重複度．($a+b$ は τ の固有値 1 の重複度）．

例 3.15. V を標準表現とする．$V \otimes V$ などの既約分解も次のようにすればわかる．α, β を V の上で述べた基底とする．$\alpha\otimes\alpha, \alpha\otimes\beta, \beta\otimes\alpha, \beta\otimes\beta$ は τ の固有ベクトルで，固有値は $\omega^2, 1, 1, \omega$ である．さらに $\sigma(\alpha\otimes\alpha) = \beta\otimes\beta$ であり，$\sigma(\alpha\otimes\beta) = \beta\otimes\alpha$ である．そこで

$$V = \mathbb{C}\{\alpha\otimes\alpha, \beta\otimes\beta\}, \quad U = \mathbb{C}(\alpha\otimes\beta + \beta\otimes\alpha), \quad U' = \mathbb{C}(\alpha\otimes\beta - \beta\otimes\alpha)$$

であり $V \otimes V = U \oplus U' \oplus V$ となる．

以上から，群 G の表現を分解するには，まず G 内のうまい可換群の作用により，一次元固有空間に分解する．さらに，それら固有空間への残りの元の作用を見ればよい．このアイデアはリー群に対するトーラス部分群に対して使えるものである．しかし，一般の有限群に対して，うまり可換群を選ぶことは難しい．そこで次の subsection で指標を導入する（アイデアとしての**固有値を考える**という部分は同じである）．

3.4 指標

有限群 G の表現を理解するためのよい方法は，指標である．アイデアとしては前subsection で述べたように，すべての元の固有値を計算することである．実際，前subsection の例において σ,τ の固有値がわかればよかった．しかし，そこまでもとめなくてもよく，実はトレース（固有値の和）だけ考えればよい．例えば，$g\in G$ に対して表現空間を固有分解したときの固有値を $\{\lambda_i\}$ とする．このとき g^k の固有値は $\{\lambda^k\}$ である．このとき $\sum\lambda_i^k$（$k=1,\cdots$）がわかれば，g の固有値を知ることができる（固有多項式の係数がわかればよいのであるが，固有多項式の係数は $\sum\lambda_i^k$ の多項式でかける．cf. Section 2 ）．よって，すべての $g\in G$ に対して，作用 $\rho(g)$ のトレースを考えればよいことになる．

上記の理由により，次の指標を導入する．

定義 3.5. V を G 加群とする，このとき G 上の複素数値関数 χ_V を

$$\chi_V(g) := \mathrm{tr}\,(g)$$

として定義する．これを**指標**とよぶ．明らかに

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$$

を満たす．つまり G の共役類上で定数である，このように共役類上で定数の関数を**類関数（class function）**とよぶ．また**指標は表現の同値類の代表元によらず同値類のみで定まる．**

補足 3.16. 類関数は各共役類上の値で決まる関数である．また $(\mathrm{Ad}_g f)(h)=f(g^{-1}hg)$ と関数空間上に随伴表現を定義したとき，類関数は随伴作用で不変な関数のことである．

命題 3.17. V,W を G 加群とする．このとき

$$\chi_{V\oplus W}=\chi_V+\chi_W,\quad \chi_{V\otimes W}=\chi_V\chi_W,\quad \chi_{V^*}=\overline{\chi_V},\quad \chi_{\Lambda^2V}(g)=\frac{1}{2}[\chi_V(g)^2-\chi_V(g^2)]$$

Proof. 最初の二つは問題ないであろう．三番目を証明する．$g\in G$ の order を n とする．つまり $g^n=1$ とする．このとき g の V 上での固有値を $\{\lambda_i\}$ とすれば，V^* 上の固有値は $\{\lambda_i^{-1}\}_i$ となる．そして $\lambda_i^n=1$ であるので $|\lambda_i|=1$ となる．よって $\lambda_i^{-1}=\overline{\lambda_i}$ を得る．以上から $\chi_{V^*}=\overline{\chi_V}$ である．

4 番目の式を証明する．Λ^2V の固有値は $\{\lambda_i\lambda_j|i<j\}$ となる．また

$$\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\frac{(\sum\lambda_i)^2-\sum\lambda_i^2}{2}$$

であるので，$\chi_{\Lambda^2V}(g)=\frac{1}{2}[\chi_V(g)^2-\chi_V(g^2)]$ を得る． □

補足 3.18. 上の証明において，g の固有値 $\{\lambda_i\}_i$ は $|\lambda_i| = 1$ を満たすことがわかった．この事実をたまに使う．これは積分して表現空間にエルミート内積を入れたときに，作用がユニタリになることから導いてもよい．そして，コンパクトリー群のユニタリ表現でも，ユニタリ行列ということから固有値の絶対値は 1 である．

練習問題 3.19. 次を証明せよ．

$$\chi_{S^2(V)}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)]$$

例 3.20.

$$\chi_{\Lambda^k(V)}(g)$$

を計算してみよう．g の固有値を $\{\lambda_i\}_i$ とすれば，$\{\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \geq n\}$ が固有値である．よって，その和は k 次基本対称式である．つまり，

$$\mathrm{tr}\,_{\Lambda^k(V)}(g) = e_k = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}$$

となる．そこで，ニュートンの公式を思い出す．$p_k = \lambda_1^k + \cdots \lambda_n^k$ とすれば，

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j p_{k-j} e_j = (-1)^k (n-k) e_k$$

となるので，

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \chi_V(g^{k-j})\chi_{\Lambda^j(V)}(g) = (-1)^k(n-k)\chi_{\Lambda^k(V)}(g)$$

となる．例えば，

$$\chi_V(g^2) - \chi_V(g)\chi_V(g) + n\chi_{\Lambda^2(V)}(g) = (n-2)\chi_{\Lambda^2(V)}(g)$$
$$\chi_V(g^3) - \chi_V(g^2)\chi_V(g) + \chi_V(g)\chi_{\Lambda^2(V)}(g) - n\chi_{\Lambda^3(V)}(g) = -(n-3)\chi_{\Lambda^3(V)}(g)$$

となるので，

$$\chi_{\Lambda^3(V)}(g) = \frac{1}{6}(2\chi_V(g^3) - 3\chi_V(g^2)\chi_V(g) + \chi_V(g)\chi_V(g)^2)$$

となる．以下同様に漸化式を解いていけばよい．実際，ニュートンの公式から冪和対称式を基本対称式の多項式と具体的に書くことができるが，その公式は

$$e_d = \sum_{i_1+2i_2+\cdots+di_d=d} \frac{(-1)^{\sum_{k=1}^{d}(i_k-1)}}{i_1!1^{i_1}i_2!2^{i_2}i_3!3^{i_3}\cdots i_d!d^{i_d}} p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_d^{i_d}$$

（証明は section 5）

例 3.21. 有限群 G が有限集合 X の作用しているとする．このときの随伴した置換表現を考える．このとき $\chi_V(g)$ は g で固定される X の元の数の等しい（これは**不動点定理（fixed-point formula）**のもっとも単純な場合である）．

Proof. $g \in G$ による軌道分解を行う．点 $x \in X$ を g の作用によって動かす．x の軌道の元の数が l 個（$l \neq 1$）とする．つまり軌道は $\{x, gx, g^2x, \cdots, g^{l-1}x\}$（$g^l x = x$）である．これに対応した部分空間 $\mathbb{C}\{e_x, \cdots, e_{g^{l-1}x}\}$ を考える．これは $\langle g \rangle$ の作用で不変である．さらにこの基底に関する g に作用を書けば

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．このトレースは零である．また不動点の場合（軌道の元の数が 1 個）には，$ge_x = e_x$ であるので，固有値は 1 である．そして g の V への表現はこれらブロックをあわせたものである．よって $\operatorname{tr} g$ は X の不動点の数に等しい.（トレースは基底の取り方によらないのであった）． $\square$

さて，指標は類関数であるので，その共役類での値がわかればもとまる．それを表にしたものが**指標表（character table）**である．ここでは Section 3.3.2 での結果から，$\mathfrak{S}_3$ の表現に対する指標表を書いてみる．

共役類の元の数	1	3	2
$\mathfrak{S}_3$ の共役類の代表元	1	$\sigma = (1, 2)$	$\tau = (1, 2, 3)$
自明表現 U の指標	1	1	1
交代表現 U' の指標	1	-1	1
標準表現 V の指標	2	0	$-1 = \omega + \omega^2$

この表をみてわかるように $\chi_U, \chi_{U'}, \chi_V$ は独立な関数である．そこで $\mathfrak{S}_3$ の表現 W が $W = U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}$ となったときに，$\chi_W = a\chi_U + b\chi_{U'} + c\chi_V$ となる．そして独立な関数であるので，この表し方はただ一つである．つまり**指標がわかれば，既約表現の重複度がわかる**（一般の証明は後述）．例えば，$V \otimes V$ の指標 $(\chi_V)^2$ は，指標表から $(4, 0, 1)$ である．

$$(4, 0, 1) = (2, 0, -1) + (1, 1, 1) + (1, -1, 1)$$

となるので $V \otimes V = V \oplus U \oplus U'$ となることがわかる．

3.5 自明表現への射影公式と応用

表現空間から自明表現空間への射影公式を作る．

定義 3.6. V を G 加群とする．このとき G の**固定点集合**を

$$V^G = \{v \in V \mid gv = v, \quad \forall g \in G\}$$

とする．これは V 内のすべての自明表現の和に一致することは明らか．

命題 3.22 (自明表現への射影公式)**.** 次のような G 上で V への作用を平均した $\mathrm{End}(V)$ の元を考える．

$$\phi = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g \quad \in \mathrm{End}(V).$$

このとき ϕ は V から V^G（自明表現へ）の射影である．

Proof. ϕ は G 線形写像である．実際，任意の $h \in G$ に対して，$\sum g = \sum hgh^{-1}$ である．

そこで自明表現への射影であることをみたい．任意の $h \in G$ に対して $h\phi(w) = \phi(w)$ であること確かめる．

$$h\phi(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} hgw = \frac{1}{|G|}\sum_{g' \in G} g'w = \phi(w)$$

である．よって $\phi(V) \subset V^G$ となる．逆に $v \in V^G$ に対して，

$$\phi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} gv = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} v = v$$

である．よって $V^G \subset \mathrm{im}\phi$ となる．以上から $\phi : V \to V^G$ は全射である．さらに，$\phi(\phi(w)) = \phi(w)$ であるので $\phi^2 = \phi$ である．よって射影である． □

さらに，上の ϕ のトレースを取ってみると，自明表現の重複度がわかる．

系 3.23. 自明表現の重複度を m とすれば，

$$m = \dim V^G = \mathrm{tr}\,(\phi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \mathrm{tr}\,(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

となる．

例 3.24. 有限群 G がベクトル空間 V へ作用しているとする．このとき $S = \sum_k S^k(V)$（$S^k(V)$ は V の k 次対称テンソル積）として，G 不変元の全体 S^G のポアンカレ級数を計算しよう．つまり

$$P_{S^G}(t) = \sum_k \dim S^k(V)^G t^k,$$

を計算する．g の V への作用を $\rho(g)$ として，その固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，$S^k(V)$ の固有値は

$$\{\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_n^{i_n} | i_1 + \cdots + i_n = k\}$$

となる．そこで

$$\begin{aligned} P_{S^G}(t) &= \sum_k \dim(S^k(V)^G) t^k = \sum_k (\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}{}_k(g)) t^k \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_g \{ \sum_k \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} \lambda_1(g)^{i_1} \cdots \lambda_n(g)^{i_n} t^k \} \end{aligned}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\det(\mathrm{id} - \rho(g)t)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - \lambda_i(g)t} \\ &= \sum (1 + \lambda_1 t + \lambda_1^2 t^2 + \cdots) \cdots (1 + \lambda_n t + \lambda_n^2 t^2 + \cdots) = \sum_k \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} \lambda_1(g)^{i_1} \cdots \lambda_n(g)^{i_n} t^k \end{aligned}$$

である．よって，

命題 3.25 (**Molien の定理**). 有限群 G のベクトル空間 V への表現を考える．このとき $S^G = \oplus S^k(V)^G$ のポアンカレ級数は

$$P_{S^G}(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(\mathrm{id} - \rho(g)t)}$$

となる．

さて，V, W を既約 G 加群として $\mathrm{Hom}(V, W)$ に対して射影公式を適用してみる．まず $\mathrm{Hom}(V, W)^G = \mathrm{Hom}_G(V, W)$ であったことを思い出す．そしてシューアの補題から，

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \cong W \\ 0 & \text{if } V \ncong W \end{cases}$$

である．そこで

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|G|} \sum \chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \frac{1}{|G|} \sum \chi_{V^* \otimes W}(g) = \frac{1}{|G|} \sum \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) \\ &= \dim \mathrm{Hom}(V, W)^G = \dim_G \mathrm{Hom}(V, W) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \cong W \\ 0 & \text{if } V \ncong W \end{cases} \end{aligned}$$

この式を書き換えるために内積などを定義しよう．

定義 3.7. 類関数が成すベクトル空間を

$$\mathbb{C}_{class}(G) := \{\text{class functions on } G\}$$

とする．また G 上の $\mathbb{C}$ 値関数空間 $\mathbb{C}(G)$ に内積を

$$(\alpha, \beta) := \frac{1}{|G|}\sum \overline{\alpha(g)}\beta(g)$$

として導入する.（このノートでは，手前の方に複素共役を入れていることに注意）.

以上をまとめれば

命題 3.26 (指標の正規直交性)**.** V, W を既約 G 加群とする．このとき次が成立する．

$$(\chi_V, \chi_W) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \begin{cases} 1 & \textit{if } V \cong W \\ 0 & \textit{if } V \ncong W \end{cases}$$

となる．つまり既約表現たちの指標はノルム 1 であり互いに直交する．特に，独立である．

系 3.27. *1.* 任意の表現はその指標で決定できる．

2. 表現 V が既約であるための必要十分条件は $(\chi_V, \chi_V) = 1$ となること．

3. 表現 V 内で既約表現 V_i の重複度 a_i は $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$ で与えられる．そして，$(\chi_V, \chi_V) = \sum a_i^2$ となる．

Proof. $V = a_1V_1 + \cdots a_kV_k$ と既約分解されたとする．このとき指標は $\chi_V = \sum a_i\chi_{V_i}$ であり，χ_{V_i} は互いに独立であったので．

他の主張も簡単. □

3.6 表現の分類

G の左正則表現 R_G を考える．$g(\neq e) \in G$ に対して R_G に固定点はない．一方 $e \in G$ の G への作用の固定点は R_G 全体である．よって

補題 3.28. 左正則表現の指標は次のようになる．

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ |G| = \dim R_G & g = e \end{cases}$$

左正則表現の指標と任意の既約表現の指標を考える．

$$(\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|}\sum \overline{\chi_{V_i}(g)}\chi_R(g) = \frac{1}{|G|}\overline{\chi_{V_i}(e)}|G| = \dim V_i$$

となる．つまり，任意の既約表現が R_G の部分表現となっているのである．

系 3.29. G の任意の既約表現 V_i は左正則表現の中に重複度 $\dim V_i$ で現れる．特に，既約表現の数は有限個である．また

$$\dim R_G = |G| = \chi_R(e) = (\chi_R, \chi_R) = \sum_i \dim V_i^2$$

が成立する．ここで右辺の和は既約表現全体で和をとっている．

補足 3.30. $\chi_R = \sum (\dim V_i)\chi_{V_i}$ であるので $g \neq e$ に対して，

$$0 = \chi_R(g) = \sum_i (\dim V_i)\chi_{V_i}(g)$$

が成立する．

既約表現の個数が有限個であることがわかった，実は G の共役類の個数と一致することを見てみよう．

命題 3.31. $\alpha : G \to \mathbb{C}$ を G 上の関数とする．表現 V に対して，

$$\phi_{\alpha,V} = \sum_g \alpha(g)g : V \to V$$

を考える．このとき $\phi_{\alpha,V}$ がすべての表現 V に対して G 線形であることと α が類関数であることは同値である．

Proof. α が類関数とする．このとき

$$\phi_{\alpha,V}(hv) = \sum_g \alpha(g)g(hv) = \sum_{hgh^{-1}} \alpha(hgh^{-1})(hgh^{-1})(hv) = \sum_g \alpha(hgh^{-1})(hgh^{-1})(hv)$$
$$= h\sum_g \alpha(hgh^{-1})gv = h\sum_g \alpha(g)gv = h\phi_{\alpha,V}(v)$$

となる．

逆を証明する．すべての表現について $\phi_{\alpha,V}$ が G 線形であるとする．そこで G の左正則表現を考える．$f(h) \in R_G$ とする．G 線形であることから

$$\sum \alpha(g)f(h^{-1}g^{-1}h') = \sum \alpha(g)(ghf)(h') = \phi_{\alpha,R}(hf)(h')$$
$$= h(\phi_{\alpha,R}f)(h') = (\sum \alpha(g)gf)(h^{-1}h') = \sum \alpha(g)f(g^{-1}h^{-1}h') = \sum \alpha(h^{-1}gh)f(h^{-1}g^{-1}h')$$

となる（最後のところで和のとり方を g から $h^{-1}gh$ に変えた）．そこで，

$$\sum_g (\alpha(g) - \alpha(h^{-1}gh))f(h^{-1}g^{-1}h') = 0$$

が成立する．例えば，$f(h^{-1}g_0) = 1$ で他が零となる関数をとれば，

$$\sum_g (\alpha(g) - \alpha(h^{-1}gh))f(h^{-1}g^{-1}) = \alpha(g_0) - \alpha(h^{-1}g_0h) = 0$$

となる．そこで，f は任意の G 上関数であるので，任意の $g, h \in G$ に対して $\alpha(g) = \alpha(h^{-1}gh)$ がわかる．以上から α は類関数である． $\square$

定理 3.32. G の既約表現の数と G の共役類の個数は一致する．また既約表現の指標全体は類関数全体 $\mathbb{C}_{class}(G)$ の正規直交基底となる．

Proof. $\alpha : G \to \mathbb{C}$ を類関数として，すべての既約表現 V に対して $(\alpha, \chi_V) = 0$ とする．つまり $\alpha \in \mathbb{C}_{class}(G)$ を指標全体の空間に直交すると仮定する．このとき $\phi_{\alpha,V} : V \to V$ を考える．α は類関数であるので G 線形である．そして V は既約であるのでシューアの補題から $\phi_{\alpha,V} = \lambda$ である．さらに

$$(\dim V)\lambda = \mathrm{tr}\,(\phi_{\alpha,V}) = \sum \alpha(g)\,\mathrm{tr}\,(g) = \sum \alpha(g)\chi_V(g) = |G|\overline{(\alpha, \chi_{V^*})} = 0$$

となる．よって $\lambda = \phi_{\alpha,V} = 0$ である．そこで左正則表現 R_G に対しても $\phi_{\alpha,R} = 0$ である．よって $e \in R_G$ に $\phi_{\alpha,R}$ を作用させれば $\sum \alpha(g)ge = \sum \alpha(g)g = 0$ を得る．$\{g\}_{g \in G}$ は R_G の基底なので $\alpha(g) = 0$ を得る．よって $\alpha = 0$ となる．以上から，$\mathbb{C}_{class}(G)$ 内での指標全体の空間の直交補空間は零である．また $\{\chi_V\}_V$ が正規直交であることはすでに述べた．このように $\{\chi_V\}_V$ は類関数全体の正規直交基底である．（これらは $\mathbb{C}_{class}(G)$ が有限次元だから成立する．コンパクト群などに対しては無限次元になるので，それなりに位相が必要であり，Peter-Weyl の定理の系としてわかる）．

さて，既約表現の指標たちが $\mathbb{C}_{class}(G)$ の正規直交基底になることがわかったので．G の既約表現の個数は $\dim \mathbb{C}_{class}(G)$ に一致することがわかる，そこで $\mathbb{C}_{class}(G)$ の次元が共役類の数に一致することを確かめよう．共役類 $[g]$ に対して

$$f_{[g]}(g') = \begin{cases} 1 & g' \in [g] \\ 0 & g' \notin [g] \end{cases}$$

とすれば類関数である．逆に，すべての類関数はこれらの線形結合でかける． $\square$

上の定理の書き換えるため，表現環を導入しよう．

定義 3.8. 群 G の**表現環** $R(G)$ とは，G のすべての表現により生成される自由アーベル群を考えて，$V+W-(V\oplus W)$ で生成される部分群で割ったものである．完全可約性から，任意の元は

$$\sum a_i V_i, \quad V_i \text{ は既約}, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

と書ける（マイナスも許すので仮想表現とよばれる）．さらに環構造をテンソル積で入れる．

次が先ほどの定理の書き換えである．

命題 3.33. 表現環の元から指標を対応させる次の写像は同型である．

$$\chi_{\mathbb{C}} : R(G)\otimes\mathbb{C} \to \mathbb{C}_{class}(G)$$

さて，既約表現の数と共役類の数が一致した．それらの数を N と書けば，指標表は $N\times N$ 行列になる．共役類を $\{C_1,\cdots,C_N\}$，既約表現を $\{V_1,\cdots,V_N\}$ とし，対応する指標を $\{\chi_1,\cdots,\chi_N\}$ とする．このとき，

$$\delta_{ij} = (\chi_i,\chi_j) = \frac{1}{|G|}\sum_g \overline{\chi_i(g)}\chi_j(g) = \frac{1}{|G|}\sum_k |C_k|\overline{\chi_i(C_k)}\chi_j(C_k)$$

となる．そこで，重み $|C_k|/|G|$ をつけて考えれば，指標表の各行はユニタリ直交する．つまり，

$$c_{ik} = \sqrt{\frac{|C_k|}{|G|}}\chi_i(C_k)$$

とすれば，$\sum_{ij}\overline{c_{ik}}c_{jk} = \delta_{ij} = \sum c_{ik}\overline{c_{jk}}$．一般に $AA^* = \mathrm{id}$ なら $A^*A = \mathrm{id}$ であるので，$\sum_k \overline{c_{ki}}c_{kj} = \delta_{ij}$ となり，指標表の各列がユニタリ直交となる．つまり，

$$\delta_{ij} = \sum_k \sqrt{\frac{|C_i|}{|G|}}\overline{\chi_k(C_i)}\sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}\chi_k(C_j) = \frac{\sqrt{|C_i||C_j|}}{|G|}\sum_k \overline{\chi_k(C_i)}\chi_k(C_j)$$

よって，

命題 3.34 (指標表の直交性)**.** $g\in G$ に対する共役類を $C(g)$ とする．このとき，

$$\sum_i \overline{\chi_i(g)}\chi_i(g) = \frac{|G|}{|C(g)|}$$

となる（和はすべての既約表現に対してとっている）．また $g,h\in G$ に対して $C(g)\neq C(h)$ とすれば，

$$\sum_i \overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) = 0$$

となる．

3.7 射影公式

Section 3.5 において，自明表現への射影公式を述べた．それを一般の既約表現の直和への射影公式へと一般化しよう．

W を既約 G 加群として指標 χ_W は類関数である．そこで，G 加群 V の G 線形変換

$$\psi = \frac{1}{|G|}\sum_g \overline{\chi_W(g)}g \in \mathrm{End}(V)$$

を考える．特に V が既約なら $\psi = \lambda\mathrm{id}$ であり，

$$\begin{aligned}\lambda =& \frac{1}{\dim V}\operatorname{tr}\psi = \frac{1}{|G|\dim V}\sum \overline{\chi_W(g)}\chi_V(g) \\ =& \begin{cases} \frac{1}{\dim V} = \frac{1}{\dim W} & V \cong W \\ 0 & V \not\cong W \end{cases}\end{aligned}$$

となる．よって，

命題 3.35 (射影公式). G 加群 V に対して，既約分解を $V = \oplus_i V_i^{\oplus a_i}$ とすれば，

$$\pi_i := \frac{\dim V_i}{|G|}\sum \overline{\chi_{V_i}(g)}g \quad \in \mathrm{End}(V)$$

は V から $V_i^{\oplus a_i}$ への射影である．

3.8 指標や射影公式の応用

指標や射影公式の応用を述べる．次の例は，何故テンソル積表現を考えるかに対する一つの答えである．

例 3.36. V を忠実な表現とする．つまり $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ が単射．このとき G のすべての既約表現は $V^{\otimes n}$（n 十分大）に含まれる．

Proof. ϕ をある既約表現 W の指標とする．また χ を V の指標とする．また $a_n = (\phi, \chi^n)$ とする．つまり $V^{\otimes n}$ 内の既約表現 W の重複度．さらに，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{|G|}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_C |C|\overline{\phi(C)}\chi(C)^n t^n = \frac{1}{|G|}\sum_C \frac{|C|\overline{\phi(C)}}{1-\chi(C)t}$$

を考える．ここで C は共役類を表している．

さて，V は忠実な表現であることから $\chi(C) = \dim V$ となるのは $C = [e]$ の時だけである．実際 $g \in G$ に対して $\chi(g) = \operatorname{tr} g$ を考える．g の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$（$n = \dim V$）とすれば $|\lambda_i| = 1$ であった．そこで $\chi(C) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = n = \dim V$ となるとすれば，$|\sum \lambda_i| \leq \sum_i |\lambda_i| = n$ であり，等号が成立するには $\lambda_i = r_i\lambda_1$（$r_i \in \mathbb{R}$）

となるときであり，$|\lambda_i| = 1$ から $r_i = \pm 1$ である．よって $\chi(C) = \sum_{i=1}^n \pm\lambda_1 = n$ となるには，すべての固有値が 1 となるときのみであり，忠実な表現であることから $g = e$ となる．

よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{|G|}\frac{\overline{\dim W}}{1-(\dim V)t} + \frac{1}{|G|}\sum_{C\neq[e]}\frac{|C|\overline{\phi(C)}}{1-\chi(C)t}$$

となるが，右辺第二項において $\frac{1}{1-\dim Vt}$ となるものは現れない．つまりこれは非自明な t の有理関数である．よって，すべての a_n が零ということはない． □

例 3.37. 次に二つの有限群の直積群の表現がどうなるかを考察する．

有限群 G_1, G_2 および G_i 加群 V_i を考える．$V_1 \otimes V_2$ への $G_1 \times G_2$ の作用を

$$(g_1, g_2)(v_1 \otimes v_2) = g_1 v_1 \otimes g_2 v_2$$

を線形に拡張したものとして定義する．この表現空間を $V_1 \boxtimes V_2$ と書くことにする（有限群 G のテンソル積表現と区別するため）．さて V_i の指標を χ_i と書けば，$G_1 \times G_2$ 加群 $V_1 \boxtimes V_2$ に対する指標は

$$\chi((g_1, g_2)) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$$

となる．

Proof. 一般に，線形変換 A, B に対して，$\mathrm{tr}\,(A\otimes B) = \mathrm{tr}\,A\,\mathrm{tr}\,B$ が成立する．よって

$$\mathrm{tr}\,((g_1, g_2)) = \mathrm{tr}\,(g_1)\,\mathrm{tr}\,(g_2)$$

である． □

命題 3.38. V_1 と V_2 を既約とすれば，$V_1 \boxtimes V_2$ は $G_1 \times G_2$ の既約表現である．またすべての $G_1 \times G_2$ の表現はこの方法で得られる．特に，表現環の言葉でかけば $R(G_1 \times G_2) = R(G_1) \otimes R(G_2)$ となる．

Proof. V_1 と V_2 を既約とすれば，$V_1 \boxtimes V_2$ であることを見てみる．既約であることは $(\chi, \chi) = 1$ であることを見ればよいのであった．

$$\begin{aligned}
(\chi, \chi) =& \frac{1}{|G_1 \times G_2|}\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2}\overline{\chi((g_1, g_2))}\chi((g_1, g_2)) \\
=& \frac{1}{|G_1||G_2|}\sum_{g_2\in G_2}\sum_{g_1\in G_1}\overline{\chi_1(g_1)}\chi_1(g_1)\overline{\chi_2(g_2)}\chi_2(g_2) \\
=& \frac{1}{|G_2|}\sum_{g_2\in G_2}(\chi_1, \chi_1)\overline{\chi(g_2)}\chi(g_2) \\
=& (\chi_1, \chi_1)(\chi_2, \chi_2) = 1.
\end{aligned}$$

次に，すべての既約表現が $V_1 \boxtimes V_2$ と書けることを証明する．$G_1 \times G_2$ の左正則表現を考える．このとき $V_1 \boxtimes V_2$ は重複度 $\dim V_1 \boxtimes V_2 = \dim V_1 \dim V_2$ で現れる．また

$$|G_1||G_2| = (\sum_i (\dim V_1^i)^2)(\sum_j (\dim V_2^j)^2) = \sum_{i,j} (\dim V_1^i \dim V_2^j)^2 = \sum_{i,j} (\dim V_1^i \boxtimes V_2^j)^2$$

である．一方，$G = G_1 \times G_2$ とすれば，$|G| = \sum_k (\dim W_k)^2$ となるが，$|G_1||G_2| = |G|$ であるので，

$$\sum_{i,j} (\dim V_1^i \boxtimes V_2^j)^2 = \sum_k (\dim W_k)^2$$

が成立する．明らかに $V_1^i \boxtimes V_2^j$ は互いに同値でない（指標を計算すればわかる）ので，W_k は $V_1^i \boxtimes V_2^j$ と書ける． $\square$

次は有用である（[8] の page 164 から引用）．

命題 3.39. 有限群 G の有限次元表現 V（既約とは限らない）とする．このとき**指標** $\chi_V(g)$ **は代数的整数**である．ここで**代数的整数**とは，$\lambda \in \mathbb{C}$ で，整数 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ が存在して，

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

となるものである（*leading term* の係数が 1 であることに注意）．

まず，代数的整数について少し説明する．まず，代数的整数の和，積は代数的整数である．つまり代数的整数全体は可換環になる．$\sqrt{-2}$ や $\sqrt{-1}$ は代数的整数である．しかし，π は代数的整数でない．また，**有理数が代数的整数であるのは整数のときのみである．**

Proof. $\lambda = p/q$ を有理数として，p, q は互いに素かつ $q \neq 1$（整数でない）とする．このとき，

$$(\frac{p}{q})^n + a_1(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

であるので q^n して，

$$p^n = -q(a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \cdots + a_nq^{n-1})$$

となる．これは p, q が互いに素であることに矛盾する． $\square$

そこで，命題を証明しよう．

Proof. g の V への作用を考えて，その固有値を $\mu_1, \cdots, \mu_N$ とする．有限群なので $g^{|G|} = e$ となる．そこで，$\mu_1, \cdots, \mu_N$ は $(\mu_i)^{|G|} = 1$ を満たす．よって，μ_i は代数的整数であり，$\chi_V(g) = \mu_1 + \cdots + \mu_N$ も代数的整数である． $\square$

上の命題の応用を与えよう．

系 3.40. 有限群 G の任意の既約表現 V の次元は $|G|$ の約数である．

補題 3.41. *Section 3.10* で定義するが，関数の畳み込みを

$$(f*f')(g)=\sum_{g\in G}f(gh^{-1})f'(h)$$

として定義する．このとき既約表現の指標 χ_V に対して，

$$\chi_V*\chi_V=\frac{|G|}{\dim V}\chi_V$$

が成立する．

Proof. Section 3.10 で示すように，既約表現 V の行列成分を $\{\rho^{kl}(g)\}_{k,l}$ とすれば，$\rho^{kl}*\rho^{pq}=\frac{|G|}{\dim V}\delta_{lp}\rho_{kq}$ となる．この事実を使えばすぐにわかる． □

Proof of 系. $\chi_V*\chi_V=\frac{|G|}{\dim V}\chi_V$ を繰り返して使えば，

$$\underbrace{\chi_V*\cdots*\chi_V}_{m+1}=\frac{|G|^m}{(\dim V)^m}\chi_V$$

となる．両辺の単位元での値を考えると，左辺は指標の和と積でかけるので，代数的整数である．よって

$$\frac{|G|^m}{(\dim V)^{m-1}}$$

も代数的整数である．よって有理数 $\frac{|G|^m}{(\dim V)^{m-1}}$ は整数でなくてはならない．また m は任意の自然数であるので，$|G|, \dim V$ を素因数分解して考えれば，$\dim V$ が $|G|$ の約数であることがわかる． □

3.9 行列成分，シューアの直交関係

すべての既約表現の行列成分たちが G 上関数の基底となることを証明したい．そこで次の補題を必要とする．

補題 3.42. V, W を既約 G 加群とする．また $L_0:V\to W$ を勝手な線形写像とする．このとき

$$L(v)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}g^{-1}L_0(gv)$$

として $L:V\to W$ を定める．このとき．$V\not\cong W$ なら $L=0$ であり，$V\cong W$ なら $L=\operatorname{tr}(L_0)/\dim V$ となる．

Proof. L が G 線形であることを証明する．

$$L(hv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}L_0(ghv) = \frac{1}{|G|}\sum_{gh^{-1}\in G}(gh^{-1})^{-1}L_0(gv)$$
$$= \frac{1}{|G|}h(\sum_{g\in G} g^{-1}L_0(gv)) = hL(v).$$

よってシューアの補題から $V \not\cong W$ なら $L=0$ である．$V\cong W$ なら $L=\lambda\mathrm{id}$ となる．また

$$\lambda(\dim V) = \mathrm{tr}\, L = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,(g^{-1}L_0 g) = \mathrm{tr}\, L_0$$

となる． □

命題 3.43 (シューアの直交関係). V, V' を既約 G 加群とする．有限群なので G 不変エルミート内積を入れて，G の作用がユニタリであるとする．そして表現の行列成分を ρ_{ij}, ρ'_{kl} とする（$1\le i,j\le \dim V$, $1\le k,l\le\dim V'$）．このとき，

1. $V\not\cong V'$ とすれば，

$$(\rho_{ij},\rho'_{kl}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\rho_{ij}(g)}\rho'(g)_{kl} = 0.$$

2. $V=V'$ のとき，

$$(\rho_{ij},\rho'_{kl}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\rho_{ij}(g)}\rho'(g)_{kl} = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim V}$$

Proof. $V\not\cong V'$ として，V, V' のユニタリ基底を $\{e_i\}_i$, $\{e'_k\}_k$ とする．補題で $L_0(v) = \langle v, e_i\rangle e'_k$ とする．このとき，

$$0 = \langle L(e_j), e'_l\rangle = (\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho'(g)^{-1}\langle\rho(g)e_j, e_i\rangle e'_k, e'_l\rangle$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)e_j,e_i\rangle\langle\rho'(g)^{-1}e'_k,e'_l\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)e_j,e_i\rangle\langle e'_k,\rho'(g)e'_l\rangle$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle\rho(g)e_j,e_i\rangle\overline{\langle\rho'(g)e'_l,e'_k\rangle} = (\rho'_{lk},\rho_{ji})$$

となる．また $V=V'$ のときは，$L_0(v) = \langle v,e_i\rangle e_k$ とすれば，

$$\mathrm{tr}\, L_0 = \sum_j\langle L_0(e_j),e_j\rangle = \sum_j\langle e_j,e_i\rangle\langle e_k,e_j\rangle = \sum_j\delta_{ji}\delta_{kj} = \delta_{ki}$$

となる．そこで

$$\frac{\delta_{ki}\delta_{jl}}{\dim V} = \frac{\mathrm{tr}\, L_0}{\dim V}\delta_{jl} = \langle L(e_j), e_l\rangle = (\rho_{ji}, \rho_{lk})$$

となる． □

上の命題は，**すべての既約成分の行列成分たちが互いに直交していることを述べている．特に G 上の関数として一次独立であることもわかる．** さらに G 上関数全体の次元は

$$\dim R_G = \sum_i (\dim V_i)^2$$

であったので，行列成分が G 上関数の直交基底となることがわかる．

系 3.44 (Peter-Weyl の定理の有限群バージョン)**.** すべての既約成分の**行列成分が G 上関数の直交基底**となる（正規化すれば正規直交基底）．

補足 3.45. 上の命題は有限群の話なので，難しいことは必要としない．コンパクト群に対する Peter-Weyl の定理は Stone-Weierstrass の定理という大道具が必要（難しくはない．大島・小林に詳しい証明が載っている）．

3.10 群環

いままでの話を有限群上関数のフーリエ変換という立場でみていこう．そこでまず．群環を定義する．

3.10.1 群環と畳み込み

有限群 G に対する群環 $\mathbb{C}G$ について考える．

定義 3.9. 有限群 G に対する**群環** $\mathbb{C}G$（**group algebra**）とは，基底 $\{g | g \in G\}$ をもつ $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間で，環構造を

$$(\sum_{g\in G} a_g g)\cdot(\sum_{h\in G} b_h h) := \sum_{gh} a_g b_h gh, \quad a_g, b_h \in \mathbb{C}$$

で入れたものである（よって $\mathbb{C}$ 上代数）．ベクトル空間としては正則表現の表現空間.
また群環の V 上への表現とは環準同形

$$\mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V)$$

のことである．

例 3.46. G の表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ があれば，自然に群環の表現 $\rho : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V)$ へ拡張できる．また $\mathbb{C}G$ 加群を G へ制限すれば，G の表現である．また $\mathbb{C}G$ を左 $\mathbb{C}G$ 加群とみたものは左正則表現に対応している．

命題 3.47. 群環 $\mathbb{C}G$ を G 上 $\mathbb{C}$ 値関数全体 $\mathbb{C}(G)$ と見たとき，積は畳み込み「$*$」（***convolution***）となる．ここで $f * f'$ は，

$$(f * f')(g) := \sum_{g \in G} f(gh^{-1}) f'(h)$$

とする．また G 上 $\mathbb{C}$ 値関数全体 $\mathbb{C}(G)$ は畳み込みに対して（非可換）$\mathbb{C}$ 上代数になる．これを $(\mathbb{C}(G), *)$ と書く．

Proof. f, f' に対応するものは $\sum f(h)h$, $\sum f'(h)h$ である．これらの積は

$$\begin{aligned}&(\sum_h f(h)h)(\sum_k f'(k)k) = \sum_{h,k} f(h)f'(k)hk = \sum_{g,k} f(gk^{-1})f'(k)g \\ =& \sum_g \{\sum_k f(gk^{-1})f'(k)\} g \mapsto \sum_{g \in G} f(gh^{-1})f'(h).\end{aligned}$$

次に代数になることみたい．結合律だけのべておこう．

$$\begin{aligned}&((f_1 * f_2) * f_3)(g) = \sum_h (f_1 * f_2)(gh^{-1}) f_3(h) = \sum_{h,k} f_1(gh^{-1}k^{-1}) f_2(k) f_3(h) \\ =& \sum_k \sum_h f_1(gk^{-1}h^{-1}) f_2(h) f_3(k) = \sum_k \sum_h f_1(gk^{-1}(hk^{-1})^{-1}) f_2(hk^{-1}) f_3(k) \\ =& \sum_{h,k} f_1(gh^{-1}) f_2(hk^{-1}) f_3(k) = (f_1 * (f_2 * f_3))(g).\end{aligned}$$

□

補足 3.48. G 上関数 f に対して，

$$f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}$$

と定義する．このとき $(f^*)^*$, $(f * g)^* = g^* * f^*$ が成立する．このような性質を満たす複素歪線形写像 $f \mapsto f^*$ が定義されている代数を $*$ 代数とよぶ．$\mathbb{C}G$ 内で書けば，

$$\sum f(g) f \mapsto \sum \overline{f(g^{-1})} g = \sum \overline{f(g)} g^{-1}$$

となる．

定理 3.49. 次の環同型が成立する．

$$(\mathbb{C}(G), *) \cong \mathbb{C}G \cong \bigoplus \mathrm{End}(W_i)$$

ここで右辺は G のすべての既約表現に対して和をとっている．また対応は次で与えられる，

$$f \mapsto \sum_g f(g)g \mapsto \sum_i \sum_g f(g)\rho_i(g).$$

Proof. 最初の環同型はすでに述べた．二番目の環同型を証明する．

W_i を既約 G 加群とする．これを群環の表現へ拡張して $\rho_i : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(W_i)$ という環準同形を得る．このとき $(g, g') \in G \times G$ に対して

$$\mathbb{C}G \ni h \mapsto (g, g')h = ghg'^{-1} \in \mathbb{C}G,$$
$$\mathrm{End}(W_i) \ni f \mapsto (g, g')f = \rho_i(g)f\rho_i(g'^{-1}) \in \mathrm{End}(W_i)$$

とすれば，どちらも $G \times G$ の表現になる．さらに．

$$\rho_i : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(W_i)$$

は $G \times G$ 線形である．また W_i は既約なので $\mathrm{End}W_i = W_i \otimes W_i^*$ は $G \times G$ の表現として既約である．よってシューアの補題から ρ_i は零でないので全射となることがわかる．以上をすべての既約表現 W_i について考えれば，

$$\phi : \mathbb{C}G \to \bigoplus \mathrm{End}(W_i)$$

という全射環準同形を得る．$\mathbb{C}G$ は正則表現空間とベクトル空間として同型なので，次元は $\sum(\dim W_i)^2$ である．よって $\dim \mathbb{C}G = \dim \oplus\mathrm{End}(W_i)$ である．全射で次元が等しいので同型となる．

また環準同形であることは $\phi : \mathbb{C}G \to \oplus\mathrm{End}(W_i)$ が $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ をみたすことからわかる． □

補足 3.50. 上の証明をみてわかるように，$\mathbb{C}G \cong \bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ という分解は $G \times G$ に関する群環の既約分解である．また群環の行列代数としての実現が $\bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ である．$\mathrm{End}(W_i)$ は単純であるので，群環 $\mathbb{C}G$ が半単純代数であることがわかる．
単純とは非自明な両側イデアルが存在しないこと．半単純とは単純の直和になること．

系 3.51. 群環の中心（すべての元と可換な元全体）は $\{\sum_g \alpha(g)g \mid \alpha \in \mathbb{C}_{class}(G)\}$ からなる．いいかえると $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}(G)$ とすれば，$\mathbb{C}_{class}(G) \subset \mathbb{C}(G)$ が畳み込みに関して中心になる．

Proof. 群環の中心は G の随伴作用による不変元であることは明らか．そこで

$$h(\sum a(g)g)h^{-1} = \sum a(g)hgh^{-1} = \sum a(h^{-1}gh)g = \sum a(g)g$$

よって．$a(h^{-1}gh) = a(g)$ となり，$a(g)$ は類関数である． □

3.10.2 群環と行列成分

上の命題および系のいろいろな見方を述べよう．

1. まず既約表現 W_i の行列成分 $\rho_i^{kl} \in \mathbb{C}(G)$ を考える（すべてユニタリ表現としておく）．これを $\bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ へ対応させると，

$$\mathbb{C}(G) \ni \rho_i^{kl} \mapsto \sum \rho_i^{kl}(g)g \xrightarrow{\phi} \sum_j \sum_g \rho_i^{kl}(g)\rho_j(g) \in \bigoplus_j \mathrm{End}(W_j)$$

となる．ここで $\rho_j = \sum \rho_j^{pq} E_{pq}^j$（$E_{pq}$ は (p,q) 成分が 1 で他が零の行列）と表示する．また W_i の双対表現の行列成分を $\rho_{i^*}^{pq}(g) = \rho_i^{qp}(g^{-1}) = \overline{\rho_i^{pq}(g)}$ とする（最後はユニタリであることから．また W_i^* の基底としては W_i の基底の双対基底を取っていることに注意．その基底に関して行列成分を書いている）．そこで，行列成分の直交関係式から，

$$\begin{aligned}\rho_i^{kl} \mapsto \sum_j \sum_g \rho_i^{kl}(g)\rho_j(g) &= \sum_{p,q} \sum_g \rho_i^{kl}(g)\rho_{i^*}^{pq}(g)E_{pq}^{i^*} = \frac{|G|}{\dim W_i} \sum_{p,q} \delta_{kp}\delta_{ql} E_{pq}^{i^*} \\ &= \frac{|G|}{\dim W_i} E_{kl}^{i^*} \in \mathrm{End}(W_i^*) \subset \bigoplus_j \mathrm{End}(W_j)\end{aligned}$$

となる．このようにして，既約表現 W_i の行列成分 $\rho_i^{kl}(g)$ は行列環 $\mathrm{End}(W_i^*)$ の基底である E_{kl} に対応していることがわかる．

例えば，行列成分同士の畳み込みは計算しなくてもわかる．

$$\rho_i^{kl} * \rho_i^{pq} = \frac{|G|}{\dim W_i}\delta_{lp}\rho_i^{kq} \mapsto (\frac{|G|}{\dim W_i}E_{kl}^{i^*})(\frac{|G|}{\dim W_i}E_{pq}^{i^*}) = \frac{|G|}{\dim W_i}\delta_{lp}E_{kq}^{i^*}.$$

本当に畳み込みが上のようになるかを見ておこう．

$$\rho_i^{kl} * \rho_i^{pq}(g) = \sum_h \rho_i^{kl}(gh^{-1})\rho_i^{pq}(h) = \sum_h \sum_s \rho_i^{ks}(g)\rho_i^{sl}(h^{-1})\rho_i^{pq}(h)$$

$$= \sum_h \sum_s \rho^{ks}(g)_i \overline{\rho_i^{ls}(h)}\rho_i^{pq}(h) = \frac{|G|}{\dim W_i}\sum_s \rho_i^{ks}(g)\delta_{lp}\delta_{sq} = \frac{|G|}{\dim W_i}\rho_i^{kq}(g)\delta_{lp}$$

となる．

2. 中心についても見ておこう．上の系からわかるように $\mathbb{C}_{class}(G)$ は畳み込みに関して $\mathbb{C}(G)$ の中心になる．よって $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_{class}(G)$, $f \in \mathbb{C}(G)$ とすれば，

$$\alpha * \beta \in \mathbb{C}_{class}(G), \\ \alpha * f = f * \alpha$$

が成立する．つまり類関数全体は畳み込みで閉じていて，すべての関数と可換である．また，$\alpha * f = f * \alpha$ は $\alpha(g) = \alpha(hgh^{-1})$ であることと同値である．また命題3.31 を思い出そう．$\sum \alpha(g)g \in \mathbb{C}G$ に対して，すべての既約表現に対して G 線形であることと α が類関数であることは同値であった．そこで α を類関数の $\bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ への像は，シューアの補題を使えば，$\sum \lambda_i \mathrm{id}_{W_i} \in \bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ となることを意味する．これは，まさに行列環 $\bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ の中心である．

3. 類関数として指標を考える．指標 χ_{W_j} に対して，以前見たように

$$\pi_j := \frac{\dim W_j}{|G|} \sum_g \overline{\chi_{W_j}(g)} g$$

は W_j への射影行列である．よって W_j^* に対する指標 $\chi_{W_j^*}$ は $\bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ 内で W_j への射影行列となっている．

また補題3.41 で述べたように，$\chi_{W_j} * \chi_{W_j} = \frac{|G|}{\dim W_j} \chi_{W_j}$ が成立した．これより $\pi_j * \pi_j = \pi_j$ となることもわかる．また $\chi_{W_i} * \chi_{W_j} = 0$（$i \neq j$）となる．つまり V, W を既約とすれば，

$$\chi_V * \chi_W = \begin{cases} 0 & V \cong W \\ \frac{|G|}{\dim V} & V \cong W \end{cases}$$

が成立する．

3.10.3 群環と既約表現

群環 $\mathbb{C}G$ 内にはすべての既約表現が現れるのであった．W を $\mathbb{C}G$ 内の任意の部分表現とすれば，それは $\mathbb{C}GW \subset W$ と同値なので，**部分表現 W は $\mathbb{C}G$ 内の左イデアルに対応する**．完全可約性から

$$\mathbb{C}G = W \oplus W'$$

と左イデアルの分解が存在する．単位元 $e \in G$ を，この分解に対して，

$$e = w + w' \in W \oplus W'$$

と分解する．直和なので，このような分解は唯一つである．つまり w, w' は唯一つである．左イデアルであることから，$x \in \mathbb{C}G$ に対して，

$$x = xw + xw' \in W \oplus W'$$

となる．よって $x \in W$ なら $x = xw$ が成立する．特に $w = w^2$，$ww' = 0 = w'w$ となる．以上から，w **は冪等であり**，W **は左イデアル** $\mathbb{C}Gw$ **となる**．また

$$\mathbb{C}G \ni x \mapsto xw \in W$$

は射影を与える．

逆に冪等元 w があるとする．このとき $W = \mathbb{C}Gw$ とすれば，G の表現空間である．そして

$$e = w + (e - w)$$

とすれば，$(e-w)^2 = e + w^2 - 2w = e - w$ であるので $e - w$ は冪等元である．そして

$$\mathbb{C}G = \mathbb{C}Gw + \mathbb{C}G(e - w)$$

となる．(冪等元でなくても，勝手な $a \in \mathbb{C}G$ に対して $\mathbb{C}Ga$ は G の表現空間である)．

また W が**既約表現なら** W **は最小の左イデアル**であることを意味する．そこで，対応する冪等元 w は直交冪等元の和に分解されない．つまり

$$w = w_1 + w_2, \quad w_1^2 = w_1, \quad w_2^2 = w_2, \quad w_1 w_2 = w_2 w_1 = 0$$

なら $w = w_1$ または $w = w_2$ となる．このような冪等元を**原始的**とよぶ．

このように有限群の G 内の既約表現を求める問題は，$\mathbb{C}G$ 内の最小イデアルをもとめる問題に同値であり，$\mathbb{C}G$ 内の原始的冪等元をもとめる問題に同値である．

例 3.52. $a = \sum a_g g \in \mathbb{C}G$ に対して，

$$a^* = \sum a_g g^{-1}$$

と定義すれば，これは $\mathbb{C}G$ 内の自己歪同型（$b^*a^* = (ab)^*$）であるが，$w \in \mathbb{C}G$ を（原始）冪等元とすれば，w^* も（原始）冪等元である．

対応するイデアルを $\mathbb{C}Gw, \mathbb{C}Gw^*$ に対して，双線形形式を

$$\langle a, b \rangle = ab^* \text{ における } e \text{ の係数}$$

と定めれば非退化であり，$(\mathbb{C}Gw)^* = \mathbb{C}Gw^*$ であり，$\langle ga, b \rangle = \langle a, g^{-1}b \rangle$ となる．よって G 加群としても双対的になる．

例 3.53. w を $\mathbb{C}G$ の冪等元として，対応する表現を $W = \mathbb{C}Gw$ とする．$E = w\mathbb{C}Gw$ とすると，これは代数となる．このとき代数として，

$$E = w\mathbb{C}Gw \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(W, W) = \mathrm{Hom}_G(W, W)$$

となる．

Proof. $\epsilon, \epsilon' \in E = w\mathbb{C}Gw$ とすると，w が冪等元なので，$\epsilon\epsilon' \in E$ であることがわかる．よって代数である．また $WE \subset W$ もわかるので，W は右 E 加群である．特に，$E \subset \mathrm{Hom}(W, W)$ であり，G と E の作用は，

$$(G \times E) \times W \ni ((g, \epsilon), v) \mapsto gv\epsilon \in W$$

となるので，G の作用と E の作用は可換である．よって $E \subset \mathrm{Hom}_G(W, W)$ となる．具体的には次のようにする．$\epsilon \in E$ に対して，$\phi_\epsilon \in \mathrm{Hom}_G(W, W)$ を，

$$\phi_\epsilon(x) = x\epsilon$$

として定める．さらに，

$$\phi_\epsilon \phi_{\epsilon'}(x) = x\epsilon'\epsilon = \phi_{\epsilon'\epsilon}(x)$$

であるので，

$$E \ni \epsilon \mapsto \phi_\epsilon \in \mathrm{Hom}_G(W, W)$$

は歪準同形である．逆に $\phi \in \mathrm{Hom}_G(W, W)$ に対して，$\phi(w) = \epsilon \in \mathbb{C}Gw$ とする．このとき，$x \in W = \mathbb{C}Gw$ に対して，$x = xw$ であるので，

$$\phi(x) = \phi(xw) = x\phi(w) = x\epsilon$$

となる．特に，$\epsilon = \phi(w) = w\epsilon \in w\mathbb{C}Gw$ となる．つまり, $\epsilon \in E$ となる．また，$\phi(w) = \epsilon$, $\psi(w) = \epsilon'$ とすれば，

$$\phi\psi(w) = \phi(\epsilon') = \phi(\epsilon' w) = \epsilon'\phi(w) = \epsilon'\epsilon = \psi(w)\phi(w)$$

であるので，$\mathrm{Hom}_G(W, W) \to E$ も歪準同形である．さらに，上で作った写像は互いに逆写像であることがわかるので $\mathrm{Hom}_G(W, W) \cong E$ となる．

次のように証明してもよい：$\mathbb{C}G = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}G$ であるので，

$$E = w\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}G} \mathbb{C}Gw = W^* \otimes_{\mathbb{C}G} W$$

となるので $E = \mathrm{Hom}_G(W, W)$ である．ここで，$w\mathbb{C}G \cong W^*$ であることを見ておこう．先ほどの例を考えると，

$$\Phi : w\mathbb{C}G \ni \sum a_h h \mapsto \sum a_h h^{-1} \in \mathbb{C}Gw^*$$

という写像を考えると，これは G 線形同型であることがわかる．実際，

$$g\Phi(\sum a_h h) = \sum a_h g h^{-1} = \sum a_h (hg^{-1})^{-1} = \Phi((\sum a_h h) g^{-1})$$

であるので．

□

上で述べたように，既約表現を探すには，原始的冪等元をもとめる問題になるのであった．一般の有限群では，そう簡単にはいかないが，対称群 $\mathfrak{S}_d$ に対してはそれを実行することができる（Section 4）．

3.11 フーリエ変換

このsubsetionの話は後で必要ないので，飛ばして読んでかまわない．

環同型 $\mathbb{C}G \cong \bigoplus \mathrm{End}(W_i)$ のフーリエ変換としての見方を論ずる．まず，ふつうのフーリエ変換を思い出そう．

例 3.54 (S^1 の場合). S^1 を可換群とみなす．この既約ユニタリ表現はすべて1次元表現であり，

$$\rho_n : S^1 \ni e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta} \in \mathbb{C}^*, \quad n \in \mathbb{Z}$$

で与えられる（練習問題）．群 G の既約ユニタリ表現全体（正確には同値類全体）を $\hat{G}$ と書く（G のユニタリ双対とよぶ）ことにすれば，

$$\widehat{S^1} = \mathbb{Z} = \{\rho_n | n \in \mathbb{Z}\}$$

となる．また，すべて一次元表現であるので，既約表現の行列成分＝既約表現の指標となる．そして行列成分の直交関係（指標の直交関係）は，

$$(\chi_m, \chi_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}e^{-im\theta}d\theta = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

このとき $L^2(S^1)$ のフーリエ変換とは

$$f \mapsto \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = (\chi_n, f)$$

である.（このこと及び先ほどの直交関係から $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(S^1)$ の正規直交基底になることを意味する）．このフーリエ変換は

$$\hat{f} : \widehat{G} \ni n \mapsto \hat{f}(n) \in \mathbb{C}$$

とかけば，フーリエ変換したものは $\widehat{G}$ 上の関数である．またフーリエ逆変換公式（フーリエ展開）は

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{in\theta}$$

となる．さらに **Plancherel**（プランシュレル）の公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

が成立した．

上のフーリエ変換は，前subsectionの $\mathbb{C}(G) \to \oplus\mathrm{End}(W_i)$ という写像で用いた，

$$f \mapsto \sum_{g\in G} f(g)\rho_i(g), \quad （\rho_i \text{ は } W_i \text{ の表現}）$$

に非常に似ている．特にトレースを取れば，

$$\hat{G} \ni \rho_i \mapsto \sum_{g \in G} f(g) \operatorname{tr}(\rho_i(g)) = \int_G f(g) \chi_{W_i}(g) dg \in \mathbb{C}.$$

となりユニタリ双対上の関数を得る．ただし，S^1 のフーリエ変換は双対を取っていることに注意．つまり

$$\hat{S^1} \ni n \mapsto \int_{S^1} f(\theta) \overline{\chi_n(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi} \in \mathbb{C}$$

となっている．

例 3.55 ($\mathbb{R}^1$ の場合). $\mathbb{R}^1$ を可換群とみなす．既約ユニタリ表現は 1 次元表現であり，$\xi \in \mathbb{R}^1$ に対して，

$$\rho_\xi : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix\xi} \in U(1) \subset \mathbb{C}^*$$

として与えられる．よって $\mathbb{R}$ のユニタリ双対は

$$\widehat{\mathbb{R}} = \{\xi \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$$

となる．行列成分の直交関係（指標の直交関係）は，

$$(\chi_\xi, \chi_\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-ix\eta} dx = \delta(\xi - \eta) = \begin{cases} 1 & (\xi = \eta) \\ 0 & (\xi \neq \eta) \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ 上の急減少関数全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ と書けば $\mathbb{R}$ 上のフーリエ変換は

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx = (\chi_\xi, f) \in \mathcal{S}(\widehat{\mathbb{R}})$$

である．またフーリエ逆変換公式は

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

となる．さらに Plancherel の公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

が成立する．

上の例をみればわかるように，**フーリエ変換とは，ある関数をユニタリ双対上の関数へと変換するもの**である．そして，**フーリエ逆変換とは，関数をすべての既約成分の行列成分らで展開するもの**である．上の場合には，既約表現は 1 次元表現であったので行列成分は指標に一致した．そして指標は表現の同値類のみで定

まる関数である．その意味ではフーリエ展開は唯一つである．さて，これを有限群上関数のフーリエ変換に拡張したいが，少し問題がある．すでに見たように G 上関数全体 $\mathbb{C}(G)$ の正規直交基底としては，すべての既約表現の行列成分である．よって可換群でないなら指標で展開することは出来ない（可換群なら指標と行列成分が一致した）．ただし，類関数は指標を基底として持っていたので，類関数は指標で展開できる（可換群ならすべての関数が類関数である）．また，既約表現は 1 次元以上であることもあるので，それなりに工夫する必要がある．

そこで次のようにフーリエ変換を定義する．

定義 3.10 (作用素値フーリエ変換)**.** G の表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ を考える．また $f \in \mathbb{C}(G)$ とする．このとき $\mathrm{End}(V)$ 値フーリエ変換とは

$$\hat{f}(\rho) := \sum_{g \in G} f(g)\rho(g).$$

特に，V として既約表現 (ρ_i, W_i) をとれば，

$$\hat{f}(\rho_i) := \sum_{g \in G} f(g)\rho_i(g) \in \mathrm{End}(W_i)$$

となり，さらにすべての既約表現の和 $(\oplus\rho_i, \oplus W_i)$ の場合には

$$\mathbb{C}(G) \ni f \mapsto \hat{f}(\oplus\rho_i) = \sum_i \sum_{g \in G} f(g)\rho_i(g) \in \bigoplus \mathrm{End}(W_i)$$

となる．これは定理 3.49 で与えたものに一致している．

さらに，フーリエ変換がユニタリ双対 $\hat{G}$ 上の関数となるように次のようなフーリエ変換を定義する．

定義 3.11 (スカラー値フーリエ変換)**.** G 上の関数 f のスカラー値フーリエ変換をつぎのように定義する．

$$f \mapsto \hat{f}(\rho_i) = \sum_{g \in G} f(g)\chi_{W_i}(g) \in \mathbb{C}$$

（これは同値類の代表元のとり方によらず，well-defined である）．

例 3.56. $\mathbb{C}(G) \cong \oplus\mathrm{End}(W_i)$ の対応から，作用素値フーリエ変換に対して次が成立することはすでに証明した．

$$\widehat{f * f'}(\rho) = \hat{f}(\rho)\hat{f'}(\rho).$$

例 3.57. f として既約表現 W の指標 $\chi_W(g)$ をとる．このとき

$$\widehat{\chi_W}([W_i]) = \begin{cases} |G| & W_i \cong W^* \\ 0 & W_i \ncong W^* \end{cases}$$

よって，

$$\chi_W(g) = \frac{1}{|G|}\sum_i \widehat{\chi_W}([W_i])\chi_{W_i^*}(g)$$

となる．もちろんこれは類関数に対しても成立する．これが S^1 や $\mathbb{R}^1$ のフーリエ逆変換に対応するものである．

一般の関数に対する逆変換公式を得るたい．そこで，スカラー値フーリエ変換をユニタリ双対 $\hat{G}$ 上で「重み（次元）をつけて積分」したものを考える．

$$\sum_{i\in\hat{G}} \dim W_i \sum_{g\in G} f(g)\chi_{W_i}(g) = \sum_{i\in\hat{G}} \dim W_i \hat{f}([W_i]).$$

（この重みつきの測度を**プランシュレル測度**という）．このとき，左正則表現の指標 $\chi_R(g)$ を使って，

$$\sum_{g\in G} f(g) \sum_i \dim W_i \chi_{W_i}(g) = \sum_g f(g)\chi_R(g) = |G|f(e)$$

となる．さらに，この $f(g)$ を $f_h(g) := f(gh)$ という関数で置き換えれば，

$$\begin{aligned}
f(h) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(gh)\sum_i \dim W_i \chi_{W_i}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \sum_{g\in G} f(gh)\chi_{W_i}(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \sum_{k\in G} f(k)\chi_{W_i}(kh^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \operatorname{tr}\,(\sum_k f(k)\rho_i(k)\rho_i(h^{-1})) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \operatorname{tr}\,(\rho_i(h^{-1})\hat{f}(\rho_i))
\end{aligned}$$

となる．これが**有限群上の関数に対するフーリエ逆変換公式**となる．ここで最後の項における $\hat{f}$ は作用素値フーリエ変換である．作用素値フーリエ変換は同値類の代表元の取り方に依存するし，ρ_i そのものもとり方に依存する．しかし，上ではトレースを取っているので，上の展開は代表元のとり方に依存しない．

さらにプランシュレル公式も導いておこう．$f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$ とする．このとき

$$f * f^*(e) = \sum f(g)f^*(g^{-1}) = \sum f(g)\overline{f(g)} = \sum_g |f(g)|^2$$

一方，上のフーリエ逆変換公式で f を $f * f^*$ に置き換えれば

$$f * f^*(e) = \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \operatorname{tr}\,(\rho_i(e)\widehat{f * f^*}(\rho_i)) = \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \operatorname{tr}\,(\hat{f}(\rho_i)\widehat{f^*}(\rho_i))$$

以上から次の有限群上の関数に対するプランシュレルの公式を得る．

$$\sum_g |f(g)|^2 = \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \operatorname{tr}(\hat{f}(\rho_i)\widehat{f^*}(\rho_i))$$

補足 3.58. すべての既約表現の行列成分は正規化すれば $\mathbb{C}(G)$ の直交基底になるのであった（$(\rho_{ij},\rho_{kl}) = \delta_{ik}\delta_{jl}/\dim V$）．そこで先ほどとの対応を見ておけば，

$$\begin{aligned}
f(h) =& \frac{1}{|G|}\sum_i \dim W_i \sum_{kl}\sum_g \overline{\rho_{i^*}^{kl}(g)} f(g)\rho_{i^*}^{kl}(h) = \sum_i \dim W_i \sum_{kl}\sum_g \overline{\rho_i^{lk}(g^{-1})} f(g)\rho_i^{lk}(h^{-1}) \\
=& \sum_i \dim W_i \sum_{kl}\sum_g \rho_i^{kl}(g) f(g)\rho_i^{lk}(h^{-1}) = \sum_i \dim W_i \sum_g f(g)\operatorname{tr}(\rho_i(g)\rho_i(h^{-1})) \\
=& \sum_i \dim W_i \operatorname{tr}(\rho_i(h^{-1})\hat{f}(\rho_i))
\end{aligned}$$

となる．この式の一行目の展開は，行列成分による展開であるが，この展開は W_i の基底の取り方（よって同値類の代表元のとり方にも）依存している．しかし，最後の等式では，同値類の代表元のとり方に依存していない．その意味で展開はただ一つである．

3.12 誘導表現とフロベニウス相互律

有限群 G の部分群 H を考える．V を G の表現として，これを H へ制限したものを $\mathrm{Res}_H^G V$ とかく．この章では，逆に H の表現から G の表現を構成する方法を紹介する．

G 加群 V を考えて $W \subset V$ を H 不変な部分空間とする．つまり $HW \subset W$ とする．$gW = \{gw | w \in W\}$ としたとき，$gHW = gW$ であるので，G/H の元 σ を取ってきて，gW を σW と書くことにする．

定義 3.12. 表現 V が W から誘導される（誘導表現）とは，

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma W$$

となること．つまり V の任意の元は $\{\sigma W\}_{\sigma \in G/H}$ の元の和として書け，その書き方は唯一つであること．このとき $V = \mathrm{Ind}_H^G W = \mathrm{Ind} W$ と書く．

補足 3.59. $V = \mathrm{Ind}_H^G W = \oplus \sigma W$ となるとき，これを H へ制限したとしても W の直和になるとは限らない．実際 σW へ H を左からかけても不変とは限らない．もちろん，少なくも一つは H 加群 W が現れることはわかる．

例 3.60. G/H への G の作用を考えて，随伴した置換表現 V を考える．これは H の自明表現から誘導される．

Proof. 表現空間 V の基底は $\{e_\sigma|\sigma \in G/H\}$ である．また $W = \mathbb{C}e_H$ とする．このとき $e_\sigma = \sigma e_H$ であるので，$V = \oplus_{\sigma\in G/H}\sigma W$ となる． □

例 3.61. G の正則表現 R_G は H の正則表現 R_H から誘導される．

Proof. R_G の基底は $\{e_g|g \in G\}$ であった．一方，R_H の基底は $\{e_h|h \in H\}$ である．そこで $g \in G$ に対して，$e_g \in gR_H = \sigma R_H$ である．これより誘導されることがわかる． □

命題 3.62. 有限群 G の部分群 H を考える．H の表現 W に対して，ある G の表現 V が存在して $V = \mathrm{Ind}_H^G W$ となる．さらにこのような V は（同型を除いて）唯一つである．群環の言葉を使って書けば，

$$\mathrm{Ind}W = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$$

である．ここで G の作用は $g(g' \otimes w) = gg' \otimes w$ で定義している．

また，$W = \oplus W_i$ なら $\mathrm{Ind}W = \oplus \mathrm{Ind}W_i$ となる．

Proof. まず構成からみる．$\sigma \in G/H$ の代表元 $g_\sigma \in G$ を選んでおく．$H \in G/H$ の代表元は e としておく．各 coset $\sigma \in G/H$ に対して W のコピー W^σ を考える．つまり $W \ni w \mapsto g_\sigma w \in W^\sigma$ と対応させる．さて $V = \oplus W^\sigma$ というベクトル空間を考える．V の元は $v = \sum g_\sigma w_\sigma$（$w_\sigma \in W$）という表示をもち，この表示は唯一つである．$g \in G$ に対して，$[gg_\sigma] = \tau \in G/H$ としたとき $gg_\sigma = g_\tau h$ となる $h \in H$ が存在する（ここで g_τ はすでに選んであるので，このような $h \in H$ は唯一つに決まる）．そこで

$$g(g_\sigma w_\sigma) := g_\tau(hw_\sigma) \in W^\tau \subset W$$

と定義する．これが V への作用になることを確かめよう．$g' \in G$ に対して $g'g_\tau = g_\rho h'$ とする．このとき

$$g'(g(g_\sigma w_\sigma)) = g'(g_\tau(hw_\sigma)) = g_\rho(h'(hw_\sigma))$$

一方，$(g'g)g_\sigma = g'(gg_\sigma) = g'g_\tau h = g_\rho h'h$ であるので，

$$(g'g)(g_\sigma w_\sigma) = g_\rho((h'h)w_\sigma) = g_\rho(h'(hw_\sigma))$$

となる．以上から $V = \mathrm{Ind}_H^G W$ が構成できた．

次に唯一つであることを証明する．$V' = \mathrm{Ind}_H^G W$ とする．このとき V' の任意の元は $v = \sum g_\sigma w_\sigma$（$w_\sigma \in W$）という形をしている．もちろん g_σ は上で選んだ代表元である．そこで $g \in G$ に対して，$gg_\sigma = g_\tau h$ と書ける．そして，

$$g(g_\sigma w_\sigma) = (gg_\sigma)w_\sigma = (g_\tau h)w_\sigma = g_\tau(hw_\sigma)$$

となる．これは上で構成した V の作用と全く同じである．よって $\mathrm{Ind}_H^G W$ は唯一つである．

また $W = \oplus W_i$ なら $\mathrm{Ind}W = \oplus \mathrm{Ind}W_i$ であることは明らか． □

補足 3.63. 任意の G の表現 V が誘導表現とはかぎらないことに注意．また誘導表現の存在は $\mathrm{Ind}W \oplus W' = \mathrm{Ind}W \oplus \mathrm{Ind}W'$ がわかっているなら，次のようにして証明できる．$R_H = \sum W_i^{\oplus \dim W_i}$ とする．$R_G = \mathrm{Ind}R_H$ はすでにのべた．

$$R_G = \mathrm{Ind}R_H = \mathrm{Ind} \oplus_i W_i^{\oplus \dim W_i} = \oplus_i (\mathrm{Ind}W_i)^{\oplus \dim W_i}$$

であるので，任意の H の既約表現 W_i に対する誘導表現の存在がわかる．よって任意の H の表現に対する誘導表現の存在がわかる.（これは，R_G 内には任意の既約表現 V_i が含まれるが，それが誘導表現となるとは言っていない．例えば，$\mathrm{Ind}W = V_i \oplus V_j$ となることがありえる）

例 3.64. $H \subset K \subset G$ という部分群の列を考える．また W を H の表現とする．このとき

$$\mathrm{Ind}_H^G(W) = \mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{Ind}_H^K W)$$

が成立する．

Proof. $\mathrm{Ind}_H^K = \mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}H} W$ である．よって

$$\mathrm{Ind}_H^G(W) = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}K} (\mathbb{C}K \otimes_{\mathbb{C}H} W) = \mathrm{Ind}_K^G(\mathrm{Ind}_H^K W)$$

となる． □

例 3.65. 誘導表現は次のようにして幾何学的に構成できる．W を $H \subset G$ の表現空間とする．このとき

$$\mathrm{Ind}W \cong \mathrm{Hom}_H(\mathbb{C}G, W) \cong \{f : G \to W \mid f(gh) = h^{-1} f(g), \quad h \in H, g \in G\}$$

ここで，作用は $F \in \mathrm{Hom}_H(\mathbb{C}G, W)$ への作用は $(g'F)(\sum a_g g) = F(\sum a_g g g')$ である．また，H 同変 W 値関数空間への作用は $(g'f)(g) = f(g'^{-1} g)$ である．

補足 3.66. 右辺は次のような意味である．G/H 上のベクトル束として，

$$\mathbb{S}_W = G \times_H W \mapsto G/H.$$

を考える．このとき切断全体の空間を $\Gamma(\mathbb{S}_W)$ とすれば，

$$\Gamma(\mathbb{S}_W) = \{f : G \to W \mid f(gh) = h^{-1} f(g), \quad h \in H, g \in G\}$$

となる．

Proof. まず，$F \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}G, W)$ への G の作用は $(g'F)(\sum a_g g) = F(\sum a_g g g')$ と定義する．実際，このとき $(g'F)(h \sum a_g g) = F(\sum a_g h g g') = hF(\sum a_g g g') = h((g'F)(\sum a_g g))$ となり $g'F \in \mathrm{Hom}_H(\mathbb{C}G, W)$ となる（このように右からの作用で行う必要がある）．

また，二番目の対応は，$F:\mathbb{C}G\to W$ に対して $f(g):=F(g^{-1})$ とすればよい．このとき $f(gh)=F((gh)^{-1})=h^{-1}F(g^{-1})=h^{-1}f(g)$ を満たす．逆に条件を満たす $f:G\to W$ に対して，$F(\sum a_g g):=\sum a_g f(g^{-1})$ とすれば，

$$h(F(\sum a_g g))=\sum a_g hf(g^{-1})=\sum a_g f(g^{-1}h^{-1})=\sum a_g F(hg)=F(h\sum a_g g)$$

となる．

そこで $\mathrm{Ind}W\cong\mathrm{Hom}_H(\mathbb{C}G,W)$ であることを確かめよう．各 $\sigma\in G/H$ に対して代表元 $g_\sigma\in G$ を選んでおく．このとき $F\in\mathrm{Hom}_H(\mathbb{C}G,W)$ に対して，

$$\Phi:\mathrm{Hom}_H(\mathbb{C}G,W)\ni F\mapsto\sum_{\sigma\in G/H}g_\sigma\otimes F(g_\sigma^{-1})\in\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}W=\mathrm{Ind}W$$

という線形写像を定義する．まず，これが well-defined であることを証明しよう．他の代表元をとった場合には $g'_\sigma=g_\sigma h$ と書けるので，

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in G/H}g'_\sigma\otimes F((g'_\sigma)^{-1})&=\sum_{\sigma\in G/H}g_\sigma h\otimes F(h^{-1}g_\sigma^{-1})\\&=\sum_{\sigma\in G/H}g_\sigma\otimes hF(h^{-1}g_\sigma^{-1})=\sum_{\sigma\in G/H}g_\sigma\otimes F(g_\sigma^{-1}).\end{aligned}$$

となり，well-defined である．

次に Φ が G 線形であることを見てみる．

$$\Phi((g'F))=\sum g_\sigma\otimes(g'F)(g_\sigma^{-1})=\sum g_\sigma\otimes F(g_\sigma^{-1}g')$$

そこで $g'g_\sigma=g_\tau h$ とすれば，

$$g'\Phi(F)=\sum_\sigma g'g_\sigma\otimes F(g_\sigma^{-1})=\sum_\tau g_\tau h\otimes F((g'^{-1}g_\tau h)^{-1})=\sum_\tau g_\tau\otimes F(g_\tau^{-1}g')$$

となる．以上から Φ は G 線形であることもわかる．

この Φ の逆写像を作ろう．$v=\sum g_\sigma\otimes w_\sigma$ に対して，$\Psi(v)(hg_\sigma^{-1}):=F_v(hg_\sigma^{-1})=hw_\sigma$ と定義する．これより $F_v\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}G,W)$ へ拡張できる．実際，$g\in\sigma$ とすれば，$g=g_\sigma h$ とかけるので $g^{-1}=h^{-1}g_\sigma^{-1}$ となる．よって，任意の元 g' は $g'=hg_\sigma^{-1}$ という表示をもつ．

このとき $F_v(h'hg_\sigma^{-1})=(h'h)w_\sigma=h'(hw_\sigma)=h'F_v(hg_\sigma^{-1})$ となるので $F_v\in\mathrm{Hom}_H(\mathbb{C}G,W)$ である．さらに

$$\Phi(\Psi(v))=\sum g_\sigma\otimes F_v(g_\sigma^{-1})=\sum g_\sigma\otimes w_\sigma,$$

であるので $\Phi\Psi=\mathrm{id}$．

また

$$(\Psi\Phi(F))(hg_\sigma^{-1})=\Psi(\sum g_\sigma\otimes F(g_\sigma^{-1}))(hg_\sigma^{-1})=hF(g_\sigma^{-1})=F(hg_\sigma^{-1})$$

であるので $\Psi\Phi=\mathrm{id}$ である． □

さて，次に誘導表現の指標を考えたい．

H 加群 W に対する表現行列を T として，上のように代表元 $\{g_{\sigma_i}\}_{\sigma i\in G/H}$（$|G/H| = n$）を選んでおく．また $g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_j} \notin H$ のときに $T(g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_j}) = 0$ と定めておく．このとき誘導表現の表現行列は

$$g \mapsto \begin{pmatrix} T(g_{\sigma_1}^{-1}gg_{\sigma_1}) & \cdots & T(g_{\sigma_1}^{-1}gg_{\sigma_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T(g_{\sigma_n}^{-1}gg_{\sigma_1}) & \cdots & T(g_{\sigma_n}^{-1}gg_{\sigma_n}) \end{pmatrix}$$

となる．この表示から $\mathrm{Ind}W$ の指標を計算してみよう．$g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i} \in H$ となるための必要十分条件は $g\sigma_i = \sigma_i$ である．そこで，

$$\chi_{\mathrm{Ind}W}(g) = \sum_{i \text{ such that } g\sigma_i = \sigma_i} \chi_W(g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}),$$

となる．

具体的には次のようになる（後で有用）．

命題 3.67 (誘導表現の指標). C を G のある共役類とする．また $C \cap H$ が H の共役類 $D_1, \cdots, D_r$ に分解されたとする．W を H の表現とする．このとき

$$\chi_{\mathrm{Ind}W}(C) = \frac{|G|}{|H|}\sum_{i=1}^{r}\frac{|D_i|}{|C|}\chi_W(D_i)$$

が成立する．特に，W が自明表現なら

$$\chi_{\mathrm{Ind}W}(C) = \frac{|G/H|}{|C|} \cdot |C \cap H|$$

Proof. まず，$c \in C$ とすれば，$gcg^{-1} \in C$ である．よって $c \in C \cap H$ に対して，$c \in C$ により，$hch^{-1} \in C$（$\forall h \in H$）であり，$c \in H$ より $hch^{-1} \in H$ である．よって $C \cap H$ に H が随伴で作用することができる．そこで軌道を考えれば，$C \cap H = D_1 \cup \cdots \cup D_r$ である．

$C \cap H = \emptyset$ の場合には，$g \in C$ として，$g_\sigma^{-1}gg_\sigma \in C$ であるが，$g_\sigma^{-1}gg_\sigma \in H$ となることは無いので，上の行列表示において $T(g_\sigma^{-1}gg_\sigma) = 0$ となる．この場合には $\chi_{\mathrm{Ind}W}(C) = 0$ となる．

そこで $C \cap H \neq \emptyset$ の場合を考える．上のことから $C \cap H = D_1 \cup \cdots \cup D_r$ とする．また $G/H = \{H, g_{\sigma_1}H, \cdots, g_{\sigma_n}H\}$ とする．指標は類関数であるので，共役類上での値は変わらない．よって，

$$\chi_{\mathrm{Ind}W}(C) = \frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}\chi_{\mathrm{Ind}W}(g) = \frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}\sum_{i \text{ such that } g\sigma_i = \sigma_i}\chi_W(g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}),$$

となる．また $g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\in H$ のときのみ和をとるのであるが，このときは $g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\in C$ であるので，$g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\in H\cap C$ となる．つまり，$g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\in D_k$ となる k が存在する．また $g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\notin H$ のときは，$g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\in C$ となるが，$g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\notin D_k$（$\forall k$）となる．

さて，χ_W は D_k で同じ値をとる．そこで，和を

$$\sum_{g\in C}\sum_{i \text{ such that } g\sigma_i=\sigma_i}$$

でとったときに，何回 $g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\in D_k$（$i=1,\cdots,n,\ g\in C$）となるかを数える，その数は $n|D_k|=\frac{|G|}{|K|}|D_k|$ である．実際，σ_i を固定して $\{g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}|g\in C\}$ を考えたとき，

$$C\ni g\mapsto g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}\in C$$

は全単射であるので，$|D_k|=\#(\{g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i}|g\in C\}\cap D_k)$ である．さらに，これを $i=1,\cdots,n$ と動かすので，n 倍すれば，上の和において $\chi_W(D_k)$ という値を $n|D_k|$ 回とることになる．よって，

$$\frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}\chi_{\mathrm{Ind}W}(g)=\frac{1}{|C|}\sum_{g\in C}\sum_{i \text{ such that } g\sigma_i=\sigma_i}\chi_W(g_{\sigma_i}^{-1}gg_{\sigma_i})=\frac{|G|}{|H|}\frac{1}{|C|}\sum_{k=1}^{r}|D_k|\chi_W(D_k)$$

となる．また W が自明表現のときは $\chi_W(D_k)=1$ であり，$\sum|D_k|=|C\cap H|$ であるので，

$$\chi_{\mathrm{Ind}W}(C)=\frac{|G/H|}{|C|}\cdot|C\cap H|$$

となる． □

次にフロベニウスの相互律について述べたい．フロベニウス相互律とは誘導表現と制限表現と関係をのべたものである．

W に対して $\mathrm{Ind}W$ が唯一つ定まり，$W=\oplus W_i$ なら $\mathrm{Ind}W=\oplus\mathrm{Ind}W_i$ であるので，表現環の群準同形

$$\mathrm{Ind}:R(H)\ni W\mapsto \mathrm{Ind}_H^G W\in R(G)$$

を得たことになる（一般に環準同形にはなるとは限らない）．さらに逆方向の写像（逆写像ではない）は環準同形

$$\mathrm{Res}:R(G)\ni V\mapsto \mathrm{Res}_H^G V\in R(H)$$

である．

例 3.68. G の表現 U 及び，H の表現 W を考える．このとき

$$U\otimes\mathrm{Ind}W=\mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(U)\otimes W)$$

が成立する．特に，W を自明表現とすれば，$\mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(U))=U\otimes P$ となる．ここで P は G の G/H への作用に随伴した置換表現である．

Proof. 線形同型写像

$$\Phi : U \otimes \mathrm{Ind}W \ni u \otimes g_\sigma \cdot w_\sigma \mapsto g_\sigma \cdot (g_\sigma^{-1} u \otimes w_\sigma) \in \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(U) \otimes W)$$

が G 線形であることを確かめればよい．$g \in G$ を $[gg_\sigma] = \tau \in G/H$ とすれば，$gg_\sigma = g_\tau h$ となる h がただ一つ定まる．そして誘導表現への作用を

$$g\Phi(u \otimes g_\sigma \cdot w_\sigma) = g(g_\sigma \cdot (g_\sigma^{-1} u \otimes w_\sigma)) = g_\tau \cdot (hg_\sigma^{-1} u \otimes hw_\sigma)$$

と定めるのであった．一方，

$$g(u \otimes g_\sigma \cdot w_\sigma) = gu \otimes g_\tau \cdot hw_\sigma$$

となる．そこで

$$\Phi(g(u \otimes g_\sigma \cdot w_\sigma)) = \Phi(gu \otimes g_\tau hw_\sigma) = g_\tau \cdot (g_\tau^{-1} gu \otimes hw_\sigma) = g_\tau \cdot (hg_\sigma^{-1} u \otimes hw_\sigma)$$

以上から G 線形であることがわかった． □

誘導表現で重要なフロベニウスの相互律を述べるために次の命題が必要である．

命題 3.69. W を H 加群として．U を G 加群とする．このとき，ベクトル空間としての同型

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}U) = \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}W, U)$$

が成立する．つまり H 線形写像 $\phi : W \to U = \mathrm{Res}(U)$ は G 線形写像 $\tilde{\phi} : \mathrm{Ind}W \to U$ へと一意的に拡張できる（拡張とは $W \subset \mathrm{Ind}W$ へ制限したら ϕ になることである）．

Proof. $\mathrm{Ind}W = \oplus_{\sigma \in G/H} \sigma W$ とする．$\phi \in \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}U)$ を考える．この写像を $\mathrm{Ind}W \to U$ へと拡張する．σW 上で $\tilde{\phi}$ を

$$\tilde{\phi} : \sigma W \xrightarrow{g_\sigma^{-1}} W \xrightarrow{\phi} U \xrightarrow{g_\sigma} U, \quad (\tilde{\phi}(g_\sigma w) = g_\sigma \phi(w))$$

として定義する．ここで $[g_\sigma] = \sigma \in G/H$．このとき，これが g_σ のとり方に依らないこと，G 線形であること，一意性を証明すればよい．まず $g'_\sigma = g_\sigma h$ として，$\tilde{\phi}' = g'_\sigma \phi (g'_\sigma)^{-1}$ とすれば，

$$\tilde{\phi}'(g_\sigma w) = g_\sigma h \phi((g_\sigma h)^{-1} g_\sigma w) = g_\sigma h h^{-1} \phi(g_\sigma w) = \tilde{\phi}(g_\sigma w)$$

となるので代表元のとり方によらない．また G 線形であることは，$gg_\sigma = g_\tau h$ とすれば，

$$\tilde{\phi}(gg_\sigma w) = g_\tau \phi(g_\tau^{-1} g_\tau hw) = g_\tau \phi(hw) = g_\tau h\phi(w) = gg_\sigma \phi(w) = g\tilde{\phi}(g_\sigma w)$$

となることからわかる．

次に拡張の一意性．$\phi: W \to U$ の拡張 $\tilde{\phi}': \mathrm{Ind}W \to U$ が存在したとする．しかし $\tilde{\phi}'(g_\sigma w) = g_\sigma \tilde{\phi}'(w) = g_\sigma \phi(w)$ となるので，これは ϕ と一致する．よって拡張は一意的である．

また $\phi: W \to U, \phi': W \to U$ が在ったときに，その拡張が $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}': \mathrm{Ind}W \to U$ であるとする．このとき W へ制限すれば $\phi = \phi'$ となる．以上から $\mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}U) \to \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}W, U)$ が単射であることがわかった．全射は G 線形写像 $\Phi: \mathrm{Ind}W \to U$ に対して，$\Phi|_W: W \to U$ を考えれば，この拡張が存在するが一意性から Φ である．

□

系 3.70 (Frobenius Resiprocity（フロベニウス相互律）)**.** W を H 加群，U を G 加群とする．このとき

$$(\chi_{\mathrm{Ind}W}, \chi_U)_G = (\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}U})_H$$

が成立する．これは，W，U を既約とすれば，$\mathrm{Ind}W$ 内の U の重複度は $\mathrm{Res}U$ 内での W の重複度に一致することを意味する．

Proof. $\mathrm{Ind}\oplus W_i = \oplus \mathrm{Ind}W_i, \mathrm{Res}\oplus U_i = \oplus \mathrm{Res}U_i$ 及び直和表現の指標の公式を使えば．W, U をどちらも既約として構わない．既約とすれば，左辺は $\dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}W, U)$ に一致し，右辺は $\dim \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}(U))$ に一致する．よって前命題から成立する．

□

例 3.71. $\mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3$ を考える．$\mathfrak{S}_2$ の既約表現は自明表現 U_2 及び，一次元交代表現 U_2' である．また $\mathfrak{S}_3$ の既約表現は自明表現 U_3, 交代表現 U_3', 基本表現 V_2 である．$\mathrm{Res}U_3 = U_2$, $\mathrm{Res}U_3' = U_2'$, $\mathrm{Res}V_3 = U_2 \oplus U_2'$ である（これは単に作用を考えてもいいし，指標を使ってもわかる）．

そこで，フロベニウス相互律から

$$\begin{aligned}
&(\chi_{\mathrm{Ind}U_2}, \chi_{U_3}) = (\chi_{U_2}, \chi_{\mathrm{Res}U_3}) = 1, \quad (\chi_{\mathrm{Ind}U_2'}, \chi_{U_3}) = (\chi_{U_2'}, \chi_{\mathrm{Res}U_3}) = 0, \\
&(\chi_{\mathrm{Ind}U_2}, \chi_{U_3'}) = (\chi_{U_2}, \chi_{\mathrm{Res}U_3'}) = 0, \quad (\chi_{\mathrm{Ind}U_2'}, \chi_{U_3'}) = (\chi_{U_2'}, \chi_{\mathrm{Res}U_3'}) = 1, \\
&(\chi_{\mathrm{Ind}U_2}, \chi_{V_3}) = (\chi_{U_2}, \chi_{\mathrm{Res}V_3}) = 1, \quad (\chi_{\mathrm{Ind}U_2'}, \chi_{V_3}) = (\chi_{U_2'}, \chi_{\mathrm{Res}V_3}) = 1,
\end{aligned}$$

となり，誘導表現は

$$\mathrm{Ind}U_2 = U_3 \oplus V_3, \quad \mathrm{Ind}U_2' = U_3' \oplus V_3$$

3.13 実構造．四元数構造

今までは G の複素ベクトル空間への表現について考えてきた．ここでは実ベクトル空間への表現について考える．

定義 3.13 (実構造，四元数構造)． 1. G の実ベクトル空間 V_0 への表現を考える．$V = V_0 \otimes \mathbb{C}$ は複素ベクトル空間であり，G の表現空間になるが，このような表現 V を**実**とよぶ．言い方を変えれば，表現 V に G の作用と可換な実構造が入ることであり，$V_0 = V^{\Re}$ が G の表現空間となるものである．

2. G の（複素）表現 V が**四元数表現**とは，G と可換な歪線形写像 $J; V \to V$ で，$J^2 = -\mathrm{id}$ となるものが入ることである（このとき，$\dim_{\mathbb{C}} V$ は偶数であり，J が四元数構造を与えることがわかる）．

補題 3.72. V を既約 G 加群とする．これが**実**であるための必要十分条件は G で保存される**非退化対称形式** B が入ることである．また**四元数**であるための必要十分条件は G で保存される**非退化交代形式** B が入ること

Proof. B を G で保存される非退化対称形式とする．一方，V には必ず G で保存される非退化エルミート形式は入るのであった．そこで

$$\phi : V \xrightarrow{B} V^* \xrightarrow{H} V$$

という G の作用と可換な複素歪線形同型写像 ϕ が得られる．つまり $x \in V$ に対して $B(x,y) = H(\phi(x), y)$ を満たすものである．非退化性からこのような $\phi(x) \in V$ は唯一つであるので well-defined である．さらに，ϕ^2 は G 線形同型であり V 既約より，$\phi^2 = \lambda \mathrm{id}$（$\lambda \in \mathbb{C}^*$）となる．また

$$H(\phi(x), y) = B(x,y) = B(y,x) = H(\phi(y), x) = \overline{H(x, \phi(y))}$$

となる．よって $H(\phi^2(x), y) = \overline{H(\phi(x), \phi(y))}$, $\overline{H(x, \phi^2(y))} = H(\phi(x), \phi(y))$ であるので，

$$\overline{\lambda} H(x,y) = H(\phi^2(x), y) = H(x, \phi^2(y)) = \lambda H(x,y)$$

となるので $\lambda = \overline{\lambda}$ である．よって λ は零でない実である．また

$$\lambda H(x,x) = H(\phi^2(x), x) = H(\phi(x), \phi(x))$$

となることから $\lambda > 0$ である．そこで適当に H を正規化して $\phi^2 = \mathrm{id}$ となる．よって ϕ は G と可換な実構造である．逆に実構造 ϕ がある場合には $B(x,y) = H(\phi(x), y)$ とすれば，非退化対称形式が定まる．

B を G で保存される非退化交代形式とすれば，先ほどと異なるのは

$$\lambda H(x,x) = H(\phi^2(x), x) = B(\phi(x), x) = -B(x, \phi(x)) = -H(\phi(x), \phi(x))$$

のところである．つまり H を正規化して $\phi^2 = -\mathrm{id}$ とできる．つまり ϕ は G の作用と可換な四元数構造である． □

例 3.73. G の既約表現 V を考える．これが実構造を持つとする．このとき実表現 V_0 は既約である．実際，可約であるとすると不変部分空間 $W_0 \subset V_0$ が存在するが $W_0 \otimes \mathbb{C}$ は V の不変部分空間になってしまい矛盾する．

上の例とは逆に，一般には実既約表現は複素表現に拡張しても既約とは限らない．

例 3.74. $\mathbb{Z}_n$（$n > 2$）の $\mathbb{R}^2$ への次のような表現を考える．

$$\rho : k \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$$

これは既約である．実際これは回転に対応するので，$\mathbb{R}^2$ 内にこの作用で不変な原点を通る直線は存在しない．しかし $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}$ 上へ拡張すれば，可換群であるので既約表現はすべて一次元である．よって，$\mathbb{C}^2$ は可約となる．

実既約表現は複素へ拡張しても既約とは限らないが，次のようなことがわかる．

命題 3.75. V_0 を実表現として既約と仮定する．このとき $V = V_0 \otimes \mathbb{C}$ に対して次のいずれかが成立する．

1. V は既約．

2. V は二つの既約成分へ分解され，それらは互いに複素共役な表現である．

Proof. V が既約でないと仮定する．このとき既約な G 不変部分空間 $W \subset V$ が存在する．ここで注意すべきはもとの表現行列は V_0 からくる基底をとって書けば実行列になるが．いま W の基底は実基底からつくったわけではないので表現行列は複素行列になる可能性がある．もう少し詳しく見てみる．$\{v_i\}_i$ を V_0 の基底とし表現行列を (g_{ij})（$g_{ij} \in \mathbb{R}$）とする．$\{w_i = \sum_j v_j \otimes \alpha_i^j\}$ を W の基底として表現行列を G_{ij} とする．このとき

$$\begin{aligned} gw_i &= \sum_{j,l} g_{jl} v_l \otimes \alpha_i^j = \sum_l v_l \otimes (\sum_{j=1}^{\dim V} g_{jl}\alpha_i^j) \\ &= \sum_p G_{ip} w_p = \sum_{p,l} G_{ip} v_l \otimes \alpha_p^l = \sum_l v_l \otimes (\sum_{p=1}^{\dim W} G_{ip}\alpha_p^l) \end{aligned}$$

となる．よって

$$\sum_{p=1}^{\dim W} G_{ip}\alpha_p^l = \sum_{j=1}^{\dim V} g_{jl}\alpha_i^j$$

をみたすような $\{G_{ip}\}$ が表現行列である．このように g_{jl} が実だからといって，G_{ip} は実とは限らないのである．

さて $V = V_0 \otimes \mathbb{C}$ 内で複素共役写像があるので, $\overline{W} := \{\bar{w} \mid w \in W\}$ を定義できる．そして，

$$W \ni z(v \otimes \alpha) \mapsto \overline{z}(v \otimes \overline{\alpha}) \in \overline{W}$$

であるので互いに複素共役である．また

$$g(\overline{w}_i) = g(\sum v_i \otimes \overline{\alpha}_i^j) = \overline{\sum g v_i \otimes \alpha_i^j} \in \overline{W}$$

であるので $\overline{W}$ も G 不変部分空間であり，

$$\overline{\sum g v_i \otimes \alpha_i^j} = \overline{\sum_p G_{ip} w_p} = \sum_p \overline{G_{ip}}\,\overline{w_p}$$

となるので，これは W の複素共役表現となる．よって W が既約なので $\overline{W}$ も既約である．また $W \cap \overline{W} \neq \{0\}$ と仮定すると，これは不変部分空間であり W が既約であることに反する．よって $W \oplus \overline{W} \subset V$ となる．そこで

$$W^{\Re} := \{w + \overline{w} \mid w \in W\} \subset W \oplus \overline{W}$$

とする．これは実ベクトル空間であり実次元は $2\dim_{\mathbb{C}} W$ である．実際，実基底として $\{w_p + \overline{w_p}, i w_p + \overline{i w_p}\}$ が取れる．よって $W^{\Re} \subset V_0$ である．また G の実表現空間となる，実際 $G_{ip} = G_{ip}^{\Re} + \sqrt{-1} G_{ip}^{\Im}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
g(w_i + \overline{w_i}) &= \sum_p G_{ip} w_p + \overline{G}_{ip} \bar{w}_p \\
&= \sum_p G_{ip}^{\Re} w_p + \sqrt{-1} G_{ip}^{\mathrm{im}} w_p + G_{ip}^{\Re} \overline{w_p} - \sqrt{-1} G_{ip}^{\Im} \overline{w_p} \\
&= \sum_p G_{ip}^{\Re}(w_p + \overline{w_p}) + G_{ip}^{\Im}(\sqrt{-1} w_p + \overline{\sqrt{-1} w_p}) \in W^{\Re}
\end{aligned}$$

などとなる．V_0 が既約なので $W^{\Re} = V_0$ であり，$W \oplus \overline{W} = V$ となる． □

V を既約 G 加群とする．V 内に実構造，四元数構造が入る場合には，$V \cong V^*$ が成立することをみた．逆に $V \cong V^*$ が成立した場合を考えると，これは V 上に非退化な G 不変な双線形形式 B が入ることを意味する．

$$B_{\pm}(x, y) = B(x, y) \pm B(y, x)$$

とすれば，$B_+(x, y)$ は G と可換な非退化対称形式であり，$B_-(x, y)$ は G と可換な非退化交代形式となる．シューアの補題を使えば，$\mathrm{Hom}_G(V, V^*) = \mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}$ である．$\mathrm{Hom}_G(V, V)$ は非退化 G 不変双線形形式の全体である．よって B_+, B_- のいずれかは消えることになる．以上から，**V が既約で $V \cong V^*$ なら，G 不変な非退化対称形式か非退化交代形式のいずれかが唯一つ入る**ことになる．

次に，指標について考えよう．また一般に $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ が成立したので，実構造および四元数構造が入るなら指標は実値である．逆に V を既約として，指標が実値なら $V \cong V^*$ が成立するので，実構造または四元数構造が入る．以上をまとめると

定理 3.76. V を既約な G 加群とする．このとき次のいずれかが成立する．

1. χ_V は実値でなく．V 上には G 不変な非退化双線形形式が入らない．

2. χ_V は実値であり，V 上に G と可換な実構造が入る．また V 上には G 不変な非退化対称形式が入る．

3. χ_V は実値であり，V 上に G と可換な四元数構造が入る．また V 上には G 不変な非退化交代形式が入る．

例 3.77. V を既約とする．このとき次が成立する．

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g^2)=\begin{cases}0 & V\text{ には }G\text{ 不変な実構造も四元数構造も入らない}\\ 1 & V\text{ は実}\\ -1 & V\text{ は四元数}\end{cases}$$

Proof. 以前見たように，

$$\chi_{\Lambda^2V}(g)=\frac{1}{2}(\chi_V(g)^2-\chi_V(g^2)),\quad \chi_{S^2V}(g)=\frac{1}{2}(\chi_V(g)^2+\chi_V(g^2))$$

である．また

$$(\chi_{V^*},\chi_V)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_{V^*}(g)}\chi_V(g)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)^2$$

である．さらに，Λ^2V^* を分解したときに自明表現があれば，それが交代形式に対応し，$S^2(V)$ を分解したときの自明表現があれば，それが対称形式に対応する．以上のことがらを使えば証明できる． □

練習問題 3.78. 1. V,W が実表現なら，$V\otimes W$ は実である．

2. V,W が四元数表現なら $V\otimes W$ は実である．

3. V に対して $V^*\otimes V$ は実である．

4. V が四元数なら Λ^kV は k が偶数なら実，k が奇数なら四元数

（ヒント：J_1,J_2 を V,W 上の実または四元数構造として $J_1\otimes J_2$ を考えよ．）

Proof. $V^*\otimes V$ が実であることのみ証明しておこう．

$$B:(V^*\otimes V)\times(V^*\otimes V)\ni(f_1\otimes v_1,f_2\otimes v_2)\mapsto\langle f_1,v_2\rangle\langle f_2,v_1\rangle\in\mathbb{C}$$

として対称形式を入れれば，これは G 不変であり，G 加群として $\overline{V^*\otimes V}=(V^*\otimes V)^*=V^*\otimes V$ である．そこで $B(x,y)=H(\phi(x),y)$ により実構造 ϕ を定めればよい．例えば，$\{e_i\}_i$ を V のユニタリ基底として $\{e_i^*\}_i$ を双対基底とする．これがユニタリ基底となるような内積をいれれば，G 不変であることがわかる．この基底によって J を具体的に書けば，$J^2=1$ であることがわかる． □

4　対称群の表現論

Section 3.10.3 で見たように，群環内の原始的冪等元を見つければ，既約分解をえることができる．これを対称群で行ってみる．

4.1　既約表現の構成とヤング対称化作用素

$\mathfrak{S}_d$ を d 次対称群とする．これは有限群なので，既約表現の数は共役類の個数と一致する．そして共役類の個数は d の分割 $d = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$（$\lambda_1 \geq \cdots \lambda_k \geq 1$）の個数と対応することはすでにみた.（共役類一つに対して d の分割が一つ対応する. see Section 2）．この**分割の個数**を $p(d)$ と**書き分割数とよぶ.**

この $p(d)$ に対して次の母関数表示がある．

$$\sum_{d=0}^{\infty} p(d)t^d = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-t^n} \right) = (1+t+t^2+\cdots)(1+t^2+t^4+\cdots)(1+t^3+t^6+\cdots)\cdots$$

これは $|t| < 1$ で収束する．

Proof. 例えば t^d を考える．右辺の $1+t+t^2+\cdots$ から t^{k_1}，$1+t^2+t^4+\cdots$ から t^{2k_2} と取って行き，$t^d = t^{k_1}t^{2k_2}\cdots t^{lk_l}$ となったとする（$l \geq d$）．これを

$$\underbrace{l+\cdots+l}_{k_l} + \cdots + \underbrace{2+\cdots+2}_{k_2} + \underbrace{1+\cdots+1}_{k_1}$$

という分割に対応させればよい．収束することは，解析入門などを参照にすればわかる.（この $\sum p(d)t^d$ の漸近挙動などの研究もある）． □

さて，d の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ に対して，i 行目に λ_i 個の箱を並べるて，あるヤング図形を対応させる．**ヤング図形**とは，左側と上側に壁があると思って，その角に箱を幾つかつめていったものである．ただし，下に行くほど箱の数は同じまたは減っていくとしている.（下図を参照）．よって逆に箱の数が d のヤング図形に対して，d の分割が定まる．ヤング図形に対して，**行数を**（$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ **なら** k）$l(\lambda)$ **とかき，分割** λ **の長さ**とよぶ.

また d の分割 λ に対するヤング図形に $1, \cdots, d$ までの数を入れていったものを**ヤング盤**とよぶ．また各行において左から右に数が増加し，各列で上から下に数が増加したようなヤング盤を**標準ヤング盤**という.

下の図は 9 の分割 $9 = 3+3+2+1$ の図である．また右下図はある標準ヤング盤を書いている.

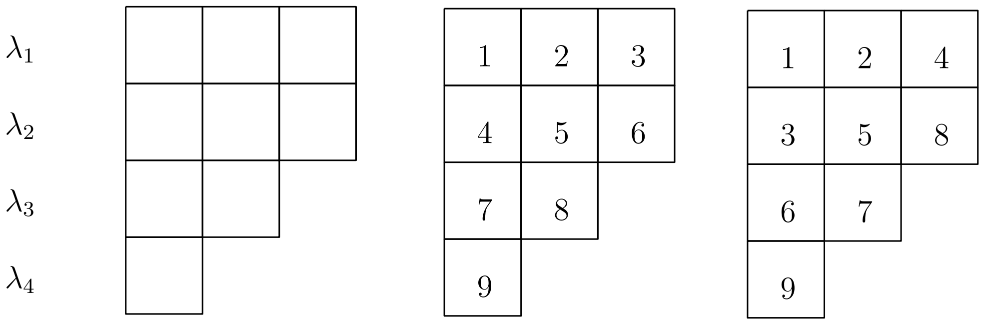


図 1

また，分割 λ に対して，その**共役な分割とはヤング図形 λ に対して，行と列を入れ替えた図形に対応するもの**である．例えば $(3,3,2,1)$ の共役は $(4,3,2)$ である．箱の数は変わらないので，同じ数 d に対する分割になっている．

さて，この subsection では，ヤング図形を使って $\mathfrak{S}_d$ の正則表現から，ある既約表現への射影を与えることが目標である．(Section 3 で論じた射影公式は，既約表現の直和への射影であり，既約表現を一つ取り出すものではなかった）．

分割 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k$ に対するあるヤング盤 T を考える．このとき次の二つの部分群が定義できる．

$$\begin{aligned} P=&P_\lambda=\{g\in\mathfrak{S}_d\mid\ g\text{ は } T \text{ の各行を保存する }\}\cong\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\cdots\mathfrak{S}_{\lambda_k},\\ Q=&Q_\lambda=\{g\in\mathfrak{S}_d\mid\ g\text{ は } T \text{ の各列を保存する }\}\cong\mathfrak{S}_{\mu_1}\times\cdots\mathfrak{S}_{\mu_l}.\end{aligned}$$

ここで μ は共役なヤング盤に対する分割である．例えば図 1 の真ん中のヤング盤でいえば $(1,2,3)(4,5)\in P$ などとなる．これらの部分群を使って，群環 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ に二つの元を定義する

$$a_\lambda=\sum_{g\in P}g,\quad b_\lambda=\sum_{g\in Q}\mathrm{sgn}(g)g.$$

補足 4.1. これら二つの元の幾何学的な意味を調べよう（詳しいことは Section 8）．V を勝手なベクトル空間とする．$\mathfrak{S}_d$ は $V^{\otimes d}$ へ置換として作用する．つまり，

$$g:V^{\otimes d}\ni v_1\otimes\cdots\otimes v_d\mapsto v_{g^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{g^{-1}(d)}\in V^{\otimes d}$$

とする．

Proof. $w_1\otimes\cdots\otimes w_d=v_{g^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{g^{-1}(d)}$ とすれば，

$$g'(w_1\otimes\cdots\otimes w_d)=w_{g'^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes w_{g'^{-1}(d)}$$

となる．そこで $w_i=v_{g^{-1}(i)}$ であるので，

$$v_{g^{-1}(g'^{-1}(1))}\otimes\cdots\otimes v_{g^{-1}(g'^{-1}(d))}$$

となり表現になる． □

このとき $a_\lambda \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_d \to \mathrm{End}(V^{\otimes d})$ に対して $a_\lambda(V^{\otimes d})$ は．部分空間

$$S^{\lambda_1}V \otimes S^{\lambda_2}V \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_k}V \subset V^{\otimes d}$$

となる．そして，$b_\lambda(V^{\otimes d})$ は

$$\Lambda^{\mu_1}V \otimes \Lambda^{\mu_2}V \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\mu_l}V \subset V^{\otimes d}$$

である．ここで $(\mu_1, \cdots, \mu_l)$ は λ の共役である．

Proof. まず簡単な例から見ていこう．話を簡単にするため，分割 λ に対して図 1 の真ん中の図のようなもっとも標準的なヤング盤を考えることにする．

1. (d) という分割があるなら，対応するヤング盤は一行に 1 から d までの数がならんでいるものである．そして $a_\lambda = \sum_{g \in \mathfrak{S}_d} g$ であり，これは対称化作用素である．よって

   $$a_\lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_1 \odot \cdots \odot v_d$$

   （正規化はせず $v_1 \odot v_2 = v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ としている）．よって k の像は $S^d(V) \subset V^{\otimes d}$ となる．また Q は各列を保存するものであるが，これは $e \in \mathfrak{S}_d$ しかない．よって imaga $b_\lambda = V^{\otimes d}$ となる．

2. また，$(1, 1, \cdots, 1)$ という分割を考えると．$P = \{e\}$ であり，image $a_\lambda = V^{\otimes d}$ である．一方 $Q = \mathfrak{S}_d$ となる．そこで $\sum_{g \in \mathfrak{S}_d} \mathrm{sgn}(g)g$ は交代化作用素であり，

   $$b_\lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$$

3. 一般の場合に考えてみる．簡単のために $\lambda = 3+3+2+1$ で考える．このとき P は $1, 2, 3$ を不変，$4, 5, 6$ を不変，$7, 8$ を不変，9 を不変にする部分群である．これは集合 $\{1, 2, 3\}$ に対する置換群，$\{4, 5, 6\}$ に対する置換群, $\{7, 8\}$ に対する置換群，$\{9\}$ に対する置換群の積である．よって $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_1$ となる．これに対応する a_λ を考えると，最初の $\mathfrak{S}_3$ の部分で $(V \otimes V \otimes V) \otimes V^{\otimes 6}$ から $S^3(V) \otimes V^{\otimes 6}$ になり，これを繰り返して $S^3(V) \otimes S^3(V) \otimes S^2(V) \otimes V$ を得る．b_λ に対しても同様である．ただし，順番が異なるので，

   $$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 \mapsto (v_1 \wedge v_3) \otimes v_2$$

   などの同型写像を使っている．

□

以上のことの一般論は Section 8 で行う．

我々の目的は$\mathfrak{S}_d$の既約表現の構成であった．そのため**群環の冪等元となるヤング対称化作用素**を導入する．

定義 4.1. 分割λに対して，あるヤング盤Tを考える（標準的に限る必要はない）．そして上のようにしてa_λ, b_λを定義する．このとき

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$$

を考える．これを**ヤング対称化作用素**とよぶ．

例 4.2. (d)という分割を考えれば，$c_{(d)} = a_{(d)}$である．また$(1, \cdots, 1)$という分割を考えれば$c_{(1,\cdots,1)} = b_{(1,\cdots,1)}$である．

定理 4.3 (対称群の既約表現の構成)**.** 上で定義したヤング対称化作用素c_λに対して，ある定数n_λが存在して$c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$となる．よって正規化すれば群環$\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$における射影（冪等元）である．また右から$\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$へ$c_\lambda$を作用させた像$V_\lambda := (\mathbb{C}\mathfrak{S}_d)c_\lambda$は，$\mathfrak{S}_d$の既約表現となる（$c_\lambda$は原始的冪等元である）．
そして$\mathfrak{S}_d$**のすべての既約表現はこの方法で作ることができ，**d**の分割と一対一対応**する．また，c_λはλに対するヤング盤のとり方依存するが，他のヤング盤をとっても得られる表現は同値である．

例 4.4.

1. $\lambda = (d)$を考え，もっとも標準的なヤング盤を考える．このとき，$c_{(d)} = \sum g$であるので

$$V_{(d)} = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d(\sum_{g\in\mathfrak{S}_d} g) = \mathbb{C}\sum_{g\in\mathfrak{S}_d} g$$

である．そこで$g'(c_{(d)}) = c_{(d)}$となり，自明表現を得る．

また$\lambda = (d)$に対して，他のヤング盤を考えたとしても$c_{(d)} = \sum g$である．

2. $\lambda = (1, \cdots, 1)$として，もっとも標準的なヤング盤を考える．このとき，$c_{(1,\cdots,1)} = \sum \mathrm{sgn}(g)g$であるので

$$(\sum a_h h)(\sum \mathrm{sgn}(g)g) = \sum_h a_h \sum_{g'} \mathrm{sgn}(h)\mathrm{sgn}(g')g' = (\sum_h a_h \mathrm{sgn}(h))\sum_{g'} \mathrm{sgn}(g')g'$$

となり．

$$V_{(1,\cdots,1)} = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d(\sum_{g\in\mathfrak{S}_d} \mathrm{sgn}(g)g) = \mathbb{C}\sum_{g\in\mathfrak{S}_d} \mathrm{sgn}(g)g$$

さらに，$\mathfrak{S}_d$の作用を考えると，

$$g'(\sum \mathrm{sgn}(g)g) = \mathrm{sgn}(g')\sum \mathrm{sgn}(g)g$$

となるので，これは交代表現になる．

また，この場合も $\lambda = (1, \cdots, 1)$ に対するほかのヤング盤を考えても，$c_\lambda = \sum \mathrm{sgn}(g)g$ となる．

3. $\mathfrak{S}_3$ の表現をすべてつくってみよう．3 の分割は 1+1+1, 2+1, 3 の三つであるので，共役類の個数は三つある．よって，既約表現は三つある．上の例から自明表現は $V_{(3)}$ に対応し，交代表現は $V_{(1,1,1)}$ に対応する．また $6 = |\mathfrak{S}_3| = \sum \dim V_i^2$ であるので，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_3$ の中には，標準表現 V があり，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_3 = U \oplus U' \oplus V \oplus V$ となるはずである．ここで $\dim V = 2$ となる．

   そこで分割 $(2, 1)$ に対応する表現 $V_{(2,1)}$ が標準表現 V であることをみたい．まず，もっとも標準的なヤング盤 T_0 を考える．このとき，$a_\lambda = 1 + (1, 2)$, $b_\lambda = 1 - (1, 3)$ であるよって

$$c_\lambda = (1 + (1, 2))(1 - (1, 3)) = 1 + (1, 2) - (1, 3) - (1, 3, 2)$$

   となる．そして

$$\begin{aligned}
(1,2)c_\lambda &= c_\lambda \\
(1,3)c_\lambda &= (1,3) + (1,2,3) - 1 - (2,3) \\
(2,3)c_\lambda &= (2,3) + (1,3,2) - (1,2,3) - (1,2) = -c_\lambda - (1,3)c_\lambda \\
(1,2,3)c_\lambda &= (1,3)(1,2)c_\lambda = (1,3)c_\lambda \\
(1,3,2)c_\lambda &= (1,3)(2,3)c_\lambda = -(1,3)c_\lambda - c_\lambda
\end{aligned}$$

   となるので，

$$V_{(2,1)} = \mathbb{C}\{c_\lambda, (1,3)c_\lambda\}$$

   となる．さらに作用をみると既約二次元表現であるので標準表現となる．

   さて，別の標準ヤング盤 T_0' を考えることもできる．最初の行に $(1, 3)$，二番目の行に 2 を入れたものである．このとき

$$c_\lambda' = (1 + (1, 3))(1 - (1, 2)) = 1 - (1, 2) + (1, 3) - (1, 2, 3)$$

   となる．また，

$$\begin{aligned}
(1,3)c_\lambda' &= c_\lambda' \\
(1,2)c_\lambda' &= (1,2) - 1 + (1,3,2) - (2,3) \\
(2,3)c_\lambda' &= (2,3) - (1,2,3) + (1,2,3) - (1,3) = -c_\lambda' - (1,2)c_\lambda' \\
(1,2,3)c_\lambda' &= (2,3)(1,3)c_\lambda' = -c_\lambda' - (1,2)c_\lambda' \\
(1,3,2)c_\lambda' &= (1,2)(1,3)c_\lambda' = (1,2)c_\lambda'
\end{aligned}$$

   となる．よって

$$V_{(2,1)}' = \mathbb{C}\{c_\lambda', (1,2)c_\lambda'\}$$

さらに $V'_{(2,1)} \cap V_{1,2} = 0$ であることもわかる．

ヤング盤が変わる場合には，次のように考えるのがよい．T_0, T'_0 の関係は 2 と 3 が入れ替わっている．そこで，$g = (2,3)$ として，$a'_\lambda = g a_\lambda g^{-1}$, $b'_\lambda = g b_\lambda g^{-1}$, $c'_\lambda = g c_\lambda g^{-1}$ となる．言い換えると，$P'_\lambda = g P_\lambda g^{-1}$，$Q'_\lambda = g Q_\lambda g^{-1}$ である．そこで，$V'_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d c'_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d g c_\lambda g^{-1} = V_\lambda g^{-1}$ となる．さらに，$V_\lambda \ni v \mapsto v g^{-1} \in V'_\lambda$ は G 線形同型写像であり，$V_\lambda \cong V'_\lambda$ である．このことは d 次対称群でもどうようであり，**分割 λ に対するヤング盤をどのように選んでも，同値な既約表現を得る**ことができる．

実際，上の例において，他のヤング盤（上記以外は標準ヤング盤ではない）を考えても同様に標準表現が得られることがわかる．しかし，その表現空間は $V_\lambda \oplus V'_\lambda$ に含まれることがわかる（これは同値な表現の直和の分解の仕方が一通りでないことを意味している）．$\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 内には V_λ は $\dim V_\lambda$ 個の直和に分かれるが，λ に対する，すべての**標準ヤング盤を考えれば**，その直和分解を得ることが出来る．特に，ヤング図形 λ に対する標準ヤング盤の数が $\dim V_\lambda$ と一致する．（補足 4.9）

以下で定理 4.3 の証明を行う．
d の分割 λ の対するあるヤング盤 T 固定して，

$$
\begin{aligned}
P =& P_\lambda = \{ g \in \mathfrak{S}_d \mid\ g \text{ はヤング盤 } T \text{ の各行を保存する } \} \\
Q =& Q_\lambda = \{ g \in \mathfrak{S}_d \mid\ g \text{ はヤング盤 } T \text{ の各列を保存する } \}
\end{aligned}
$$

として，

$$
a_\lambda = \sum_{g \in P} g, \quad b_\lambda = \sum_{g \in Q} \operatorname{sgn}(g) g
$$

とした．簡単のため $A = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ と書く．また $a = a_\lambda$, $b = b_\lambda$, $c = ab = c_\lambda$ と書く．

まず $P \cap Q = \{e\}$ であることがわかる．実際，ヤング盤の各行，各列を保存するものは単位元だけである．$P \cap Q = \{e\}$ であることから $\mathfrak{S}_d$ の $p \cdot q$（$p \in P, q \in Q$）となる元の，このような書き方は一通りである．つまり $pq = p'q'$ なら $p = p', q = q'$ である．そこで $c = \sum \pm g$ となるが，$g = pq$ となり，その係数は $\operatorname{sgn}(q)$ である．特に，単位元 e の係数は 1 であり，$c \neq 0$ であることがわかる．

補題 4.5. *1.* $p \in P$ に対して，$pa = ap = a$.

2. $q \in Q$ に対して，$\operatorname{sgn}(q) q b = b \operatorname{sgn}(q) q = b$.

3. 任意の $p \in P$, $q \in Q$ に対して，$pc \operatorname{sgn}(q) q = c$ であり，A の中でこのような元はスカラー倍を除いて c のみである．

Proof. 最初の二つは明らかである．三番目のみを証明する．$c = ab = \sum_{p \in P, q \in Q} \operatorname{sgn}(q) pq$ であり．$pc \operatorname{sgn}(q) q = c$ は明らかである．そこでスカラー倍を除いて唯一つである

ことを証明する．$\sum n_g g$ が条件をみたすとする．このとき，

$$\sum n_g pg \,\mathrm{sgn}(q) q = \sum n_{p^{-1}gq^{-1}} \,\mathrm{sgn}(q) g$$

であるので，任意の g, p, q に対して $n_{pgq} = \mathrm{sgn}(q) n_g$ を満たす．特に，$n_{pq} = \mathrm{sgn}(q) n_e$ となる．そこで，$g \notin PQ$ ならば，$n_g = 0$ を証明すれば十分である．実際，これがわかれば，$\sum n_g g = \sum \mathrm{sgn}(q) n_e pq = n_e \sum \mathrm{sgn}(q) pq = n_e c$ となる．また $g \notin PQ$ に対して，互換 t で $t = p \in P$ かつ $q = g^{-1}tg \in Q$ となるものが見つかれば，$g = pgq^{-1}$ となり，$n_g = n_{pgq^{-1}} = \mathrm{sgn}(q^{-1}) n_g = \mathrm{sgn}(g^{-1}tg) n_g = \mathrm{sgn}(t) n_g = -n_g$ となるので $n_g = 0$ となる．以上から，$g \notin PQ$ に対して．互換 t で $t = p \in P$ かつ $q = g^{-1}tg \in Q$ となるものを見つければよい．

ヤング盤 T に対して，$T' = gT$ を考える．これは T の成分 i を $g(i)$ に換えたものである．また $t = (i, j) \in P$（$i \neq j$）かつ，$q = g^{-1}tg = (g^{-1}(i), g^{-1}(j)) \in Q$ とは，T のある一行に i, j が在り，T' のある一列に i, j がある（ $\iff$ T のある列に $g^{-1}(i), g^{-1}(j)$ がある）ことを意味する．

そこで，T のある行かつ $T' = gT$ のある列に自然数 i, j（$i \neq j$）が存在しないと仮定したとき，$g \in PQ$ となってしまうことを証明すればよい．T のある行かつ $T' = gT$ のある列に自然数 i, j（$i \neq j$）が存在しないと仮定する．

T

1	2	3
4	5	6
7	8	
9		

$T' = gT$

4	8	3
2	5	6
9	1	
7		

例えば上の図のようになる．そこで $p_1 \in P$ 及び $q_1' \in Q' = gQg^{-1}$（Q' は T' の列を保存する部分群）が存在して，$p_1 T$ と $q_1' T'$ の第一行が一致するようにできる．例えば，下図のようになる．

$(1,2)T$

2	1	3
4	5	6
7	8	
9		

$(4,2)(1,8)T'$

2	1	3
4	5	6
9	8	
7		

これを残りの行に対して繰り返していけば，$p \in P, q' \in Q'$ で $pT = q'T'$ となるようにできる．よって $pT = q'gT$ であり，$p = q'g$ となる．そこで $q' = gqg^{-1}$ となる $q \in Q$ が存在するので $p = (gqg^{-1})g = gq$ となり，$g = pq^{-1} \in PQ$ となる．以上で証明された． □

さて，分割に次のような辞書式順序をつける．

定義 4.2 (辞書式順序)**.** 分割 λ, μ に対して，$\lambda > \mu$ とは「最初の零でない $\lambda_i - \mu_i$ が正」として順序付けする．例えば $(3,3,2,1) > (3,3,1,1,1)$ である．

補題 4.6. *1.* $\lambda > \mu$ なら，すべての $x \in A = \mathbb{C}G$ に対して，$a_\lambda x b_\mu = 0 = b_\mu x a_\lambda$ となる．特に $\lambda > \mu$ なら $c_\lambda c_\mu = 0$ である．

2. すべての $x \in A$ に対して $c_\lambda x c_\lambda$ は c_λ の定数倍である（$= 0$ もありえる）．特に $c_\lambda c_\lambda = n_\lambda c_\lambda$ となる $n_\lambda \in \mathbb{C}$ が存在する．

Proof. 1. $x = g \in \mathfrak{S}_d$ としてよい．b_μ に対するヤング盤を T' とすれば，$gb_\mu g^{-1}$ はヤング盤 gT'（ヤング図形は μ）に対応する．そこで λ に対するあるヤング盤からきまる a_λ，μ に対するあるヤング盤から決まる b_μ に対して $a_\lambda b_\mu = 0$ を証明すればよい．$\lambda > \mu$ とすれば，下の図のように，異なる自然数 i, j で，T のある行にあり，T' のある列にあるようなものが存在する（ちょっと考えれば，この事実が成立することはすぐわかる．$\lambda_i = \mu_i$（$1 \leq i \leq l-1$）として $\lambda_l > \mu_l$ となるところを考えればよい．下図では $8, 10$ である）．

T

2	1	3
4	5	6
7	8	10
9		

T'

2	1	3
4	5	6
9	8	
7	10	

$t=(i,j)$ とすれば，$a_\lambda t=a_\lambda$, $tb_\mu=-b_\mu$ である．よって $a_\lambda b_\mu=a_\lambda ttb_\mu=-a_\lambda b_\mu$ となる．よって $a_\lambda b_\mu=0$ を得る．同様に，$ta_\lambda=a_\lambda$, $b_\mu t=-b_\mu$ であるので，$b_\mu a_\lambda=0$ となる．これは次のように示すこともできる．$A\ni x=\sum a_g g\mapsto x^*=\sum a_g g^{-1}\in A$ は歪 involution である．また，定義から $a_\lambda^*=a_\lambda$, $b_\mu^*=b_\mu$ である．よって，$a_\lambda x b_\mu=0$ がわかっているなら，$b_\mu x^* a_\lambda=0$ となる．

さて，$\lambda>\mu$ なら，$a_\lambda x b_\mu=0$ であるので，$x=(b_\lambda a_\mu)$ とすれば，$c_\lambda c_\mu=a_\lambda(b_\lambda a_\mu)b_\mu=0$ となる．

2. 前補題 (1)(2) から $p\in P$, $q\in Q$ に対して $pc_\lambda xc_\lambda\operatorname{sgn}(q)q=c_\lambda xc_\lambda$ となる．よって前補題 (3) から $c_\lambda xc_\lambda$ は c_λ の定数倍である．

□

系 4.7. $\lambda\neq\mu$ なら $c_\lambda xc_\mu=0$（$\forall x\in A$）である．特に $c_\lambda c_\mu=0$ である．

Proof. $\lambda>\mu$ のとき，$a_\lambda xb_\mu=0$ において x を $b_\lambda xa_\mu$ とすれば，$c_\lambda xc_\mu=a_\lambda(b_\lambda xa_\mu)b_\mu=0$ $\lambda<\mu$ 場合には $b_\lambda xa_\mu=0$ となるので，$c_\lambda xc_\mu=a_\lambda(b_\lambda xa_\mu)b_\mu=0$ となる． □

補足 4.8. $\lambda>\mu$ のときに $a_\lambda xb_\mu=0$ を示したが，$a_\mu xb_\lambda=0$ とは限らない．実際 $\mu=(1,\cdots,1)$ のとき $a_\mu=1$ であるので，$a_\mu b_\lambda=b_\lambda$ となる．

補足 4.9. 分割 λ に対して，標準盤 T, T'（$T\neq T'$）をとる．標準盤という条件から，上の証明での (i,j) が存在し，$a_Tb_{T'}=0$ がわかる．よって，$c_Tc_{T'}=0$ を得ることがわかる．つまり $V_T\cap V_{T'}=0$ である．ただし，$T=gT'$ なる g が存在するので，$a_Tgb_{T'}g^{-1}\neq 0$ となる．つまり任意の $x\in A$ に対して $a_Txb_{T'}=0$ となるわけではないことに注意する．さて，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_d=\sum V_\lambda^{\oplus\dim V_\lambda}$ と分解したとき，V_λ の重複度は λ に対する標準盤の数以上であることがわかる．さらに

$$\sum_\lambda(\lambda\text{ に対する標準盤})^2=d!=|\mathfrak{S}_d|$$

であることがわかる（これをロビンソン-シェンステッド対応という．詳しくは [5] を参照）．よって，V_λ の重複度は λ に対する標準盤の数と一致する．特に，$\dim V_\lambda$ と標準盤の数は一致する（別証明を例 5.38 で与える）．

補題 4.10. *1.* $V_\lambda=\mathbb{C}Gc_\lambda$ は $\mathfrak{S}_d$ の既約表現である．

2. $\lambda\neq\mu$ なら V_λ と V_μ は $\mathfrak{S}_d$ 加群として同型でない．

Proof. 1. まず $c_\lambda Ac_\lambda=c_\lambda V_\lambda\subset\mathbb{C}(c_\lambda)$ であることがわかる．$W\subset V_\lambda$ を部分表現とすれば，$c_\lambda W$ は $\mathbb{C}(c_\lambda)$ または 0 である．

まず，$c_\lambda W=\mathbb{C}(c_\lambda)$ であるとする．W が表現であるので，$AW\subset W$ であるので，

$$V_\lambda=Ac_\lambda=A(c_\lambda W)=(Ac_\lambda)W\subset W.$$

となり，$V_\lambda = W$ である．一方 $c_\lambda W = 0$ であるとすると，$W \cdot W \subset V_\lambda \cdot W \subset Ac_\lambda W = 0$ となる．さて，群環のところで見たように（Section 3.10.3），部分表現への射影 $A \to W$ は，$\phi = \phi^2$ となる $\phi \in W$ の右から積により与えることができる．つまり，$A\phi = W$ となる ϕ が存在する．$\phi \in W$ であり $\phi = \phi^2 \in WW = 0$ であるので射影 ϕ は 0 である．よって $W = 0$ を得る．以上から V_λ は既約表現であることがわかる．

また $c_\lambda \neq 0$ であるので $V_\lambda = Ac_\lambda \neq 0$ である．上の議論において $W = V_\lambda$ とすれば，$V_\lambda \neq 0$ であるので，$c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}(c_\lambda)$ が成立する．

2. $\lambda > \mu$ と仮定してよい．$c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}(c_\lambda) \neq 0$ であるが，系 4.7 より $c_\lambda V_\mu = c_\lambda A c_\mu = 0$ である．よって V_λ と V_μ は $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 加群として同型でない．実際，同型なら $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 線形同型 $\Phi : V_\lambda \to V_\mu$ が存在するが，$c_\lambda x \neq 0$ である $x \in V_\lambda$ が存在する．そこで，$0 \neq \Phi(c_\lambda x) = c_\lambda \Phi(x) \in c_\lambda V_\mu = 0$ となり矛盾．

□

補題 4.11. 任意の λ に対して，

$$c_\lambda c_\lambda = \frac{d!}{\dim V_\lambda} c_\lambda$$

となる．

Proof. R_c を c_λ による右からの掛け算とする．前補題から $R_c : A \to V_\lambda$ は（正規化すれば）射影である．つまり R_c は，V_λ 上では $n_\lambda \mathrm{id}$ であり，V_λ の補空間上では零である． $\mathrm{tr}\,(R_c) = n_\lambda \dim V_\lambda$ となる．一方 $c_\lambda = \sum \pm g$ と書いたとき，e の係数は 1 であった．よって任意の $g \in \mathfrak{S}_d$ に対して $R_c g = gc_\lambda$ における g の係数は 1 である．よって $tr(R_c) = |\mathfrak{S}_d| = d!$ となる．以上から $n_\lambda \dim V_\lambda = d!$ である． □

さて，$\mathfrak{S}_d$ は有限群であるので $\mathfrak{S}_d$ の既約表現の個数は $\mathfrak{S}_d$ の共役類の個数と一致するのであった．また共役類はあるヤング図形に対応した．以上から，すべての既約表現はあるヤング図形に対応することがわかった．また λ に対する任意のヤング盤が同値な表現を与えることは，例 4.4 の最後に書いたようにして証明できる．以上で定理 4.3 の証明を終える．

例 4.12. 分割 λ に対する既約表現を V_λ とする．λ と共役な分割を λ' とする．また U' を一次元交代表現とする．このとき

$$V_{\lambda'} = V_\lambda \otimes U'$$

が成立する．

Proof. λ に対して $a = a_\lambda, b = b_\lambda, c = c_\lambda$ を作れば $V_\lambda = Ac = Aab$ である．さて，

$$R_a : Aab \ni x \mapsto xa \in Aba, \quad R_b : Aba \ni y \mapsto yb \in Aba$$

を考える．このとき $x \in Aab$ に対して，$x = zab$ と書けるので，$R_b R_a x = zabab = zc^2 = n_\lambda zc = n_\lambda x$ である．一方，定理の証明をみれば，$c' = ba$ に対しても，同様の性質が成立することがわかる．つまり $(c')^2 = n_\lambda c'$ である．よって $R_a R_b = n_\lambda \mathrm{id}$ となる．このように $Aab \cong Aba$ である．また $\mathfrak{S}_d$ 線形は明らかなので，表現空間として同値であることがわかる．さて，

$$A \ni \sum a(g)g \mapsto \sum a(g)\,\mathrm{sgn}(g)g \in A$$

という写像を考えると準同形である．そこで

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\mathfrak{S}_d} a(g)gba &= \sum_{g\in\mathfrak{S}_d, p\in P, q\in Q} a(g)\,\mathrm{sgn}(q)gqp \\ &\mapsto \sum a(g)\,\mathrm{sgn}(p)\,\mathrm{sgn}(g)qp = \sum a(g)\,\mathrm{sgn}(g)g \sum q \sum \mathrm{sgn}(p)p\end{aligned}$$

となる．ここで $\sum_{q\in Q} q$ および $\sum_{p\in P} \mathrm{sgn}(p)p$ は λ と共役なヤング図形 λ' に対する $a_{\lambda'}, b_{\lambda'}$ である．つまり上の式で右辺の像は $V_{\lambda'} = Aa_{\lambda'}b_{\lambda'}$ である．また明らかにベクトル空間として $Aba \cong Aa_{\lambda'}b_{\lambda'}$ である．Aba への $\mathfrak{S}_d$ の作用を $\mathrm{sgn}(g)g$ とすれば，上の写像は $\mathfrak{S}_d$ 線形になることもわかる．よって $V_\lambda \otimes U' \cong V_{\lambda'}$ である． □

4.2 標準表現と交代テンソル積表現

$\mathfrak{S}_d$ の標準表現を構成しよう．まず $\mathfrak{S}_d$ の $\mathbb{C}^d$ への自然な表現

$$g(z_1, z_2, \cdots, z_d) = (z_{g^{-1}(1)}, \cdots, z_{g^{-1}(d)})$$

を考える．これは座標で書いた場合である．$\mathbb{C}^d$ の標準基底を e_i とすれば，$g(e_i) = e_{g(i)}$ という表現のことである．

$$U = \mathbb{C}(e_1 + \cdots + e_d)$$

を考えると，これは自明表現になる．そこでこの U の補空間として，次の部分空間を定義する

$$V = \{\sum z_i e_i \in \mathbb{C}^d \mid z_1 + \cdots + z_d = 0\}.$$

この $d-1$ 次元の表現を**標準表現**とよび，以下で見るように既約表現である．$v_l = e_l - e_{l-1}$（$l = 2, \cdots, d$）とすれば，

$$\begin{aligned}a_2v_2 + \cdots + a_dv_d &= a_2(e_2 - e_1) + a_3(e_3 - e_2) + \cdots + a_d(e_d - e_{d-1}) \\ &= -a_2e_1 + (a_2 - a_3)e_2 + (a_3 - a_4)e_3 + \cdots + (a_{d-1} - a_d)e_{d-1} + a_de_d\end{aligned}$$

であるので，

$$-a_2 + (a_2 - a_3) + (a_2 - a_4) + \cdots + (a_{d-1} - a_d) + a_d = 0$$

となるので，$V = \mathbb{C}\{v_2, \cdots, v_d\}$ となる．

命題 4.13. 標準表現 V への $\mathfrak{S}_d$ の表現は既約表現である．また k 次交代テンソル積表現 $\Lambda^k V$（$0 \le k \le d-1$）も既約表現である．

Proof. $\mathbb{C}^d = V \oplus U$ である．また

$$\Lambda^k(\mathbb{C}^d) = (\Lambda^k(U) \otimes \Lambda^0 U) \oplus \Lambda^{k-1} V \otimes \Lambda^1 U = \Lambda^k V \oplus \Lambda^{k-1} V$$

となる．そこで，これらの表現の指標 χ を考えて $(\chi, \chi) = 2$ であることがわかれば，帰納法により $\Lambda^k V$ が既約であることがわかる．

まず，練習として $\mathbb{C}^d$ の指標を計算する．$g \in \mathfrak{S}_d$ に対して，

$$g_k = \begin{cases} 0 & g(k) \neq k \\ 1 & g(k) = k \end{cases}$$

とする．このとき $\operatorname{tr} g = \sum_{k=1}^d g_k$ である．そこで $\mathbb{C}^d$ に対する指標 χ は

$$\begin{aligned} (\chi, \chi) &= \frac{1}{d!} \sum_{g \in \mathfrak{S}_d} (\sum_k g_k)(\sum_l g_l) \\ &= \frac{1}{d!} \sum_{k,l} \sum_{g(k)=k \text{ and } g(l)=l} 1 \\ &= \frac{1}{d!} (\sum_k \sum_{g(k)=k} 1 + \sum_{k \neq l} \sum_{g(k)=k \text{ and } g(l)=l} 1) \\ &= \frac{1}{d!} (d \times \{(d-1)!\} + 2\binom{d}{2}(d-2)!) = 2 \end{aligned}$$

となる．よって V は既約である．

次に $\Lambda^k \mathbb{C}^d$ の指標を計算しよう．$A = \{1, \cdots, d\}$ として，$B \subset A$ を $\#B = k$（k は $\Lambda^k V$ の k）とする．このとき $g \in \mathfrak{S}_d$ に対して，

$$g_B = \begin{cases} 0 & \text{if } g(B) \neq B \\ 1 & \text{if } g(B) = B \text{ で } g|_B \text{ で偶置換} \\ -1 & \text{if } g(B) = B \text{ で } g|_B \text{ は奇置換} \end{cases}$$

とする．このとき，$B = \{i_1, \cdots, i_k\}$ として $g(B) = B$ なら

$$g(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{g(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{g(i_k)} = g_B(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})$$

となる．また $e_B = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ とすれば，$\{e_B | B \subset A,\ \#B = k\}$ が $\Lambda^k \mathbb{C}^d$ の基底

になるので，$\chi = \chi_{\Lambda^k\mathbb{C}^d}(g) = \mathrm{tr}\,(g) = \sum_B g_B$ となる．そこで

$$
\begin{aligned}
(\chi,\chi) &= \frac{1}{d!}\sum_{g\in G}\left(\sum_B g_B\right)^2 \\
&= \frac{1}{d!}\sum_{g\in G}\sum_{B,C} g_B g_C \\
&= \frac{1}{d!}\sum_{B,C}\sum_{g(B)=B,g(C)=C} \mathrm{sgn}(g|_B)\,\mathrm{sgn}(g|_C)
\end{aligned}
$$

となる．そこで $g(B) = B$ かつ $g(C) = C$ となる置換を考えると，これは次のいずれかである．(1) $B\cap C$ の置換 (2) $B\setminus B\cap C$ の置換．(3) $C\setminus B\cap C$ の置換．$A\setminus B\cup C$ の置換．そこで $\#B\cap C = l$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
(\chi,\chi) &= \frac{1}{d!}\sum_{B,C}\sum_{a\in\mathfrak{S}_l}\sum_{b\in\mathfrak{S}_{k-l}}\sum_{c\in\mathfrak{S}_{k-l}}\sum_{h\in\mathfrak{S}_{d-2k+l}} (\,\mathrm{sgn}a)^2\,\mathrm{sgn}b\,\mathrm{sgn}c \\
&= \frac{1}{d!}\sum_B\sum_C l!(d-2k+l)!\sum_{b\in\mathfrak{S}_{k-l}}\mathrm{sgn}b\sum_{c\in\mathfrak{S}_{k-l}}\mathrm{sgn}c
\end{aligned}
$$

最後の $\sum_{b\in\mathfrak{S}_{k-l}}\mathrm{sgn}b$ において，$\mathfrak{S}_{k-l}$ の奇置換と偶置換の数は $k-l\neq 0,1$ なら同じなので，$k-l=0,1$ の場合を考えればよい．$k=l$ の場合には，$B=C$ のときであり，

$$
\frac{1}{d!}\sum_B\sum_C k!(d-k)! = \frac{1}{d!}\binom{d}{k}k!(d-k)! = 1
$$

となる．また $l=k-1$ の場合には，

$$
\frac{1}{d!}\sum_B\binom{d-k}{1}\binom{k}{k-1}(k-1)!(d-k-1)! = \frac{1}{d!}\binom{d}{k}k!(d-k)! = 1
$$

となる．以上から $(\chi,\chi) = 2$ であることがわかる． $\square$

さて，上の標準表現 V がどのヤング図形と対応しているかをみたい．

命題 4.14. d の分割として $(d-1,1)$ を考える．この分割に対応する既約表現 $V_{(d-1,1)}$ は $\mathfrak{S}_d$ の標準表現 V である．

Proof. $d=(d-1)+1$ に対して，最も標準的なヤング盤を考える．このとき

$$
P = \{g\in\mathfrak{S}_d \mid g(d)=d\}\cong\mathfrak{S}_{d-1},\quad Q=\{g\in\mathfrak{S}_d\mid\{g(1),g(d)\}=\{1,d\}\}\cong\mathfrak{S}_2
$$

である．そこで

$$
a_\lambda = \sum_{g(d)=d} g,\quad b_\lambda = e-(1,d)
$$

であり,

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda = \sum_{g(d)=d} g - \sum_{h(1)=d} h$$

となる.

さて，次のようなベクトルで張られるベクトル空間を考える.

$$e_j = \sum_{g(d)=j} g - \sum_{h(1)=j} h, \quad j = 1, 2, \cdots, d$$

ここで $c_\lambda = e_d$ である．このとき $g'(j) = i$ なら $g'e_j = e_i$ であることがわかる．実際,

$$g'e_j = \sum_{g(d)=j} g'g - \sum_{h(1)=j} g'h = \sum_{g''(d)=i} g'' - \sum_{h''(1)=i} h'' = e_i$$

である．よって，$Ac_\lambda = Ae_d = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \cdots, e_d\}$ である．また，$g(e_1 + \cdots + e_d) = e_1 + \cdots + e_d$（$\forall g \in \mathfrak{S}_d$）であるが，部分表現は存在しないので，$e_1 + \cdots + e_d = 0$ となる．よって

$$\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, \cdots, e_d\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_2 - e_1, \cdots, e_d - e_{d-1}\}$$

であり，これは作用の仕方から標準表現と一致する. □

補足 4.15. 分割 $\lambda = (d-s, 1, \cdots, 1)$ に対する既約表現 V_λ が $\Lambda^s(V)$ になるが，この事実の証明は後で（section 4.3.5）

指標を計算してみよう．指標は共役類で決まるので，サイクルタイプが

$$[\underbrace{d, \cdots, d}_{i_d}, \underbrace{d-1, \cdots, d-1}_{i_{d-1}}, \cdots, \underbrace{1, \cdots, 1}_{i_1}]$$

なものを考える．**これを** $i = (i_1, \cdots, i_d)$ **と書き，共役類を** C_i **と書く．** $\mathbb{C}^d$ 上の表現を考えたとき，$g \in \mathfrak{S}_d$ に対して,

$$g_k = \begin{cases} 0 & g(k) \neq k \\ 1 & g(k) = k \end{cases}$$

であったので，$g \in C_i$ なら $g(k) = k$ なる k は i_1 個ある．そこで，$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}^d} g = i_1$ である．また $\mathbb{C} = V \oplus U$ となるが，$\chi_U(g) = 1$ であるので，$\mathrm{tr}_V(C_i) = i_1 - 1$ である.

次に，$\Lambda^k\mathbb{C}^d$ に対する指標を計算する．$g \in \mathfrak{S}_d$ として，$B \subset \{1, \cdots, d\}$ で $\#B = k$ なものを考える．このとき

$$g_B = \begin{cases} 0 & \text{if } g(B) \neq B \\ 1 & \text{if } g(B) = B \text{ で } g|_B \text{ で偶置換} \\ -1 & \text{if } g(B) = B \text{ で } g|_B \text{ は奇置換} \end{cases}$$

とすれば $\chi = \chi_{\Lambda^k\mathbb{C}^d}(g) = \mathrm{tr}\,(g) = \sum_B g_B$ となるのであった．そこで指標を計算するには g に対して $g(B) = B$ となる B の選び方を考えればよい．

$g \in C_i$ とする．まず $\Lambda^2\mathbb{C}^d$ に対して考えると，$(1)(2)\cdots(i_1)$ から二個選ぶ場合と，i_2 個の互換から一つ選ぶ場合が考えられる（それぞれ，$2 = 1 + 1, 2 = 2$ に対応）．互換の場合は符号がマイナスなので，

$$\mathrm{tr}\,(g) = \binom{i_1}{2} - i_2$$

となる．よって，$\mathrm{tr}\,(g) = \mathrm{tr}\,_{\Lambda^2(V)}(g) + \mathrm{tr}\,_V(g)$ であるので，

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \binom{i_1}{2} - i_2 - (i_1 - 1) = \frac{1}{2}(i_1 - 1)(i_1 - 2) - i_2 = \binom{i_1 - 1}{2} - i_2$$

となる．

次に，$\Lambda^3\mathbb{C}^d$ に対しては，$3 = 3, 3 = 2 + 1, 3 = 1 + 1 + 1$ が考えられる．そこで

$$\mathrm{tr}\,(g) = \binom{i_1}{3} - i_1 i_2 + i_3$$

となるので，

$$\chi_{\Lambda^3(V)}(g) = \binom{i_1}{3} - i_1 i_2 + i_3 - \{\frac{1}{2}(i_1 - 1)(i_1 - 2) - i_2\} = \binom{i_1 - 1}{3} - (i_1 - 1)i_2 + i_3$$

$\Lambda^4\mathbb{C}^d$ に対しては，$4 = 4, 4 = 3 + 1, 4 = 2 + 2, 4 = 2 + 1 + 1, 4 = 1 + 1 + 1 + 1$ が考えられる．よって

$$\mathrm{tr}\,(g) = \binom{i_1}{4} - \binom{i_1}{2} i_2 + i_3 i_1 + \binom{i_2}{2} - i_4$$

となるので，

$$\chi_{\Lambda^4(V)}(g) = \binom{i_1 - 1}{4} - \binom{i_1 - 1}{2} i_2 + \binom{i_2}{2} + (i_1 - 1)i_3 - i_4$$

となる．このように規則性がわかるので，帰納法により一般の公式を導くことが出来る（$\Lambda^k V$ に対してなら k の分割を考えよ（演習問題. c.f. Section 6.2.3））．

例 4.16. 例として $g = (1)(2)\cdots(d-2)(d-1, d) \in \mathfrak{S}_d$ の場合を考えよう．つまりサイクルタイプが $i = (d-2, 1) = [2, \underbrace{1, \cdots, 1}_{d-2}]$ である．$\Lambda^k(\mathbb{C}^d)$ の指標は，上で述べたようにして．$k = 1 + \cdots + 1, k = 2 + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k-2}$ の場合を考えればよい．そこで，

$$\chi_{\Lambda^k\mathbb{C}^d}(g) = \binom{d-2}{k} - \binom{d-2}{k-2}$$

となる．ただし，$k=1$ のときは指標は $d-2$ であり，$k=0$ のときは 1 である．そこで，

$$\begin{aligned}
\chi_{\Lambda^k V}(g) =&\chi_{\Lambda^k(\mathbb{C}^d)} - \chi_{\Lambda^{k-1}(V)}\\
=&\chi_{\Lambda^k(\mathbb{C}^d)} - \chi_{\Lambda^{k-1}(\mathbb{C}^d)} + \chi_{\Lambda^{k-2}(\mathbb{C}^d)} + \cdots + (-1)^{k-1}\chi_V + (-1)^k\chi_U\\
=&\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{d-2}{k-s} - (-1)^s\binom{d-2}{k-s-2} = \binom{d-2}{k} - \binom{d-2}{k-1}\\
=&\frac{d-1-2k}{d-1}\binom{d-1}{k}
\end{aligned}$$

となる．よって，$g=(1)\cdots(d-2)(d-1,d)$ の時に，

$$\chi_{\Lambda^k(V)}(g) = -\chi_{\Lambda^{d-1-k}(V)}(g)$$

となることがわかる.（$\dim V = d-1$）．特に，$d-1-2k \neq 0$ なら，$\chi_{\Lambda^k V}(g) \neq 0$ となり，$\Lambda^k(V) \ncong \Lambda^{d-1-k}(V)$ となる．

4.3 Frobenius formula

4.3.1 Frobenius forumla

さて，分割 λ に対して既約表現 V_λ を構成したが，この表現の指標及び次元をもとめよう．

$\mathfrak{S}_d$ の共役類は，分割と対応していた，その分割（サイクルタイプ）をここでは

$$i = (i_1, i_2, \cdots, i_d), \quad \sum_k k i_k = d, \quad i_k \geq 0$$

と書く．つまり

$$\underbrace{d+\cdots+d}_{i_d}+\cdots+\underbrace{1+\cdots+1}_{i_1}$$

である．この分割に対応する共役類を C_i と書く．

分割 λ のヤング図形の行数 $l(\lambda)$ 以上の変数 $x_1, \cdots, x_k$ を用意する．そして，冪和対称式 $p_j(x)$（$1 \leq j \leq d$）を

$$p_j(x) = x_1^j + x_2^j + \cdots + x_k^j$$

とし，差積 $\Delta(x)$ を

$$\Delta(x) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

とする．

さて，$f(x)=f(x_1,\cdots,x_k)$ を形式的冪級数として

$$[f(x)]_{l=(l_1,\cdots,l_k)}=x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}\text{ の係数}$$

とする．分割 $\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$（$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_k\geq 0$）に対して，

$$l_1=\lambda_1+k-1,\quad l_2=\lambda_2+k-2,\cdots,l_k=\lambda_k$$

とする．これは $l_1>l_2>\cdots>l_k\geq 0$ を満たす．

このとき次が成立する．

定理 4.17 (Frobenius の公式)**.** λ に対する既約表現 V_λ の指標 χ_λ を考える．この共役類 C_i 上での値は次のよう．

$$\chi_\lambda(C_i)=\left[\Delta(x)\prod_{1\leq j\leq d}p_j(x)^{i_j}\right]_{(l_1,\cdots,l_k)}.$$

補足 4.18. $\Delta(x)\prod p_j(x)^{i_j}$ の次数は

$$k(k-1)/2+\sum_{k=1}^{d}ki_k=k(k-1)/2+d$$

である．一方，$x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}$ の次数も $\sum l_i=d+(k-1)k/2$ である．

また $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_k\geq 0$ としているが $\lambda_l=\cdots=\lambda_k=0$ の場合でも構わない．逆に言えば，$k=l(\lambda)$ だとしても．$0=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_{k+s}$ として拡張してもよい．つまり，**Frobenius の公式において変数の数を増やしても値は変化しない．**実際，変数を増やしたときには，$l_{k+1}=s-1,\cdots,l_{k+s}=0$ となるが，$x_{k+1}^{l_{k+1}}\cdots x_{k+s}^{l_{k+s}}=x_{k+1}^{s-1}\cdots x_{k+s}^{0}$ については，$\Delta(x_1,\cdots,x_{k+s})$ からの寄与のみを考えればよいからである．つまり，次のよう：

$$\begin{aligned}
&\Delta(x_1,\cdots,x_{k+s})\prod p_j(x)^{i_j}\\
=&(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_k)(x_1-x_{k+1})(x_1-x_{k+s})\\
&(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_k)(x_2-x_{k+1})\cdots(x_2-x_{k+s})\\
&\cdots\\
&(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{k+s})\\
&(x_{k+1}-x_{k+2})\cdots(x_{k+1}-x_{k+s})\\
&\cdots\\
&(x_{k+s-2}-x_{k+s-1})(x_{k+s-2}-x_{k+s})\\
&(x_{k+s-1}-x_{k+s})\\
&(x_1+\cdots x_k+x_{k+1}+\cdots x_{k+s})^{i_1}\cdots(x_1^d+\cdots x_k^d+x_{k+1}^d+\cdots x_{k+s}^d)^{i_d}
\end{aligned}$$

において，$x_1^{\lambda_1+k+s-1}x_2^{\lambda_2+k+s-2}\cdots x_k^{\lambda_k+s}x_{k+1}^{s-1}\cdots x_{k+s}^0$ の係数を考えるのだが，$\Delta(x)$ から，$x_1^s x_2^s\cdots x_k^s x_{k+1}^{s-1}\cdots x_{k+s}^0$ をとらねばならず，残りは，

$$
\begin{aligned}
&(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_k)\\
&(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_k)\\
&\cdots\\
&(x_{k-1}-x_k)\\
(x_1+\cdots x_k+x_{k+1}+\cdots x_{k+s})^{i_1}\cdots&(x_1^d+\cdots x_k^d+x_{k+1}^d+\cdots x_{k+s}^d)^{i_d}
\end{aligned}
$$

となる．ここから，$x_1^{\lambda_1+k-1}x_2^{\lambda_2+k-2}\cdots x_k^{\lambda_k}$ の係数を拾えばよいことになり，変数が $x_1,\cdots,x_k$ の場合と一致する．

補足 4.19. Section 5 で導入するシューア多項式 S_λ を使えば，

$$P^i=P^{(i_1,i_2,\cdots,i_d)}=\prod_{1\le j\le d}p_j(x)^{i_j}=\sum_\lambda \chi_\lambda(C_i)S_\lambda$$

となる（λ は d の分割である）．これを使って Frobenius 公式を証明する（Section 6）．つまり，**冪和対称式をシューア多項式で表せば指標がわかる．**

証明は Section 6 で行う（シューア多項式が必要）．この Section の残りでは例や応用をいくつか述べる．

例 4.20. 3 次対称群の場合に確かめてみよう．$\mathfrak{S}_3$ の共役類は

$$C_{(3,0,0)},\quad C_{(1,1,0)},\quad C_{(0,0,1)}$$

の三つである．代表元はそれぞれ $1\in C_{(3,0,0)}$, $(1)(2,3)\in C_{(1,1,0)}$, $(1,2,3)\in C_{(0,0,1)}$ である．

変数として x_1,x_2,x_3 を用意する．このとき

$$p_j(x)=x_1^j+x_2^j+x_3^j\quad \Delta(x)=(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)$$

であるので，

1. $C_{(3,0,0)}$ に対して，$\Delta(x)\prod_j p_j(x)^{i_j}$ は

$$f(x)=\Delta(x)(x_1+x_2+x_3)^3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^0(x_1^3+x_2^3+x_3^3)^0$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\chi_{(3)}(C_{(3,0,0)})&=[f(x)]_{(3+3-1,0+3-2,0+3-3)}=[f(x)]_{(5,1,0)}=1\\
\chi_{(1,1,1)}(C_{(3,0,0)})&=[f(x)]_{(1+3-1,1+3-2,1+3-3)}=[f(x)]_{(3,2,1)}=1\\
\chi_{(2,1)}(C_{(3,0,0)})&=[f(x)]_{(4,2,0)}=2
\end{aligned}
$$

となる．$\mathrm{id}C_{(3,0,0)}$ なので，指標は表現空間の次元であることに注意．

2. $C_{(1,1,0)}$ に対して，

$$f(x) = \Delta(x)(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

であり，

$$\begin{aligned} \chi_{(3)}(C_{(1,1,0)}) &= [f(x)]_{(5,1,0)} = 1 \\ \chi_{(1,1,1)}(C_{(1,1,0)}) &= [f(x)]_{(3,2,1)} = -1 \\ \chi_{(2,1)}(C_{(1,1,0)}) &= [f(x)]_{(4,2,0)} = 0 \end{aligned}$$

3. $C_{(0,0,1)}$ に対しては

$$f(x) = \Delta(x)(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)$$

なので，

$$\begin{aligned} \chi_{(3)}(C_{(0,0,1)}) &= [f(x)]_{(5,1,0)} = 1 \\ \chi_{(1,1,1)}(C_{(0,0,1)}) &= [f(x)]_{(3,2,1)} = 1 \\ \chi_{(2,1)}(C_{(0,0,1)}) &= [f(x)]_{(4,2,0)} = -1 \end{aligned}$$

以上は以前計算した結果と一致する（see Section 4）

共役類の元の数	1	3	2
$\mathfrak{S}_3$ の共役類の代表元	1	$\sigma = (1,2)$	$\tau = (1,2,3)$
自明表現 U の指標	1	1	1
交代表現 U' の指標	1	-1	1
標準表現 V の指標	2	0	$-1 = \omega + \omega^2$

例 4.21. $\mathfrak{S}_d$ の標準表現を考える．$V_{(d-1,1)}$ である．ヤング図形の長さ $l(\lambda)$ は 2 であるので，変数としては x_1, x_2 のみを考えればよい．そして $l_1 = d - 1 + 2 - 1 = d$, $l_2 = 1 + 2 - 2 = 1$ である．そこで

$$\begin{aligned} &\chi_{(d-1,1)}(C_{(i_1,i_2,\cdots,i_d)}) = [(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^{i_1}(x_1^2 + x_2^2)^{i_2} \cdots (x_1^d + x_2^d)^{i_d}]_{(d,1)} \\ &= [(x_1 - x_2)(x_1^{i_1} + i_1 x_1^{i_1 - 1} x_2 + \cdots + x_2^{i_1})(x_1^2 + x_2^2)^{i_2} \cdots (x_1^d + x_2^d)^{i_d}]_{(d,1)} = i_1 - 1 \end{aligned}$$

となる．(Section 4.2 ですでに計算した）．

4.3.2　次元公式

さて，フロベニウスの公式を認めて，次元公式を導いてみよう．次元は $\chi_\lambda(e)$ を求めればよい．そして，e に対する共役類は $C_{(d,0,\cdots,0)}$ となる．そこで，

$$\dim V_\lambda = \chi_\lambda(C_{(d,0,\cdots,0)}) = [\Delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^d]_{(l_1,\cdots,l_k)}$$

となる（k は十分大）．この $[\Delta(x)p_1(x)^d]_l$ を計算したい．
まず $\Delta(x)$ はファンデルモンデ行列式を使って，

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}1 & x_k & \cdots & x_k^{k-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)x_k^{\sigma(1)-1}\cdots x_1^{\sigma(k)-1}$$

となる．

Proof. $\Delta(x)$ が行列式で書けることは，(x_i-x_j) を因子にもち，次数を比べて，定数倍であることがわかるので，最後に $x_1^{k-1}\cdots x_{k-1}$ の係数を比べればよい．
二番目の等式は，行列式の定義から

$$\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}\cdots a_{k\tau(k)}=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\tau)x_k^{\tau(1)-1}\cdots x_1^{\tau(k)-1}$$

となることから従う． □

次に

$$(x_1+\cdots+x_k)^d=\sum_{r_1+\cdots+r_k=d}\frac{d!}{r_1!\cdots r_k!}x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$$

である．よって，

$$\Delta(x)(x_1+\cdots+x_k)^d=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)x_k^{\sigma(1)-1}\cdots x_1^{\sigma(k)-1}\sum_{r_1+\cdots+r_k=d}\frac{d!}{r_1!\cdots r_k!}x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$$
$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k,r_1+\cdots+r_k=d}\mathrm{sgn}(\sigma)\frac{d!}{r_1!\cdots r_k!}x_1^{r_1+\sigma(k)-1}\cdots x_i^{r_i+\sigma(k-i+1)-1}\cdots x_k^{r_k+\sigma(1)-1}$$

である（$x_1,\cdots,x_k$ の $d+\frac{k(k-1)}{2}$ 次斉次式）．そして，$x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}$（これも $d+\frac{k(k-1)}{2}$ 次式）の係数は

$$\sum\mathrm{sgn}(\sigma)\frac{d!}{(l_1-\sigma(k)+1)!\cdots(l_k-\sigma(1)+1)!}$$

となる．ここで和は $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ で $l_{k-i+1}-\sigma(i)+1\geq 0$（$1\leq\forall i\leq k$）となるものでとっている．(or $l_j-\sigma(k-j+1)+1\geq 0$（$1\leq j\leq k$））．これを書き換えると，

$$\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{k}l_j(l_j-1)\cdots(l_j-\sigma(k-j+1)+2)$$
$$=\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\begin{vmatrix}1 & l_k & l_k(l_k-1) & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & l_1 & l_1(l_1-1) & \cdots\end{vmatrix}=\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\prod_{i<j}(l_i-l_j)$$

Proof. 直接証明すればよい．

$$
\begin{aligned}
&\sum \operatorname{sgn}(\sigma)\frac{d!}{(l_1-\sigma(k)+1)!\cdots(l_k-\sigma(1)+1)!}\\
=&\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\sum \operatorname{sgn}(\sigma)l_1(l_1-1)\cdots(l_1-\sigma(k)+2)\cdots l_k(l_k-1)\cdots(l_k-\sigma(1)+2)\\
=&\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)l_1(l_1-1)\cdots(l_1-\sigma(k)+2)\cdots l_k(l_k-1)\cdots(l_k-\sigma(1)+2)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，二番目の式の和は $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ で $l_{k-i+1}-\sigma(i)+1\geq 0$（$1\leq\forall i\leq k$）となるものでとっているが，三番目の式に移れる理由は，すべての $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ で和をとっても，$l_{k-i+1}-\sigma(i)+1=0$ なる項が含まれるなら零となるからである．

また，

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & l_k & l_k(l_k-1) & \cdots & l_k(l_k-1)\cdots(l_k-k+2)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1 & l_1 & l_1(l_1-1) & \cdots & l_1(l_1-1)\cdots(l_1-k+2)
\end{vmatrix}
=\sum \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{k\sigma(k)}\\
=&\sum \operatorname{sgn}(\sigma)\{l_k(l_k-1)\cdots(l_k-\sigma(1)+2)\}\cdots\{l_1(l_1-1)\cdots(l_1-\sigma(k)+2)\}
\end{aligned}
$$

となる．この行列式において $l_i=l_j$ とすれば零になるので，因子として (l_i-l_j) を持つことがわかる．よって $\prod_{i<j}(l_i-l_j)$ を因子としてもつ．さらに，これは $k(k-1)/2$ 次式であるが，行列式も $k(k-1)/2$ 次である．よって $\det=c\prod_{i<j}(l_i-l_j)$ となる．$l_1^{k-1}l_2^{k-2}\cdots l_k$ の次数を比べれば，$c=1$ であることがわかる． □

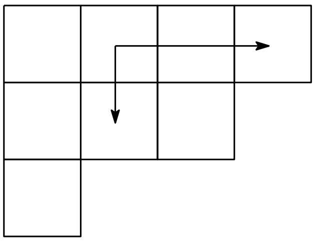
以上から

命題 4.22 (次元公式)**.** 分割 $\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ に対する $\mathfrak{S}_d$ の既約表現を V_λ とすれば，

$$
\dim V_\lambda=\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\prod_{i<j}(l_i-l_j),\quad l_i=\lambda_i+k-i
$$

4.3.3 hook length forumla

次元公式の計算方法としては，ヤング図形の中の鉤型（hook）の長さを計算することによるものがある．それについて見ていこう．ヤング図形のある箱に対する「hook の長さ」とは，その箱の右，下及びそれ自身の箱の数である．例えば，下の図では hook length は 4 である．また下右図は各箱の hook length を書いている．



6	4	3	1
4	2	1	
1			

このとき，

命題 4.23 (hook length formula)**.**

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\prod_{each\ box}(hook\ lengths)}$$

例えば，上の例なら

$$\dim V_\lambda = \frac{8!}{6\cdot 4^2\cdot 3\cdot 2} = 70$$

となる．

Proof. 分割を $\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ とする．このときのヤング図形は $l(\lambda)=k$ 行である．ヤング図形の第一列の hook length は

$$l_1=\lambda_1+k-1,\quad l_2=\lambda_2+k-2,\quad \cdots\quad ,l_k=\lambda_k$$

になる．

そこで第一行の長さについての帰納法で証明する．まず第一行の長さが 1 の場合を考える．つまり，一列しかなくて $l(\lambda)=d$ の場合を考えると，$\lambda=1+\cdots+1$ である．次元公式を使えば，表現空間の次元は

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \frac{d!}{d!(d-1)!\cdots 1!}\prod_{1\le i<j\le d}(1+d-i-(1+d-j)) \\ &= \frac{d!}{d!(d-1)!\cdots 1!}\prod_{i<j}(j-i) = 1 \end{aligned}$$

である．一方，hook length 公式に代入しても 1 となる．よってこの場合には hook length 公式は成立する（$\lambda=1+\cdots+1$ は 1 次元交代表現）．

第一行の長さが $p-1$ のヤング図形に対して，

$$\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\prod_{i<j}(l_i-l_j) = \frac{d!}{\prod_{\text{each box}}(\text{hook lengths})}$$

が成立したと仮定する．分割 $\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ を考える，ヤング図形 λ の第一行の長さが p であるとする．このヤング図形から第一列を取り去った $d-k$ の分割 λ'

を考える，λ' の長さ $l(\lambda')$ は k 以下である．また第一行の長さが $p-1$ であるので，仮定から，

$$\frac{(d-k)!}{(l_1-1)!\cdots(l_k-1)!}\prod_{i<j}(l_i-l_j)=\frac{(d-k)!}{\prod_{\text{each box in }\lambda'}(\text{hook lengths})}$$

さらに，

$$\begin{aligned}
\dim V_\lambda =&\frac{d!}{l_1!\cdots l_k!}\prod_{i<j}(l_i-l_j)=\frac{d!}{(d-k)!}\frac{1}{l_1l_2\cdots l_k}\frac{(d-k)!}{(l_1-1)!\cdots(l_k-1)!}\prod_{i<j}(l_i-l_j)\\
=&\frac{d!}{(d-k)!}\frac{1}{l_1l_2\cdots l_k}\frac{(d-k)!}{\prod_{\text{each box in }\lambda'}(\text{hook lengths})}\\
=&\frac{d!}{\prod_{\text{each box in }\lambda}(\text{hook lengths})}
\end{aligned}$$

□

4.3.4 応用例 1

フロベニウスの公式や次元公式の応用について考えよう．

Section 4.3.2 において，$i=(d)$ に対して，$\chi_\lambda(C_i)=\chi_\lambda(e)=\dim V_\lambda$ を計算した．ここでは，

$$i=(d-m,0,\cdots,0,\underbrace{1}_{m},0,\cdots,0)$$

に対する $\chi_\lambda(C_i)$ を計算する．つまり $g=(1,\cdots,m)\in\mathfrak{S}_d$ に対する指標 $\chi_\lambda(g)$ である．手法は次元公式のときと同様である．求めるべきは

$$[\Delta(x)(x_1+\cdots+x_k)^{d-m}(x_1^m+\cdots+x_k^m)]_l$$

である．そこで，

$$\begin{aligned}
&\Delta(x)(x_1+\cdots+x_k)^{d-m}\sum_i x_i^m\\
=&\sum_i\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k,r_1+\cdots+r_k=d-m}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{(d-m)!}{r_1!\cdots r_k!}x_1^{r_1+\sigma(k)-1}\cdots x_i^{r_i+\sigma(k-i+1)-1+m}\cdots x_k^{r_k+\sigma(1)-1}
\end{aligned}$$

であるので，$x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}$ の係数は

$$\sum_i\sum_{\mathfrak{S}_k^i}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{(d-m)!}{(l_1-\sigma(k)+1)!\cdots(l_i-\sigma(k-i+1)+1-m)!\cdots(l_k-\sigma(1)+1)!}$$

となる．ここで$\mathfrak{S}_k^i$は$\sigma\in\mathfrak{S}_k$で$l_j-\sigma(k-j+1)+1\geq 0$（$j\neq i$）かつ$l_i-\sigma(k-i+1)+1-m\geq 0$となるものである．よって，次元公式の証明と同様にして，

$$\begin{aligned}&\sum_i\frac{(d-m)!}{l_1!\cdots l_k!}\sum_{\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\left\{\prod_{j\neq i}l_j(l_j-1)\cdots(l_j-\sigma(k-j+1)+2)\right\}\\
&\qquad\qquad\times\{l_i\cdots(l_i-m)(l_i-1-m)(l_i-2-m)\cdots(l_i-\sigma(k-i+1)+2-m)\}\\
&=\sum_i\frac{(d-m)!}{l_1!\cdots l_k!}\{l_i\cdots(l_i-m+1)\}\sum_{\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\{\prod_{j\neq i}l_j(l_j-1)\cdots(l_j-\sigma(k-j+1)+2)\}\\
&\qquad\qquad\times(l_i-m)\cdots(l_i-\sigma(k-i+1)+2-m)\end{aligned}$$

そこで$\sum_{\mathfrak{S}_k}$の中は

$$\begin{vmatrix}1 & l_k & l_k(l_k-1) & \cdots & l_k\cdots(l_k-k+2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & l_i-m & (l_i-m)(l_i-m-1) & \cdots & (l_i-m)\cdots(l_i-k+2-m)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & l_1 & l_1(l_1-1) & \cdots & l_1\cdots(l_1-k+2)\end{vmatrix}$$

となる．$s\neq i, t\neq i$に対して，$l_s=l_t$とすれば，この行列式は消えるので(l_s-l_t)という項をもつ．また$s\neq i$に対して，$l_s=l_i-m$としても行列式は消えるので，(l_i-l_s-m)という項をもつ．そこで，

$$c\times\frac{\prod_{s<t}(l_s-l_t)\prod_{s=1}^k(l_i-l_s-m)}{-m\prod_{s\neq i}(l_i-l_s)},\quad c\text{は定数}$$

となる．行列式の$l_{k-1}l_{k-2}^2\cdots l_1^{k-1}$の係数は1であり，一方，上の式の$l_{k-1}l_{k-2}^2\cdots l_1^{k-1}$の係数も1である．よって定数$c=1$であり，

$$\begin{aligned}\chi_\lambda(g)&=\frac{(d-m)!}{-m\times l_1!\cdots l_k!}\sum_i\prod_{s=1}^m(l_i-s+1)\frac{\prod_{s<t}(l_s-l_t)\prod_{s=1}^k(l_i-l_s-m)}{\prod_{s\neq i}(l_i-l_s)}\\
&=\frac{1}{-m^2\frac{d!}{(d-m)!m}}\frac{d!\prod_{s<t}(l_s-l_t)}{l_1!\cdots l_k!}\sum_i\frac{\prod_{s=1}^k(l_i-l_s-m)\prod_{s=1}^m(l_i-s+1)}{\prod_{s\neq i}(l_i-l_s)}\\
&=\frac{\dim V_\lambda}{-m^2h_m}\sum_{i=1}^k\frac{\psi(l_i)}{\phi'(l_i)}\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\phi(x)=\prod_{s=1}^k(x-l_s),\quad\psi(x)=\phi(x-m)\prod_{s=1}^m(x-s+1)$$

であり．$h_m=\dfrac{d!}{(d-m)!m}$は$g=(1,\cdots,m)\in\mathfrak{S}_d$と共役な元の数（$m>1$）である．

命題 4.24. $g = (1, \cdots, m)$ とする．このとき，

$$\chi_\lambda(g) = \frac{\dim V_\lambda}{-m^2 h_m} \sum_{i=1}^{k} \frac{\psi(l_i)}{\phi'(l_i)}.$$

さらに，$\sum_{i=1}^{k} \psi(l_i)/\phi'(l_i)$ は，$\psi(x)/\phi(x)$ を $x = \infty$ の周りでローラン展開したとき，$\sum c_n/x^n$ の x^{-1} の係数等しい．

Proof. 二番目の主張を証明する．留数については下の補足を見よ．

まず，留数定理から，r が十分大として

$$Res(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz = -c_1$$

となる．一方，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz = \sum_i Res(a_i)$$

となる．そこで，$\psi(z)/\phi(z)$ の各極 $z = l_i$（1 位の極）での留数を計算すると，

$$Res(l_i) = (z - l_i)\frac{\psi(z)}{\phi(z)}\bigg|_{z=l_i} = \frac{\prod_{s=1}^{k}(l_i - l_s - m)\prod_{s=1}^{m}(l_i - s + 1)}{\prod_{s\neq i}(l_i - l_s)}$$

となることがわかる．以上をあわせれば，$\sum_{i=1}^{k} \psi(l_i)/\phi'(l_i)$ は，$\psi(z)/\phi(z)$ をローラン展開したときの z^{-1} の係数となる． □

補足 4.25. $z = \infty$ に対する留数には注意が必要である．まず $z = a$（$a \neq \infty$）$f(z)$ が k 位の極を持つとき，

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

と展開できる．そして留数を $Res(a, f) = c_{-1}$ として定義する．または，

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} f(z)dz = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z-a)^k f(z)|_{z=a}$$

として定義する．このとき，留数定理とは

$$\int_C f(z)dz = \sum_i Res(a_i, f)$$

であった．ここで C は極 $a_1, \cdots, a_s$ を囲む閉曲線である．これを $z = \infty$ の極まで拡張するには，$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = P^1(\mathbb{C})$ だとして，微分形式 $f(z)dz$ の積分を考える必要がある（微分形式で考えるのが本当の留数）．そこで，

$$f(z)dz = f(1/w)d(1/w) = -f(1/w)w^{-2}dw$$

となる．$f(z)$ の $z=\infty$ におけるローラン展開

$$f(z) = c_{-k}z^k + \cdots + c_{-1}z + \sum c_n/z^n$$

を考えたとき，

$$-f(1/w)w^{-2} = -c_{-k}w^{k+2} - \cdots - c_{-1}/w^3 - c_0/w^2 - c_1/w - \sum c_n/z^n$$

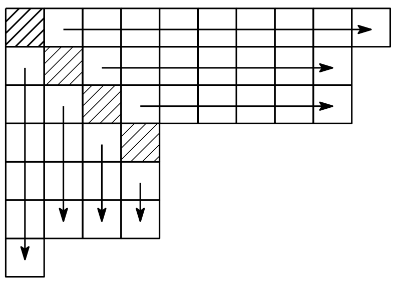
となるので，留数は $-c_1$ となる．そして閉リーマン面である $P^1(\mathbb{C})$ 上の有理型関数に対する留数定理は

$$\sum Res(a_i, fdz) = 0$$

となる．

さて，上の命題 4.24 の公式を別の形で書いてみよう．分割 λ に対して，対角成分にある箱の数を**分割 λ の rank** とよぶ．さらに下のようにして，対角成分の横側にある箱を下から各行ごとに数えて，$b_1, \cdots, b_r$ と書く．また，対角成分の下側にある箱の数を右から各列ごとに数えて $a_1, \cdots, a_r$ とする．ここで，$a_1 < a_2 < \cdots < a_r$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$ となる．

rank$=4$



$b_4 = 9$
$b_3 = 7$
$b_2 = 6$
$b_1 = 0$

$a_4 = 6$
$a_3 = 4$
$a_2 = 3$
$a_1 = 2$

この数を

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

と書き**分割 λ の特性（characteristics）**とよぶことにする．上の例の特性は

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

である．

補題 4.26. 分割 λ に対する特性を考えたとき，次の集合は一致する．

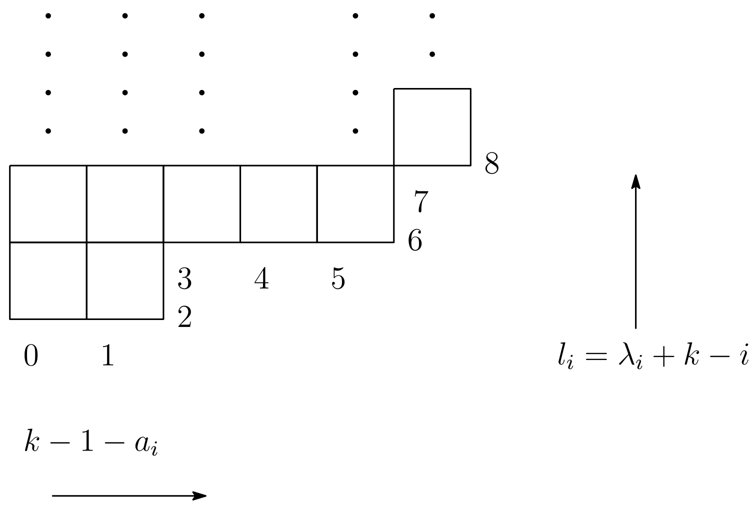
$$\{l_1, \cdots, l_k, k-1-a_1, \cdots, k-1-a_r\} = \{0, 1, \cdots, k-1, k+b_1, \cdots, k+b_r\}$$

ここで $l_i = \lambda_i + k - i$ である．

Proof. まず，rank が r であるとすると，$l_1 = k + b_r$, $l_2 = k + b_{r-1}$, $\cdots$, $l_r = k + b_1$ が成立する．そこで，我々は

$$\{l_{r+1}, \cdots, l_k, k-1-a_1, \cdots, k-1-a_r\} = \{0, 1, \cdots, k-1\}$$

を確かめればよい．それは次の図から明らかであろう．つまり，ヤング図形の左下端から右上へ淵に沿って番号をつける．このとき箱の下側に書いた数が順に $k-1-a_r, k-1-a_{r-1}, \cdots, k-1-a_1$ に一致して，箱の右側に書いた数が順に $l_k, l_{k+1}, \cdots, l_{r+1}$ に一致することがわかる．



$\square$

この補題から，

$$f(y) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(y - b_i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(y + a_i + 1)}, \quad g(y) = f(y-m)\prod_{j=1}^{m}(y - j + 1)$$

とすれば，

$$\psi(x)/\phi(x) = g(y)/f(y), \quad y = x - k$$

が成立する．よって $\sum_{i=1}^{k} \psi(l_i)/\phi'(l_i)$ は $g(y)/f(y)$ を $y = \infty$ でローラン展開したときの y^{-1} の係数である．($y = \infty$ の話なので $y = x - k$ のずらしは関係ない）.

Proof. まず補題から，

$$\prod_{i=1}^{k}(x - l_i)\prod_{i=1}^{r}(x - k + 1 + a_i) = \prod_{i=1}^{k}(x - i + 1)\prod_{i=1}^{r}(x - k - b_i)$$

が成立する．よって

$$\phi(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-l_i)=\frac{\prod(x-i+1)\prod(x-k-b_i)}{\prod(x-k+1+a_i)}=\prod_{i=1}^{k}(x-i+1)f(x-k)$$

となる．そこで，

$$\begin{aligned}&\psi(x)/\phi(x)=\phi(x-m)\prod_{j=1}^{m}(x-j+1)/\phi(x)\\=&\frac{\prod_{i=1}^{k}(x-m-i+1)f(x-m-k)\prod_{j=1}^{m}(x-j+1)}{\prod_{i=1}^{k}(x-i+1)f(x-k)}\\=&\frac{f(y-m)}{f(y)}\prod_{i=1}^{k}(x-m-i+1)\prod_{i=k+1}^{m}(x-i+1)\\=&\frac{f(y-m)}{f(y)}\prod_{l=m-k+1}^{m}(x-k-l+1)\prod_{l=1}^{m-k}(x-k-l+1)=\frac{g(y)}{f(y)}\end{aligned}$$

□

以上まとめると，

命題 4.27. $g=(1,2,\cdots,m)$ とし，分割 λ に対する表現の指標を χ_λ とする．また $f(y),g(y)$ を上で定義した λ の特性および m に依存した関数とする．このとき

$$\chi_\lambda(g)=\frac{\dim V}{-m^2h_m}(-Res(\infty,g(y)/f(y)))$$

が成立する．また $Res(\infty,g(y)/f(y))$ は $y=\infty$ における $g(y)/f(y)$ の留数であり，$g(y)/f(y)=\sum c_n/y^n$ と $y=\infty$ においてローラン展開したとき，$Res(\infty,g(y)/f(y))=-c_1$ となる．

例 4.28. $m=2$ のとき，つまり $g=(1,2)$ の場合に具体的に計算してみると，

$$\chi_\lambda(g)=\frac{\dim V_\lambda}{d(d-1)}\sum_{i=1}^{r}(b_i(b_i+1)-a_i(a_i+1))$$

となる．

Proof. この証明は単なる面倒な計算なので，認めて先に行ったほうがよい．(または，もう少し簡単に計算する方法があるかもしれないど，かなり直接的に証明した)．まず，

$$\chi_\lambda(g)=\frac{\dim V}{2d(d-1)}Res(\infty,g(y)/f(y))$$

となるので，$Res(\infty, g(y)/f(y))$ を計算する．$y=\infty$ での留数の定義から，$y=1/w$ としたとき，

$$\begin{aligned}\frac{g(y)}{f(y)} &= \frac{\prod(y-2-b_i)}{\prod(y+a_i-1)}\frac{\prod(y+a_i+1)}{\prod(y-b_i)}y(y-1)\\ &= \frac{\prod(1-2w-b_iw)}{\prod(1+a_iw-w)}\frac{\prod(1+a_iw+w)}{\prod(1-b_iw)}(1-w)(1/w)^2\end{aligned}$$

となるので，この w^1 の係数をひろう必要がある．つまり

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dw^3}\left(\frac{\prod(1-2w-b_iw)}{\prod(1+a_iw-w)}\frac{\prod(1+a_iw+w)}{\prod(1-b_iw)}(1-w)\right)|_{w=0}\\ =&\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\prod(1-2w-b_iw)}{\prod(1+a_iw-w)}\frac{\prod(1+a_iw+w)}{\prod(1-b_iw)}\right)'''|_{w=0}\right.\\ &\left.-3\left(\frac{\prod(1-2w-b_iw)}{\prod(1+a_iw-w)}\frac{\prod(1+a_iw+w)}{\prod(1-b_iw)}\right)''|_{w=0}\right\}\end{aligned}$$

を計算すればよい．簡単のために

$$H_1(w)=\prod(1-2w-b_iw)\prod(1+a_iw+w),\quad H_2(w)=\prod(1+a_iw-w)\prod(1-b_iw)$$

とし，$A=-r+\sum(a_i-b_i)$ とする．

このとき，

$$H_1(0)=1,\quad H_2(0)=1$$

$$H_1'(0)=\sum_{i=1}^{r}(-2-b_i)+a_i+1=-r+\sum_{i=1}^{r}(a_i-b_i)=A$$

$$H_2'(0)=\sum a_i-1-b_i=-r+\sum(a_i-b_i)=A$$

$$\begin{aligned}H_1''(0)=&\sum_i(-2-b_i)(2+b_i+\sum_j(a_j-b_j-1))+(a_i+1)(-a_i-1+\sum_j(a_j-1-b_i)),\\ =&A^2-\sum_i(2+b_i)^2+(a_i+1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_2''(0)=&\sum_i(a_i-1)(-a_i+1+\sum_j(a_j-b_j-1))-b_i(b_i+\sum_j(a_j-b_j-1))\\ =&A^2-\sum_i(a_i-1)^2+b_i^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_1'''(0) = &\sum_{i\neq j}(b_i+2)(b_j+2)(4+b_i+b_j+A) - \sum_{i,j} 2(b_i+2)(a_j+1)(b_i-a_j+1+A) \\
&+\sum_{i\neq j}(a_i+1)(a_j+1)(-a_i-a_j-2+A) \\
=&-\sum_i (b_i+2)^2(4+2b_i+A) - \sum_i (a_i+1)^2(-2a_i-2+A) \\
&+\sum_{i,j}\{(b_i+2)(b_j+2)(4+b_i+b_j+A) \\
&-2(b_i+2)(a_j+1)(b_i-a_j+1+A)+(a_i+1)(a_j+1)(-a_i-a_j-2+A)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2'''(0) = &\sum_{i\neq j} b_i b_j(b_i+b_j+A) - 2\sum_{i,j} b_i(a_j-1)(b_i-a_j+1+A) \\
&+\sum_{i\neq j}(a_i-1)(a_j-1)(-a_i-a_j+2+A) \\
=&-\sum_i b_i^2(2b_i+A) - \sum_i (a_i-1)^2(-2a_i+2+A) \\
&+\sum_{i,j}\{b_i b_j(b_i+b_j+A)-2b_i(a_j-1)(b_i-a_j+1+A) \\
&+(a_i-1)(a_j-1)(-a_i-a_j+2+A)\}
\end{aligned}
$$

となる．そこで，

$$
\begin{aligned}
&(H_1(w)H_2(w)^{-1})'''|_{w=0} \\
=&H_1'''(0)H_2(0)+3H_1''(0)(H_2(0)^{-1})'+3H_1'(0)(H_2(0)^{-1})''+(H_2(0)^{-1})'''H_1(0) \\
=&H_1'''(0)-3H_1''(0)H_2'(0)+3H_1'(0)(2H_2'(0)^2-H_2''(0))-H_2(0)'''+6H_2'(0)H_2''(0)-6H_2'(0)^3 \\
=&H_1'''(0)-H_2'''(0)+12A\sum 1+b_i+a_i \\
=&8\sum_{i,j}(1-a_ia_j+2b_i+b_ib_j)-\sum(b_i+2)^2(4+2b_i+A)-\sum(a_i+1)^2(-2a_i-2+A) \\
&+\sum b_i^2(2b_i+A)+\sum(a_i-1)^2(-2a_i+2+A)+12A\sum 1+b_i+a_i \\
=&8\sum_{i,j}(1-a_ia_j+2b_i+b_ib_j)+4\sum(1+a_i+b_i)(3a_i-3b_i+2A-3)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
&-3(H_1(w)H_2(w)^{-1})''|_{w=0} = -3(H_1''(0)-2H_1'(0)H_2'(0)+2(H_2'(0))^2-H_2''(0)) \\
=&-3(A^2-\sum_i(2+b_i)^2+(a_i+1)^2-A^2+\sum_i(a_i-1)^2+b_i^2) = 12\sum 1+b_i+a_i
\end{aligned}
$$

なので，求める値は

$$
\begin{aligned}
&8\sum_{i,j}(1-a_ia_j+2b_i+b_ib_j)+4\sum(1+a_i+b_i)(3a_i-3b_i+2A-3)+12\sum 1+b_i+a_i \\
=&8\sum_{i,j}(1-a_ia_j+2b_i+b_ib_j)+4\sum(1+a_i+b_i)(3a_i-3b_i+2A) \\
=&12\sum(1+a_i+b_i)(a_i-b_i)=-12\sum(b_i(b_i+1)-a_i(a_i+1))
\end{aligned}
$$

となる．よって，

$$
\chi_\lambda(g)=\frac{\dim V}{d(d-1)}\sum(b_i(b_i+1)-a_i(a_i+1))
$$

となる． □

4.3.5 応用例 2

補題 4.29. $g=(1,2,\cdots,d)\in\mathfrak{S}_d$ とする．このとき λ が鉤型なら $\chi_\lambda(g)=\pm1$ であり，λ が鉤型でないなら $\chi_\lambda(g)=0$ となる．実際，

$$
\chi_\lambda(g)=\begin{cases}(-1)^s & \textit{if } \lambda=(d-s,1,\cdots,1),\ 0\le s\le d-1 \\ 0 & \textit{otherwise}\end{cases}
$$

となる．

Proof. Frobenius 公式において変数の数を d としても構わない．Frobenius 公式から $\Delta(x)(x_1^d+\cdots+x_d^d)$ の $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_d^{l_d}$ の係数を考えればよい．ここで $l_i=\lambda_i+d-i$ であり $l_1>l_2>\cdots l_d\ge0$ である．

$$
\Delta(x)=\sum\ \mathrm{sgn}(\sigma)x_d^{\sigma(1)-1}\cdots x_1^{\sigma(d)-1}
$$

であるので，

$$
\Delta(x)(x_1^d+\cdots x_d^d)=\sum_{p=1}^{d}\sum_{\sigma}\ \mathrm{sgn}(\sigma)x_d^{\sigma(1)-1}\cdots x_1^{\sigma(d)-1}x_p^d
$$

となる．よって $x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_d^{l_d}$ の係数が零でない場合は，$l_1>l_2>\cdots l_d\ge0$ により，

$$
\mathrm{sgn}(\sigma)x_d^{\sigma(1)-1}\cdots x_1^{\sigma(d)-1}x_1^d
$$

の場合を考えればよい．そして，σ としては，

$$
\sigma=\begin{pmatrix} d & d-1 & d-2 & \cdots & t & t-1 & \cdots & 1 \\ t & d & d-1 & \cdots & t+1 & t-1 & \cdots & 1\end{pmatrix}
$$

となるときであり，

$$\mathrm{sgn}(\sigma)x_1^{d+t-1}x_2^{d-1}x_3^{(d-1)-1}\cdots x_d^0=(-1)^{d-t}x_1^{d+t-1}x_2^{d-1}x_3^{(d-1)-1}\cdots x_d^0$$

となる．$l_1=\lambda_1+d-1=d+t-1$ であるので $\lambda_1=t$ であり，$t=d-s$ とすれば，$\lambda=(d-s,1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ であり，係数は $(-1)^s$ になる． □

この $\lambda=(d-s,1,\cdots,1)$ に対する既約表現が何であるか見てみよう．V（$\dim V=d-1$）を標準表現とすれば $\Lambda^s V$ は既約表現であったが，実は，これが $\lambda=(d-s,1,\cdots,1)$ に対する既約表現になるのである．以下で，この事実を証明する．(ただし，かなり面倒である．よりよい方法は section 6 で与える)．

まず $g=(1,2,\cdots,d)$ の $\Lambda^q\mathbb{C}^d=\Lambda^qV\oplus\Lambda^{q-1}V$ の指標は零（$q\geq 1$）であるので，帰納的に $\chi_{\Lambda^qV}(g)=(-1)^q$ であることがわかる．よって，補題から $V_{(d-s,1\cdots,1)}\cong\Lambda^qV$ となる q が存在する．さらに，次元公式を考えれば，$\dim V_{(d-s,1\cdots,1)}=\dim\Lambda^sV=\dim\Lambda^{d-1-s}V$ であることもわかるので，

$$V_{(d-s,1,\cdots,1)}\cong\Lambda^sV,\quad \text{or}\quad V_{(d-s,1,\cdots,1)}\cong\Lambda^{d-1-s}V$$

である．そして，d が偶数なら，$g=(1,2,\cdots,d)$ の指標を考えれば $\chi_{\Lambda^sV}(g)=(-1)^s\neq(-1)^{d-1-s}=\chi_{\Lambda^{d-1-s}V}(g)$ であるので，$V_{(d-s,1,\cdots,1)}\cong\Lambda^sV$ となる．しかし d が奇数のときは，これだけでは区別できない．そこで，別の元に対する指標を計算することにより，Λ^sV と $\Lambda^{d-1-s}V$ を区別しよう．

既約表現 Λ^sV に対する指標は，すでに計算した（section 4.2）．我々は $g=(1)(2)\cdots(d-2)(d,d+1)$ という元の指標を考える．このとき

$$\chi_{\Lambda^s(V)}(g)=\frac{d-1-2s}{d-1}\binom{d-1}{s}=-\chi_{\Lambda^{d-1-s}(V)}(g)$$

となるのであった．

一方，$\chi_{(d-s,1,\cdots,1)}(g)$ を Frobenius の公式を使えば，

$$\chi_{(d-s,1,\cdots,1)}(g)=\frac{d-1-2s}{d-1}\binom{d-1}{s}$$

となることがわかる．

証明 *1.* 先ほどの Section 4.3.4 の結果

$$\chi_\lambda(g)=\frac{\dim V_\lambda}{d(d-1)}\sum_{i=1}^r(b_i(b_i+1)-a_i(a_i+1))$$

に代入すればよい． □

証明 *2.* 別証明を与える．ただし，対称式の関係式や Kostska 数などを使うので，つぎの section 5 を読み終わった後で見て欲しい．まず，計算すべきは，

$$[\Delta(x_1,\cdots,x_{s+1})(x_1+\cdots+x_{s+1})^{d-2}(x_1^2+\cdots+x_{s+1}^2)]_{(d,s,s-1,\cdots,1)}$$

である．$p_1=h_1$ であり，$p_2=-h_1^2+2h_2$ となる（$\{h_i\}$ は完全対称式）．そこで $H_\lambda=h_{\lambda_1}\cdots h_{\lambda_k}$ としたとき，

$$p_1^{d-2}p_2=h_1^{d-2}(-h_1^2+2h_2)=-H_{(\underbrace{1,1,1,\cdots,1}_{})}+2H_{(\underbrace{2,1,\cdots,1}_{d-1})}$$

よって，Kostska 数 $K_{\lambda\mu}=[\Delta(x)H_\mu(x)]_l$（$l_i=\lambda_i+k-i$．また k は多項式の変数の数）を計算すればよい．今の場合には，ヤング図形を書けば計算することが可能であり（c.f. Section 5.3.1）

$$[-\Delta H_{(1,\cdots,1)}+2\Delta H_{(2,1,\cdots,1)}]_{(d,s,s-1,\cdots,1)}=-K_{(d-s,1,\cdots,1),(1,1,\cdots,1)}+2K_{(d-s,1,\cdots,1),(2,1,\cdots,1)}$$
$$=-\binom{d-1}{s}+2\binom{d-2}{s}=\frac{d-1-2s}{d-1}\binom{d-1}{s}$$

となる． □

以上の考察から

命題 4.30. $\mathfrak{S}_d$ の標準表現を V とする．既約交代テンソル積表現 Λ^sV に対応する分割は鉤型

$$\lambda=(d-s,\underbrace{1,\cdots,1}_{s})$$

である．また Λ^sV に対する分割と $\Lambda^{d-1-s}(V)$ に対する分割は共役となる．

5　対称式２（シューア多項式）

前 section の Frobenius 公式において，冪和対称式が現れた．実際，Frobenius 公式を証明するには，対称式に関する知識を必要とする．また，Frobenius 公式の具体的な計算や応用には，対称式は必須である．そこで，この section では対称式について学ぶことにする．

Section 2 において対称式の基本的なことを述べたが，より詳しく見ていこう多項式の変数は $x_1, \cdots, x_k$ とする．また，ここで，考える多項式の多くは次数 d の斉次多項式である．また，d の分割 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ は $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_k \geq 0$ を満たすとする．つまり $l(\lambda) \leq k$ となるとする．

5.1　定義

以前導入し対称式は，**冪和対称式** $\{p_j : j = 0, 1, 2, \cdots\}$ 及び**基本対称式** $\{e_0, \cdots, e_k\}$ である．まず，これらは次のようにして定義できる．冪和対称式を

$$P(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j t^{j-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{x_i}{1 - x_i t} = \sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dt} \log \frac{1}{1 - x_i t}$$

により定義できる．また基本対称式は

$$E(t) = \prod_{i=1}^{k} (1 + x_i t) = \sum_{j=0} e_j t^j$$

はである．これら以外にもいくつかの対称式を定義しておく．

定義 5.1. **完全対称式** $\{h_j \mid j = 0, 1, \cdots\}$ を

$$H(t) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - x_i t} = \sum_{j=0}^{\infty} h_j t^j$$

によりで定義する．

たとえば，３変数の場合には，

$$h_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad h_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

となる．一般には

$$h_d = \sum_{i_1 + \cdots + i_k = d} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$$

となるので，

$$h_d = \sum_{|\lambda| = d} M_\lambda(x)$$

と書ける．ここで和は d のすべての分割について和をとっている．ここで M_λ は Section 2 で導入した軌道和対称式である．

定義 5.2. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する．d の分割 λ で $l(\lambda) \leq k$ なるものを考える．つまり，$d = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$（$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_k \geq 0$）を考える．このとき，$d$ 次対称式 H_λ を

$$H_\lambda := h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k} \tag{5.1}$$

で定義する．また d 次対称式 M_λ（軌道和対称式）を

$$M_\lambda = \sum X^\alpha \tag{5.2}$$

ここで和は $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ の**すべての異なる置換** $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ でとっている（下の例をみよ）．

また，k を固定して，$k \geq \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_l \geq 0$ となる d の分割 $\mu_1 + \cdots + \mu_l$ を考える（つまり第一行の箱の数が k 以下のものであり，$l > k$ でも構わない）．このような μ に対して，d 次対称式 E_μ を

$$E_\mu := e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_l}$$

とする．

例 5.1. 3 変数の場合に考えてみよう．まず完全対称式は

$$H_{(1,1)} = h_1 h_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2, \quad H_{(2,0)} = h_2 h_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

などとなる．

次に，$M_{(1,1)} = M_{(1,1,0)}$ は $x_1^1 x_2^1 x_3^0$ のすべての異なる置換を考えたものなので

$$M_{(1,1)} = x_1^1x_2^1x_3^0 + x_1^0x_2^1x_3^1 + x_1^1x_2^0x_3^1 = \frac{1}{2!1!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} x_{\sigma(1)}^1 x_{\sigma(2)}^1 x_{\sigma(3)}^0 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

同様に，

$$M_{(2,0,0)} = \frac{1}{1!2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} x_{\sigma(1)}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

となる．

さらに，

$$E_{(1,1)} = e_1 e_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2, \quad E_{(2,0)} = e_2 e_0 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

次にシューア多項式を導入する．

定義 5.3 (シューア多項式)**.** 行列 $(a_j^i)_{i,j}$ に対して，その行列式を $|a_j^i|$ と書くことにする．
分割 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ に対して，

$$\begin{aligned} S_\lambda =& \frac{|x_j^{\lambda_i+k-i}|}{|x_j^{k-i}|} = \frac{|x_j^{\lambda_i+k-i}|}{\Delta} \\ =& \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+k-1} & x_1^{\lambda_2+k-2} & \cdots & x_1^{\lambda_k} \\ x_2^{\lambda_1+k-1} & x_2^{\lambda_2+k-2} & \cdots & x_2^{\lambda_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{\lambda_1+k-1} & x_k^{\lambda_2+k-2} & \cdots & x_k^{\lambda_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1^{l_1} & x_1^{l_2} & \cdots & x_1^{l_k} \\ x_2^{l_1} & x_2^{l_2} & \cdots & x_2^{l_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{l_1} & x_k^{l_2} & \cdots & x_k^{l_k} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とする．ここで $l_i=\lambda_i+k-i$ としている．分子，分母が交代式なので S_λ は対称多項式である．また次数は $d=\sum\lambda_i$ である．この d 次対称式 S_λ を**シューア多項式**と呼ぶ．

補足 5.2. $a\in\mathbb{N}^k$ とした場合でも，S_a は定義可能である．ただし，この場合には $a=(a_1,\cdots,a_k)$ として，$(a_1+k-1,a_2+k-2,\cdots,a_k)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$ 以外の時は 0 とする．またある $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ およびある分割 λ が存在して，$\lambda+\delta=\sigma(a+\delta)$ となるが，このときは $S_a=\operatorname{sgn}(\sigma)S_\lambda$ である．

例 5.3. 3 変数で考える．このとき

$$S_{(1,1)}=S_{(1,1,0)}=\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1^0 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2^0 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3^0 \end{vmatrix}=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

となる．また

$$S_{(2,0,0)}=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

となる．シューア多項式を計算するのは面倒な感じだが，実は半標準盤を使うことで計算できる.（後述．系 5.34 ）.

命題 5.4. $l(\lambda)\leq k$ の d の分割の全体 $\{\lambda\}_\lambda$ を考える．$\{S_\lambda\}_\lambda$ **は** k **変数** d **次対称式の基底**になる．

Proof. まず d 次対称式の全体に差積をかければ，$d+\frac{k(k-1)}{2}$ 次交代式の全体になる．シューア多項式の分子 $|x_j^{\lambda_i+k-i}|$ は $d+\frac{k(k-1)}{2}$ 次の交代式であり，辞書式順序で最高次の項は $x_1^{\lambda_1+k-1}\cdots x_k^{\lambda_k}$ である．そこで，λ を動かしたとき交代式は独立であることがわかる．つまり，

$$\sum_\lambda a_\lambda|x_j^{\lambda_i+k-i}|=0$$

とすれば，辞書式に順に眺めていけば，$a_\lambda = 0$（$\forall\lambda$）であることがわかる．さらに次元を考えれば，$d + \frac{k(k-1)}{2}$ 次交代式の次元と一致するので，$\{|x_j^{\lambda_i+k-i}|\,|\,\lambda\}$ は交代式の基底になる．よって $\{S_\lambda\}_\lambda$ は基底になる． $\square$

さて，上の例をみるといくつかの関係式があることがわかる．例えば，

$$S_{(1,1)} = E_{(2,0)} = h_1^2 - h_2 \quad S_{(2,0)} = H_{(2,0)} = e_1^2 - e_2, \quad S_{(1,0)}S_{(1,0)} = S_{(1,1)} + S_{(2,0)}$$

が成立する．では，一般の場合に同様の関係式が成立するのであろうか？次の subsection では，そのような関係式を議論する．

5.2 対称式に対するいくつかの恒等式

まず，基本対称式に対して次が成立する．多項式の変数はもちろん $x_1, \cdots, x_k$ である．$\prod_{i=1}^k (t - x_i) = \sum_{s=0}^k (-1)^{k-s} e_{k-s}(x) t^s$ に x_i を代入すれば，次を得る．

命題 5.5.

$$x_j^p - e_1 x_j^{p-1} + e_2 x_j^{p-2} - \cdots + (-1)^k e_k x_j^{p-k} = 0, \quad 1 \le j \le k,\ p \ge k \tag{5.3}$$

この命題から x_j^p（$p \ge k$）は $e_1, \cdots, e_k$ の多項式と x_j^l（$l = 0, \cdots, k-1$）を使って表せることがわかる．

さて，$E(-t)H(t) = 1$ であるので，

$$1 = \sum_{j=0}^k e_j (-t)^j \sum_{l=0}^\infty h_l t^l = \sum (-1)^j e_j h_l t^{j+l} = \sum_{p=0}^\infty (\sum_{j=0}^k (-1)^j e_j h_{p-j}) t^p$$

となる．ただし，$h_s = 0$（$s < 0$）としている．よって，

命題 5.6.

$$h_p - e_1 h_{p-1} + e_2 h_{p-2} + \cdots + (-1)^k e_k h_{p-k} = 0, \quad p > 0$$

5.2.1 Giambelli の公式

まず，最初の目的は，上の二つの命題を使って，シューア多項式を完全対称式または基本対称式で表すことである．

そこで，上の命題を後で使う形に直しておくと，

$$h_{p-m} - e_1 h_{p-m-1} + e_2 h_{p-m-2} + \cdots + (-1)^k e_k h_{p-m-k} = 0, \quad 0 \le m < k,\ p \ge k \tag{5.4}$$

が成立する．(5.3) のときと同様に，h_{p-m}（$0 \le m < k \le p$）は $e_1, \cdots, e_k$ の多項式と h_{k-m-l}（$l = 1, \cdots, k$）を使って表せる．

そこで，(5.3), (5.4) の漸化式は一致しているので，$e_1, \cdots, e_k$ を変数とする多項式 $A(p,q)$ が存在して，

$$x_j^p = A(p,1)x_j^{k-1} + A(p,2)x_j^{k-2} + \cdots + A(p,k) \quad p \geq k$$
$$h_{p-m} = A(p,1)h_{k-m-1} + A(p,2)h_{k-m-2} + \cdots + A(p,k)h_{-m}, \quad 0 \leq m < k,\ p \geq k$$

となる．

非負整数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ に対して，

$$\begin{aligned} x_j^{\lambda_1+k-1} &= A(\lambda_1+k-1,1)x_j^{k-1} + \cdots + A(\lambda_1+k-1,k) \\ x_j^{\lambda_2+k-2} &= A(\lambda_2+k-2,1)x_j^{k-1} + \cdots + A(\lambda_2+k-2,k) \\ &\cdots \\ x_j^{\lambda_k} &= A(\lambda_k,1)x_j^{k-1} + \cdots + A(\lambda_k,k) \end{aligned}$$

が $j = 1, \cdots, k$ について成立するので，次の行列表示（$k \times k$ 行列）を得る．

$$(x_j^{\lambda_i+k-i})_{ij} = (A(\lambda_i+k-i,r))_{ir} \cdot (x_j^{k-r})_{rj}$$

同様に，

$$h_{p-m} = A(p,1)h_{k-m-1} + A(p,2)h_{k-m-2} + \cdots + A(p,k)h_{-m}, \quad 0 \leq m < k,\ p \geq k$$

において，$p = \lambda_i + k - i$（$i = 1, \cdots, k$）とすれば，$p - m = \lambda_i + (k-m) - i$ となるので，$j = k - m$ とすれば，

$$(h_{\lambda_i+j-i})_{ij} = (A(\lambda_i+k-i,r))_{ir} \cdot (h_{j-r})_{rj}$$

という行列表示（$k \times k$ 行列）を得ることができる．

また，(5.4) から次のこともわかる．

補題 5.7. 行列 $(h_{q-p})_{pq}$ 及び $((-1)^{q-p}e_{q-p})_{pq}$ は下三角行列であり，対角成分は 1．そして互いに逆行列である．ここで $i < 0$ に対して $e_i = 0,\ h_i = 0$ としている．

$$(h_{q-p})_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{k-1} & h_{k-2} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$((-1)^{q-p}e_{q-p})_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2 & -e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{k-1}e_{k-1} & (-1)^{k-2}e_{k-2} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

である．特に，

$$(A(\lambda_i + k - i, r))_{ir} = (h_{\lambda_i + p - 1})_{ip} \cdot ((-1)^{r-p} e_{r-p})_{pr}$$

となる．

この補題から

$$(x_j^{\lambda_i + k - i})_{ij} = (h_{\lambda_i + p - 1})_{ip} \cdot ((-1)^{r-p} e_{r-p})_{pr} \cdot (x_j^{k-r})_{rj}$$

となる．この式で行列式をとれば，真ん中の行列式は 1 であるので，

$$\det((x_j^{\lambda_i + k - i})_{ij}) = \det((h_{\lambda_i + p - 1})_{ip}) \det((x_j^{k-r})_{rj})$$

となる．よって，

命題 5.8 (determinantal formula 1 : Jacobi-Trudy 恒等式 or Giambelli の公式)**.** d 次シューア多項式と完全対称式の関係は次で与えられる．

$$S_\lambda = \frac{|x_j^{\lambda_i + k - i}|}{|x_j^{k-i}|} = |h_{\lambda_i + j - i}| = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1 + 1} & \cdots & h_{\lambda_1 + k - 1} \\ h_{\lambda_2 - 1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2 + k - 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{\lambda_k - k + 1} & \cdots & \cdots & h_{\lambda_k} \end{vmatrix}$$

特に

$$h_l = S_{(l)}, \quad l \geq 0$$

が成立する．

次にシューア多項式が基本対称式の多項式として書き表せることをみたい．目的は次．

命題 5.9 (determinantal formula 2 : Giambelli の公式)**.** d 次シューア多項式と基本対称式の関係は次で与えられる．λ と共役な分割を $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$ とすれば，

$$S_\lambda = |e_{\mu_i + j - i}| = \begin{vmatrix} e_{\mu_1} & e_{\mu_1 + 1} & \cdots & e_{\mu_1 + l - 1} \\ e_{\mu_2 - 1} & e_{\mu_2} & \cdots & e_{\mu_2 + l - 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{\mu_l - l + 1} & \cdots & \cdots & e_{\mu_l} \end{vmatrix}$$

ただし，$s < 0$ 及び $s > k$ に対して $e_s = 0$ としている．特に，

$$e_d = S_{(\underbrace{1, \cdots, 1}_{d})}, \quad 0 \leq d \leq k$$

が成立する．

前の命題を使えば，次を証明すればよいことになる．

命題 5.10. d 次完全対称式と基本対称式の間には次の関係式が成立する．

$$|h_{\lambda_i+j-i}| = |e_{\mu_i+j-i}| \tag{5.5}$$

この命題 5.10 を証明するために補題を二つ用意する．

補題 5.11. d の分割 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ と $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_l)$ を互いに共役とする．このとき，

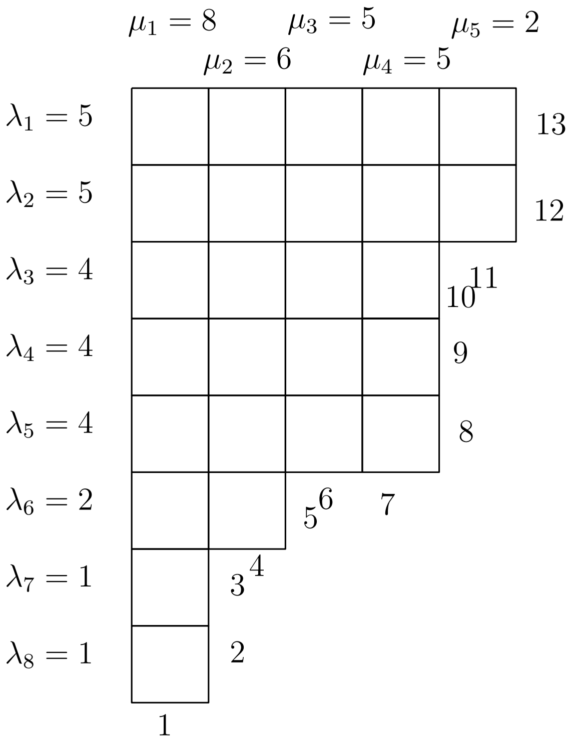
$$A = \{\lambda_i + k + 1 - i \mid 1 \le i \le k\}, \quad B = \{k + j - \mu_j \mid 1 \le j \le l\}$$

は交わらず，$A \cup B = \{1, \cdots, k+l\}$ となる．

Proof. まず，$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \lambda_k$ であるので，A 内で $i \ne j$ なら $\lambda_i + k + 1 - i \ne \lambda_j + k + 1 - j$ となる．B でも同様である．また，

また $l = \lambda_1 \ge \cdots \lambda_k > 0$ であり，$k = \mu_1 \ge \cdots \ge \mu_l > 0$ である．そこで $A \subset \{1, \cdots, k+l\}$, $B \subset \{1, \cdots, k+l\}$ である．また $\lambda_1 + k + 1 - 1 = k + l \in A$ であり，$k + 1 - \mu_1 = 1 \in B$ となることに注意する．

ヤング図形に対して，右上の箱の横から順に辺にそって，下図のように，$k+l$ から 1 まで番号をうつことができるが，これが i 行目の右側に書いたものが $\lambda_i + k + 1 - i$ であり，j 列目の下側に書いたものが $k + j - \mu_j$ であることがわかる．



よって，$A \cup B = \{1, \cdots, k+l\}$ となる． □

次に，$r \times r$ の行列 $A = (a_{ij})$ を考える．また $S = (s_1, \cdots, s_k)$, $T = (t_1, \cdots, t_k)$ を，$s_i \neq s_j, t_i \neq t_j$ で，$s_i, t_i \in \{1, \cdots, r\}$ とする．このとき $A_{S,T}$ を成分が $(a_{s_i, t_j})_{ij}$ の $k \times k$ の小行列の行列式とする．

補題 5.12. A, B を $r \times r$ の行列で $AB = cI_r$ とする．また (S, S'), (T, T') を，それぞれ $(1, \cdots, r)$ を置換したものとして，S, T は k 個の数からなり，S', T' を $r - k$ 個の数からなるものとする．このとき，

$$c^{r-k} A_{S,T} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} S,\ S' \\ 1, \cdots, r \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} T,\ T' \\ 1, \cdots, r \end{pmatrix} \det(A) B_{T',S'}$$

が成立する．

Proof. $C_{ij} = \mathrm{id} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ とする．このとき $A \mapsto AC_{ij}$ は A の i 列と j 列を入れ替える操作である，また $A \mapsto C_{ij}A$ が i 行と j 行を入れ替える操作である．また $\det C_{ij} = -1$ である．

そこで，この操作を行っていけば，ある P, Q が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}. \quad A_{S,T} = \det A_1$$

とすることができる．つまり

$$P \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1, \cdots, r \\ s_1, \cdots, s_r \end{pmatrix} \quad Q \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1, \cdots, r \\ t_1, \cdots, t_r \end{pmatrix}$$

と対応させている．また，この P, Q を使えば，

$$Q^{-1}BP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}, \quad B_{T',S'} = \det B_4$$

となることがわかる．また $AB = c\mathrm{id}_r$ なので，

$$(PAQ)(Q^{-1}BP^{-1}) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\mathrm{id}_k & 0 \\ 0 & c\mathrm{id}_{r-k} \end{pmatrix},$$

となり，

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{id}_k & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & c\mathrm{id}_{r-k} \end{pmatrix}$$

が成立する．この行列式をとれば，$\det(PAQ)\det(B_4) = c^{r-k}\det A_1$ となる．よって，

$$c^{r-k} A_{S,T} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} S,\ S' \\ 1, \cdots, r \end{pmatrix} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} T,\ T' \\ 1, \cdots, r \end{pmatrix} \det(A) B_{T',S'}$$

が成立する． $\square$

上の二つの補題を使って，(5.5) を証明しよう．

proof of 命題 *5.10.* まず命題 5.6 を使えば，$r\times r=(k+l)\times(k+l)$ 行列，$A:=(h_{q-p})_{pq}$, $B:=((-1)^{q-p}e_{q-p})_{pq}$ としたときに，これらは互いに逆行列であることがわかる．ただし，$s<0$ に対して $h_s=0$, $e_s=0$．また $s>k$ に対して $e_s=0$ としている．上の補題 5.12 を適用したい．そこで

$$\begin{aligned}T&=(\lambda_1+k,\lambda_2+k-1,\cdots,\lambda_k+1)\\T'&=(k+1-\mu_1,k+2-\mu_2,\cdots,k+l-\mu_l)\\S&=(k,k-1,\cdots,1)\\S'&=(k+1,k+2,\cdots,k+l)\end{aligned}$$

とする．ここで補題 5.11 から $T\cup T'=\{1,\cdots,k+l\}$ であることに注意．また，

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}S,S'\\1,\cdots,r\end{pmatrix}=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

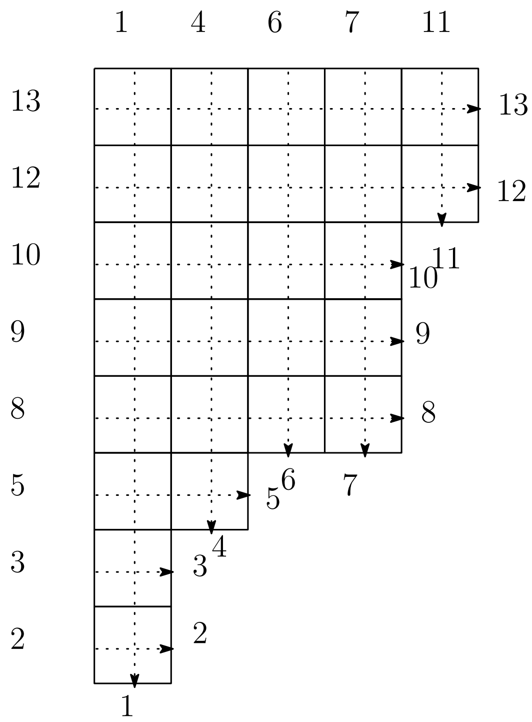
は明らか．一方

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}T,T'\\1,\cdots,r\end{pmatrix}=(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+d},$$

となる．実際，下の図において点線の交点を数えれば，

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}\lambda_k+1&\lambda_{k-1}+2&\cdots&\lambda_1+k&k+1-\mu_1&k+2-\mu_2&\cdots&k+l-\mu_l\\1&2&\cdots&k&k+1&k+2&\cdots&k+l\end{pmatrix}=(-1)^d$$

であることがわかる．



よって,

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} T, T' \\ 1, \cdots, r \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}+d},$$

となる.

さて,

$$A_{S,T} = \det((a_{s_j t_i})_{ji}) = \det(h_{t_i - s_j}) = \det(h_{(\lambda_i+k+1-i)-(k+1-j)}) = |h_{\lambda_i+j-1}|$$

となり,

$$\begin{aligned} B_{T',S'} &= \det(b_{t'_j s'_i}) = \det((-1)^{s'_i - t'_j} e_{s'_i - t'_j}) = |(-1)^{\mu_j+i-j} e_{\mu_j+i-j}| \\ &= (-1)^{\sum \mu_j - j}(-1)^{\sum i}|e_{\mu_i+i-j}| = (-1)^d |e_{\mu_i+i-j}| \end{aligned}$$

となる.ここで $d = \sum \mu_j = \sum \lambda_i$ を用いた.よって補題 5.12 を使えば,

$$|h_{\lambda_i+j-1}| = 1^{r-k} A_{S,T} = (-1)^d (\det A) B_{T'S'} = (-1)^d \times 1 \times (-1)^d |e_{\mu_i+i-j}| = |e_{\mu_i+i-j}|$$

が成立する.

$\square$

基本対称式と完全対称式の関係式

$$|h_{\lambda_i+j-1}| = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+k-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{\lambda_k-k+1} & \cdots & \cdots & h_{\lambda_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{\mu_1} & e_{\mu_1+1} & \cdots & e_{\mu_1+l-1} \\ e_{\mu_2-1} & e_{\mu_2} & \cdots & e_{\mu_2+l-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{\mu_l-l+1} & \cdots & \cdots & e_{\mu_l} \end{vmatrix} = |e_{\mu_i+i-j}|$$

の特別な場合を考えてみる.$\mu = (d, 0, \cdots, 0)$($0 \le d \le k$)とすれば,右辺は e_d である.そこで μ と共役な分割は

$$\lambda = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{d})$$

となるので,

$$e_d = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_d \\ 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{d-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{d-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & h_1 \end{vmatrix} = |(h_{1-i+j})_{1 \le i,j \le d}|$$

同様に $\lambda = (l)$(l は任意の非負整数)となるものを考える.この共役は

$$\mu = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{l})$$

であり，

$$h_l = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_l \\ 1 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{l-1} \\ 0 & 1 & e_1 & \cdots & e_{l-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & e_1 \end{vmatrix} = |(e_{1-i+j})_{1\le i,j\le l}|$$

補足 5.13. 公式 $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i h_{p-i}e_i = 0$ を思い出す．上の行列式表示が成立すると仮定して，第一行の余因子展開を使えば，帰納法で上の式を証明もできる．

系 5.14. 多項式の変数を $x_1, \cdots, x_k$ とし，基本対称式と完全対称式を考える，このとき次の関係式が成立する．

$$e_d = |(h_{1-i+j})_{1\le i,j\le d}| \quad (1 \le d \le k), \qquad h_l = |(e_{1-i+j})_{1\le i,j\le l}| \quad (l \ge 1)$$

ここで $e_s = k_s = 0$（$s < 0$）．$e_s = 0$（$s > k$）としている．また，このことから $\{h_1, \cdots, h_k\}$ が k 変数対称式の代数的な基底になっていることもわかる．

Proof. $\{e_1, \cdots, e_k\}$ は代数的な基底であった．この e_i は $\{h_1, \cdots, h_k\}$ の多項式として書くことが出来る．よって $\{h_1, \cdots, h_k\}$ は代数的生成元であることがわかる．また $\{h_1, \cdots, h_k\}$ が代数的に独立であることは section 2 の冪和対称式の独立性と同様に証明すればよい． □

5.2.2 Newton の公式

次に，冪和対称式と基本対称式，完全対称式の関係を見ていこう．それぞれの定義である $E(t)$, $H(t)$, $P(t)$ を思い出す（see subsection 5.1）．まず，

$$\frac{d}{dt}\log H(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dt}\log\frac{1}{1-x_i t} = P(t)$$

となる．よって，$H(t)P(t) = H'(t)$ であるので，

$$\sum_{l=0}(l+1)h_{l+1}t^l = \sum_{r\ge 0} h_r t^r \sum_{s\ge 1} p_s t^{s-1} = \sum h_r p_s t^{r+s-1} = \sum_{l=0}\sum_{s=1}^{l+1} p_s h_{l+1-s} t^l$$

となるので，

命題 5.15. 完全対称式と冪和対称式の関係は

$$lh_l = \sum_{s=1}^{l} p_s h_{l-s}$$

である．また

$$H(t) = \exp(\sum_{r\geq 1} p_r \frac{t^r}{r})$$

が成立する．

系 5.16. 完全対称式と冪和対称式は次の行列式表示で関係する．

$$(-1)^{l-1}p_l = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2h_2 & h_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ lh_l & h_{l-1} & h_{l-2} & \cdots & h_1 \end{vmatrix}, \quad h_l = \frac{1}{l!}\begin{vmatrix} p_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{l-1} & p_{l-2} & p_{l-3} & \cdots & -l+1 \\ p_l & p_{l-1} & p_{l-2} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}$$

Proof. 証明は帰納法で行う．まず $p_1 = h_1$ であることはよいであろう．そこで，l 以下に対して上の式が成立すると仮定する．

このとき，

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2h_2 & h_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (l+1)h_{l+1} & h_l & h_{l-1} & \cdots & h_1 \end{vmatrix} \\
=&(-1)^l(l+1)h_{l+1} + (-1)^{l+1}h_l h_1 + (-1)^{l+2}h_{l-2}\begin{vmatrix} h_1 & 1 \\ 2h_2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{2l}h_1 \begin{vmatrix} h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2h_2 & h_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ lh_l & h_{l-1} & h_{l-2} & \cdots & h_1 \end{vmatrix} \\
=&(-1)^l(l+1)h_{l+1} + (-1)^{l+1}h_l p_1 + (-1)^{l+2}h_{l-2}(-1)p_2 + \cdots + (-1)^{2l}h_1(-1)^{l-1}p_l \\
=&(-1)^l((l+1)h_{l+1} - h_l p_1 - h_{l-2}p_2 - \cdots - h_1 p_l) = (-1)^l p_{l+1}
\end{aligned}$$

次に，

$$
\begin{vmatrix}
p_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
p_2 & p_1 & -2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
p_l & p_{l-1} & p_{l-2} & \cdots & -(l+1)+1 \\
p_{l+1} & p_l & p_{l-1} & \cdots & p_1
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
=&(-1)^l p_{l+1}(-1)^l l! + (-1)^{l+1} p_l \frac{(-1)^l l! p_1}{(-1)1!} + (-1)^{l+2} p_{l-1} \frac{(-1)^l l!}{(-1)^2 2!} \begin{vmatrix} p_1 & -1 \\ p_2 & p_1 \end{vmatrix} + \cdots \\
&+ (-1)^{2l} p_1 \begin{vmatrix}
p_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
p_2 & p_1 & -2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
p_{l-1} & p_{l-2} & p_{l-3} & \cdots & -l+1 \\
p_l & p_{l-1} & p_{l-2} & \cdots & p_1
\end{vmatrix} \\
=&l!(p_{l+1}h_0 + p_l h_1 + p_{l-1}h_2 + \cdots + p_1 h_l) = l!(l+1)h_{l+1} = (l+1)! h_{l+1}
\end{aligned}
$$

となる．以上で証明された． □

次に基本対称式と冪和対称式の関係を考えよう．上と同様にして，

$$
\frac{d}{dt} \log \frac{1}{E(-t)} = \frac{E'(-t)}{E(-t)} = P(t)
$$

であるので，$E(-t)P(t) = E'(-t)$ が成立する．よって，

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{k-1} (l+1) e_{(l+1)} (-1)^l t^l &= \sum_{r=0}^{k} e_r (-1)^r t^r \sum_{s \geq 1} p_s t^{s-1} = \sum (-1)^r e_r p_s t^{r+s-1} \\
&= \sum_{l \geq 0} \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^r e_r p_{l+1-r} t^l
\end{aligned}
$$

となる.（Newton の公式は前に別の方法で証明した）.

命題 5.17 (Newton の公式). **冪和対称式と基本対称式の関係は次のよう．**

$$
(-1)^l(-l)e_l = \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^r e_r p_{l-r} \quad (1 \leq l \leq k), \quad \sum_{r=0}^{l} (-1)^r e_r p_{l-r} = 0 \quad (k \leq l)
$$

また，

$$
E(t) = \exp(-\sum_{r \geq 1} p_r \frac{(-1)^r t^r}{r}).
$$

系 5.18. 基本対称式と冪和対称式は次の行列式表示で関係する．

$$p_l = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ le_l & e_{l-1} & e_{l-2} & \cdots & e_1 \end{vmatrix}, \quad e_l = \frac{1}{l!}\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{l-1} & p_{l-2} & p_{l-3} & \cdots & l-1 \\ p_l & p_{l-1} & p_{l-2} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}$$

Proof. 完全対称式のときと同様に帰納法で行えばよい． □

$H(t)$, $E(t)$ を冪和対称式の指数写像として表したが，もう少し具体的に書いてみよう．

$$H(t) = \exp(\sum_{r\geq 1} p_r \frac{t^r}{r}) = 1 + (\sum p_r \frac{t^r}{r}) + \frac{1}{2!}(\sum p_r \frac{t^r}{r})^2 + \frac{1}{3!}(\sum p_r \frac{t^r}{r})^3 + \cdots$$

となるが，t^d の係数を求めるには，各項が $p_s t^s$ の形をしているので，$\{p_s \mid s \leq d\}$ のみを考えればよい．そこで，

$$\begin{aligned} \frac{1}{l!}(\sum_{r=1}^{d} p_r \frac{t^r}{r})^l &= \frac{1}{l!}(p_1 t + \frac{p_2 t^2}{2} + \frac{p_3 t^3}{3} + \cdots + \frac{p_d t^d}{d})^k \\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_d=l} \frac{1}{i_1!1^{i_1} i_2!2^{i_2} i_3!3^{i_3} \cdots i_d! d^{i_d}} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_d^{i_d} t^{i_1+2i_2+\cdots+di_d} \end{aligned}$$

となる．よって t^d の係数は

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_d=l,\, i_1+2i_2+\cdots+di_d=d} \frac{1}{i_1!1^{i_1} i_2!2^{i_2} i_3!3^{i_3} \cdots i_d! d^{i_d}} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_d^{i_d}$$

この l を動かして和をとれば $H(t)$ の t^d の係数となるので，

命題 5.19. 完全対称式と冪和対称式の間につぎの関係が成立する．

$$h_d = \sum_{i_1+2i_2+\cdots+di_d=d} \frac{1}{i_1!1^{i_1} i_2!2^{i_2} i_3!3^{i_3} \cdots i_d! d^{i_d}} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_d^{i_d}$$

同様に，基本対称式と冪和対称式の間には次の関係が成立する．

$$e_d = \sum_{i_1+2i_2+\cdots+di_d=d} \frac{(-1)^{\sum_{k=1}^{d}(i_k-1)}}{i_1!1^{i_1} i_2!2^{i_2} i_3!3^{i_3} \cdots i_d! d^{i_d}} p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_d^{i_d}$$

補足 5.20. これとは逆に $-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ を使って p_d を $\{e_i\}_i$ の多項式として，または $\{h_i\}_i$ の多項式として表すことができる（演習問題. [2] の page 33).

5.2.3 Pieri の公式

次に，Pieri の公式について見ていこう．

命題 5.21 (Pieri の公式)**.** λ を d の分割とする．また S_λ をシューア多項式とする．そして $S_{(m)} = h_m$（$m \geq 0$）を考える．このとき，

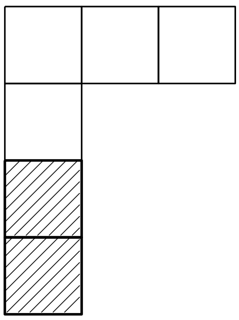
$$S_\lambda \cdot S_{(m)} = \sum S_\nu. \tag{5.6}$$

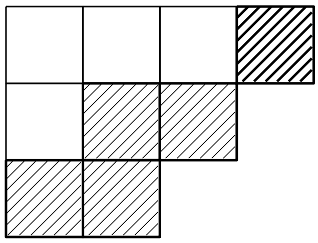
ここで和は λ に m 個の箱を各行の後ろにつけたもので，各列には二つ以上の箱をつけないようなヤング図形の全体で和をとっている．つまり $\sum \nu_j = \sum \lambda_j + m = m + d$ であり，

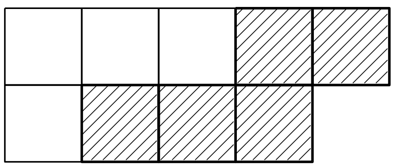
$$\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots \nu_k \geq \lambda_k \geq 0$$

となる ν に対して和をとっている．

以下の図は，どれも駄目な図を描いている．







この命題を証明するために次の補題を使う．

補題 5.22. $l = (l_1, \cdots, l_k)$ を $l_1 > l_2 \cdots > l_k \geq 0$ とする．このとき

$$|x_j^{l_i}| \prod_{j=1}^{k} (1 - x_j)^{-1} = \sum |x_j^{m_i}|$$

が成立．ここで和は $m = (m_1, \cdots, m_k)$ で $m_1 \geq l_1 > m_2 \geq l_2 \geq \cdots > m_k \geq l_k$ としてとっている．

Proof. 変数の数 k に対する帰納法で証明する．まず一変数のとき，

$$x_1^{l_1}(1 - x_1)^{-1} = x_1^{l_1}(1 + x_1 + x_1^2 + \cdots) = \sum_{m_1 \geq l_1} x_1^{m_1}$$

となる．練習のため二変数の場合も証明しておこう．余因子展開と一変数の時の結果を使えば，

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x_1^{l_1} & x_2^{l_1} \\ x_1^{l_2} & x_2^{l_2} \end{vmatrix} (1-x_1)^{-1}(1-x_2)^{-1} \\
=& -(x_1^{l_2}(1-x_1)^{-1})(|x_2^{l_1}|(1-x_2)^{-1}) + (x_2^{l_2}(1-x_2)^{-1})(|x_1^{l_1}|(1-x_1)^{-1}) \\
=& -\sum_{k=0} x_1^{l_2+k}(\sum_{m_1\geq l_1}|x_2^{m_1}|) + \sum_{k=0} x_2^{l_2+k}(\sum_{m_1\geq l_1}|x_2^{m_2}|) \\
=& \sum_{k=0}\sum_{m_1\geq l_1} -x_1^{l_2+k}|x_2^{m_1}| + x_2^{l_2+k}|x_2^{m_2}| = \sum_{m_2\geq l_2}\sum_{m_1\geq l_1} -x_1^{m_2}|x_2^{m_1}| + x_2^{m_2}|x_2^{m_2}| \\
=& \sum_{m_1\geq l_1 > m_2 \geq l_2} \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & x_2^{m_1} \\ x_1^{m_2} & x_2^{m_2} \end{vmatrix} + \sum_{m_1\geq l_1, m_2\geq l_1} \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & x_2^{m_1} \\ x_1^{m_2} & x_2^{m_2} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．第二項は m_1 と m_2 を入れ替えても同じ値であるが，行列式の性質から．

$$
\sum_{m_1\geq l_1, m_2\geq l_1} \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & x_2^{m_1} \\ x_1^{m_2} & x_2^{m_2} \end{vmatrix} = \sum_{m_1\geq l_1, m_2\geq l_1} \begin{vmatrix} x_1^{m_2} & x_2^{m_2} \\ x_1^{m_1} & x_2^{m_1} \end{vmatrix} = -\sum_{m_1\geq l_1, m_2\geq l_1} \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & x_2^{m_1} \\ x_1^{m_2} & x_2^{m_2} \end{vmatrix}
$$

となる．よって第二項は零である．以上で二変数の場合が証明できた．

さて，一般の場合（k 変数の場合）を証明しよう．第 k 行に関する余因子展開を使って，

$$
|x_j^{l_i}|\prod_{j=1}^{k}(1-x_j)^{-1} = \sum_j (-1)^{k+j-1} x_j^{l_k} \begin{vmatrix} x_1^{l_1} & \cdots & \widehat{x_j^{l_1}} & \cdots & x_k^{l_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{l_{k-1}} & \cdots & \widehat{x_j^{l_{k-1}}} & \cdots & x_k^{l_{k-1}} \end{vmatrix} \prod_{j=1}^{k}(1-x_j)^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
=& \sum_j (-1)^{k+j-1} x_j^{l_k}(1-x_j)^{-1} \sum_{m_1\geq l_1>\cdots>m_{k-1}\geq l_{k-1}} \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & \cdots & \widehat{x_j^{m_1}} & \cdots & x_k^{m_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{m_{k-1}} & \cdots & \widehat{x_j^{m_{k-1}}} & \cdots & x_k^{m_{k-1}} \end{vmatrix} \\
=& \sum_{m_1\geq l_1>\cdots>m_k\geq l_k} |x_j^{m_i}| + \sum_{m_1\geq l_1>\cdots>m_{k-1}\geq l_{k-1},\, m_k\geq l_{k-1}} |x_j^{m_i}|
\end{aligned}
$$

さらに第二項は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m_1\geq l_1>\cdots>m_{k-1}\geq l_{k-1},\, m_k\geq l_{k-1}} |x_j^{m_i}| \\
=& \sum_{(m_1,\cdots,m_{k-1})\ l_{k-2}>m_k\geq l_{k-1}} |x_j^{m_i}| + \sum_{(m_1,\cdots,m_{k-1}),\, l_{k-1}>m_k\geq l_{k-2}} |x_j^{m_i}| + \cdots + \sum_{(m_1,\cdots,m_{k-1}),\, m_k\geq l_1} |x_j^{m_i}|
\end{aligned}
$$

となる．$(m_1,\cdots,m_{k-1})$ は $m_1\geq l_1>\cdots>m_{k-1}\geq l_{k-1}$ の略記である．二変数の場合を参照にして，左辺の第一項では m_{k-1} と m_k を取り替えることから零，同様

にして m_i と m_k を取り替えることから左辺の各項は零となる．以上から

$$|x_j^{l_i}|\prod_{j=1}^{k}(1-x_j)^{-1} = \sum_{m_1 \geq l_1 > \cdots > m_k \geq l_k} |x_j^{m_i}|$$

$\square$

Proof of 命題 *5.21.* 分割 λ を考える．$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_k$ であるので，

$$\lambda_1 + k - 1 > \lambda_2 + k - 2 > \cdots > \lambda_k$$

が成立する．また分割 ν に対しても同様である．そして，

$$\begin{aligned} &\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots \nu_k \geq \lambda_k \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\nu_1 + k - 1 \geq \lambda_1 + k - 1 > \nu_2 + k - 2 \geq \lambda_2 + k - 2 > \cdots > \nu_k \geq \lambda_k \geq 0 \end{aligned}$$

となる．よって，補題において $l_i = \lambda_i + k - i,\ m_i = \nu_i + k - i$ とすれば，

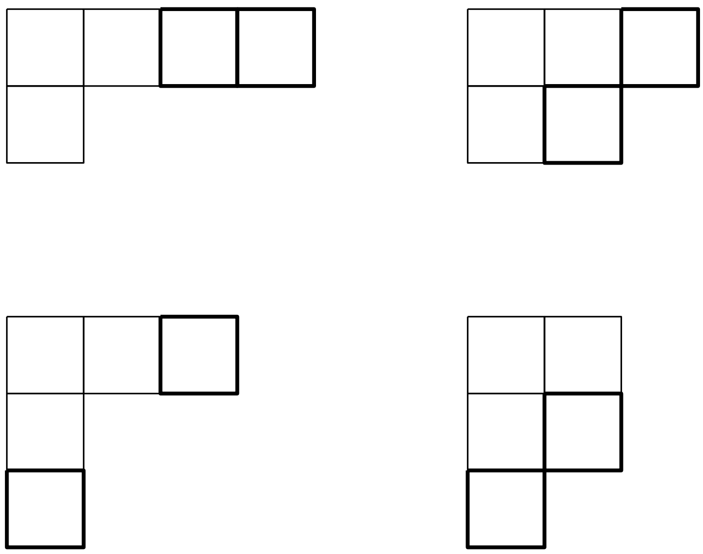
$$S_\lambda \prod_{j=1}^{k}(1-x_j)^{-1} = \frac{|x_j^{\lambda_i+k-i}|}{\Delta(x)} \prod_{j=1}^{k}(1-x_j)^{-1} = \sum \frac{|x_j^{\nu_i+k-i}|}{\Delta(x)} = \sum S_\nu$$

となる．$h_m = S_{(m)}$ であるので，上で次数 $d+m$ の部分を取り出せばよい． $\square$

例 5.23. 再び 3 変数の場合を考える.（行の数は 3 以下）．このとき

$$S_{(2,1)}S_{(2)} = S_{(4,1)} + S_{(3,2)} + S_{(3,1,1)} + S_{(2,2,1)}$$

となる．ヤング図形を描いて考えると，次のよう．



5.2.4 発展：Littlewood-Richardson rule

Pieri の公式の一般化として，シューア多項式の積を展開した

$$S_\lambda S_\mu = \sum N_{\lambda\mu\nu} S_\nu$$

という式が考えられる．ここで λ は d の分割．ν は m の分割とすれば，和は $d+m$ の分割でとっている（つまり d 次式× m 次式は $d+m$ 次式である）．また，それぞれの行数は高々k とする．この係数 $N_{\lambda\mu\nu}$ を求める方法を Littlewood-Richardson 法則とよぶ．ここでは証明はしないで結果だけを述べよう．(証明は [2] を見よ）．

定理 5.24 (Littlewood-Richardson rule)**.** $S_\lambda S_\mu = \sum N_{\lambda\mu\nu} S_\nu$ における係数 $N_{\lambda\nu\mu}$ はヤング図形 λ から ν へ拡張する方法で，狭義 μ 拡張（*strict* μ*-expansion*）となるものの数である．

1. まず μ 拡張とは $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k)$ とすると，最初に μ_1 個の箱を *Pieri* の公式のようにつけて，次に，μ_2 個の箱を同様につけて，これを μ_k に対してまで行うことである．
2. さらに，最初の μ_1 個の箱に 1 を書き，次の μ_2 個の箱に 2 を書き，これを μ_k まで繰り替えす．このとき，箱に書いた数は各行で**左から右へ非減少**であり，各列で**上から下へ増加**することがわかる．
3. このように数を書いたとき,「狭義」とは，1 行目を「右から左」に，2 行目を右から左に，これを m 行まで繰り返して, m 個の数の列を得るが，それが格子順序をみたすものである．ここで格子順序とは $\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ を任意のところで切った列 $\{i_1, \cdots, i_r\}$ に対して，

$$\#1 \geq \#2 \geq \cdots$$

を満たすときをいう．例えば，$\{1, 2, 3, 1, 1, 2, 4, 3\}$ である．

例 5.25. Pieri の公式はもっとも簡単な場合である．もう少し複雑な場合について考えよう．4 変数以上の場合を考えよう．このとき

$$S_{(2,1)} S_{(2,1)} = S_{(4,2)} + S_{(4,1,1)} + S_{(3,3)} + 2S_{(3,2,1)} + S_{(3,1,1,1)} + S_{(2,2,2)} + S_{(2,2,1,1)}$$

となる．これが 3 変数の場合には行数が 4 以上のヤング図形は除くので，

$$S_{(2,1)} S_{(2,1)} = S_{(4,2)} + S_{(4,1,1)} + S_{(3,3)} + 2S_{(3,2,1)} + S_{(2,2,2)}$$

となる．4 変数以上の場合の上の例に対するヤング図形を描いておけば，

$\begin{ytableau} \ & \ & 1 & 1 \\ \ & 2 \end{ytableau}$ $\quad\begin{ytableau} \ & \ & 1 & 1 \\ \ \\ 2 \end{ytableau}$ $\quad\begin{ytableau} \ & \ & 1 \\ \ & 1 & 2 \end{ytableau}$ $\quad\begin{ytableau} \ & \ & 1 \\ \ & 1 \\ 2 \end{ytableau}$

$\begin{ytableau} \ & \ & 1 \\ \ & 2 \\ 1 \end{ytableau}$ $\quad\begin{ytableau} \ & \ & 1 \\ \ \\ 1 \\ 2 \end{ytableau}$ $\quad\begin{ytableau} \ & \ \\ \ & 1 \\ 1 & 2 \end{ytableau}$ $\quad\begin{ytableau} \ & \ \\ \ & 1 \\ 1 \\ 2 \end{ytableau}$

5.3 Kostka 数

5.3.1 Kostka 数

d の分割 λ に対して (5.1) において，

$$H_\lambda := h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k}$$

として定義した．これをシューア多項式によって表してみよう．それには Pieri の公式を繰り返し使えばよい．つまり

$$H_\lambda = S_{(\lambda_1)} S_{(\lambda_2)} \cdots S_{(\lambda_k)} = \sum K_{\mu\lambda} S_\mu$$

となる．ここで Pieri の公式から，係数 $K_{\mu\lambda}$ はヤング図形 μ の箱に λ_1 個の 1 を，λ_2 個の 2 を，$\cdots$ λ_k 個の k を詰めていき，各行が非減少であり，各列が増加となるものの数である．また，そのような数をつめたヤング図形を型 λ の μ に対する半標準盤とよぶ.（本当はもう少し一般化したものを半標準盤と呼ぶ（後述））.

定義 5.4. 上で定義した $K_{\mu\lambda}$ を **Kostka 数**とよぶ.

例 5.26. $\lambda = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{d})$ に対して，$K_{\mu(1,\cdots,1)}$ は μ に対する標準盤の数である.

補題 5.27. $K_{\mu\lambda}$ は非負の整数であり，

$$K_{\lambda\lambda} = 1, \quad K_{\mu\lambda} = 0 \quad (\lambda > \mu)$$

また，$K_{\mu\lambda} > 0$ となるため必要十分条件は

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$$

がすべての i に対して成立することである.

Proof. 最初の主張 $K_{\lambda\lambda}=1$ は λ に対して型 λ の半標準準盤は 1 行目はすべて 1 で, 2 行目はすべて 2 と埋めていくものしかないからである．また二番目の主張も $\lambda>\mu$ なら半標準準盤はある列で増加とはならないからである．また三番目の主張も条件をみたさないなら，ある列に対して増加とはならないから． □

系 5.28. $\{H_\lambda\}_\lambda$ は k 変数 d 次対称式の基底になる．

Proof. 上の補題から

$$H_\lambda = S_\lambda + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda} S_\mu$$

となる．また $\{S_\lambda\}_\lambda$ は k 変数 d 次対称式の基底であった．そこで，

$$\sum a_\lambda H_\lambda = 0$$

としたとき，辞書式で下のほうから順に考えれば，$a_\lambda = 0$（$\forall\lambda$）であることがわかる．よって $\{H_\lambda\}_\lambda$ は基底になる． □

補足 5.29. $\{h_1,\cdots,h_k\}$ は代数的な基底であった．上では h_s（$s>k$）などという項も現れていることに注意．この h_s は $\{h_1,\cdots,h_k\}$ の多項式として表せる．

5.3.2 コーシーの恒等式

対称式の空間に内積をいれるためコーシーの恒等式を述べよう．

命題 5.30 (コーシーの恒等式). 変数 $x_1,\cdots,x_k$ 及び別の変数 $y_1,\cdots,y_k$ を用意する．このとき

$$\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{ij} = \frac{\Delta(x)\Delta(y)}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}$$

が成立する．

Proof. 各行から第一行を引くと

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-x_1y_1} & \frac{1}{1-x_1y_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_1y_k} \\ \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_1}\frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_2}\frac{y_2}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{x_2-x_1}{1-x_1y_k}\frac{y_k}{1-x_2y_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_k-x_1}{1-x_1y_1}\frac{y_1}{1-x_ky_1} & \frac{x_k-x_1}{1-x_1y_2}\frac{y_2}{1-x_ky_2} & \cdots & \frac{x_k-x_1}{1-x_1y_k}\frac{y_k}{1-x_ky_k} \end{pmatrix}$$

ここで，

$$\frac{1}{1-x_iy_j} - \frac{1}{1-x_1y_j} = \frac{x_i-x_1}{1-x_1y_j}\frac{y_j}{1-x_iy_j}$$

をつかった．よって，

$$\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_k-x_1)}{(1-x_1y_1)(1-x_1y_2)\cdots(1-x_1y_k)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{y_2}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{y_k}{1-x_2y_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_ky_1} & \frac{y_2}{1-x_ky_2} & \cdots & \frac{y_k}{1-x_ky_k} \end{pmatrix}$$

となる．さらに各列から第一列を引けば，

$$\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_k-x_1)}{(1-x_1y_1)(1-x_1y_2)\cdots(1-x_1y_k)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{y_2-y_1}{1-x_2y_1}\frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{y_k-y_1}{1-x_2y_1}\frac{y_k}{1-x_2y_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_ky_1} & \frac{y_2-y_1}{1-x_ky_1}\frac{1}{1-x_ky_2} & \cdots & \frac{y_k-y_1}{1-x_ky_1}\frac{1}{1-x_ky_k} \end{pmatrix}$$

ここで

$$\frac{y_j}{1-x_iy_j}-\frac{y_1}{1-x_iy_1}=\frac{y_j-y_1}{1-x_iy_1}\frac{1}{1-x_iy_j}$$

を使った．そこで

$$\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_k-x_1)}{(1-x_1y_1)(1-x_1y_2)\cdots(1-x_1y_k)}\frac{(y_2-y_1)\cdots(y_k-y_1)}{(1-x_2y_1)\cdots(1-x_ky_1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{y_1}{1-x_2y_1} & \frac{1}{1-x_2y_2} & \cdots & \frac{y_k}{1-x_2y_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_1}{1-x_ky_1} & \frac{1}{1-x_ky_2} & \cdots & \frac{1}{1-x_ky_k} \end{pmatrix}$$

この行列の行列式を計算すればよいのであるが，あとは帰納法で証明できる． □

命題 5.31 (コーシーの恒等式２).

$$\frac{1}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}=\sum_{\lambda}S_\lambda(x)S_\lambda(y)$$

ここで和は $l(\lambda)\leq k$ のすべての分割についてとっている．

Proof. コーシーの恒等式から，

$$\frac{\det(\frac{1}{1-x_iy_j})_{ij}}{\Delta(x)\Delta(y)}=\frac{1}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}$$

となる．そこで行列式を展開すればよい．行列の i,j 成分を展開すると

$$\frac{1}{1-x_iy_j}=1+x_iy_j+x_i^2y_j^2+x_i^3y_j^3+\cdots$$

となる．よって，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)(1+x_{\sigma(1)}y_1+x_{\sigma(1)}^2y_1^2+\cdots)\cdots(1+x_{\sigma(k)}y_k+x_{\sigma(k)}^2y_k^2+\cdots)\\
&=\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_k^{l_k}(x_{\sigma(1)})^{l_1}(x_{\sigma(2)})^{l_2}\cdots(x_{\sigma(k)})^{l_k}\\
&=\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_k}|x_j^{l_i}|y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_k^{l_k}
\end{aligned}
$$

となる．$l_p=l_q$ となる場合には，$|x_j^{l_i}|=0$ となってしまうので，$l_1,\cdots,l_k$ は異なる数としてよい．そこで $\{l_1,\cdots,l_k\}=\{p_1,\cdots p_k\}$（$p_1>p_2>\cdots>p_k$）となる $(l_1,\cdots,l_k)$ についての和を考える．このとき $|x_j^{l_i}|$ の性質から

$$
\sum_{\{l_1,\cdots,l_k\}=\{p_1,\cdots,p_k\}}|x_j^{l_i}|y_1^{l_1}y_2^{l_2}\cdots y_k^{l_k}=|x_j^{p_i}||y_j^{p_i}|
$$

となることがわかる．よって，

$$
\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{i,j}=\sum_{l_1>l_2>\cdots>l_k}|x_j^{l_i}||y_j^{l_i}|
$$

この式の両辺を $\Delta(x)\Delta(y)$ で割れば，

$$
\frac{1}{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)}=\sum_\lambda S_\lambda(x)S_\lambda(y)
$$

を得る． □

さて，

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j}=\left(\prod_i\frac{1}{1-x_iy_1}\right)\cdots\left(\prod_i\frac{1}{1-x_iy_k}\right)=\left(\sum_m h_my_1^m\right)\cdots\left(\sum_m h_my_k^m\right)\\
&=\sum_{i_1,\cdots,i_k}h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_k}y_1^{i_1}\cdots y_k^{i_k}=\sum_\lambda H_\lambda(x)M_\lambda(y)
\end{aligned}
$$

となる．ここで M_λ は (5.2) において定義した軌道和対称式である．よって，

$$
\sum_\lambda H_\lambda(x)M_\lambda(y)=\sum_\lambda S_\lambda(x)S_\lambda(y)
$$

を得る．これを使って，$\{S_\lambda\}_\lambda$ が正規直交基底になることを証明しよう．

定義 5.5 (内積). k 変数の d 次斉次対称式において，すべての $l(\lambda)\le k$ なる d の分割 λ を考えると $\{H_\lambda\}_\lambda$ はベクトル空間としての基底である．また $\{M_\lambda\}_\lambda$ も基底となる．よって，このベクトル空間に（非退化）双線形形式 $\langle\ ,\ \rangle$ を次を満たすように定義することができる：

$$
\langle H_\lambda, M_\mu\rangle=\delta_{\lambda,\mu}
$$

命題 5.32. 上で定義した双線形形式は内積になり，シューア多項式の全体 $\{S_\lambda\}_\lambda$ は対称式のベクトル空間としての正規直交基底になる．つまり，

$$\langle S_\lambda, S_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$$

が成立する．

Proof. $\{H_\lambda\}_\lambda, \{M_\lambda\}_\lambda$ は基底であるので，$S_\lambda = \sum_\gamma a_{\lambda\gamma} H_\gamma = \sum_\gamma b_{\gamma\lambda} M_\lambda$ とする（ここで和は d の分割 γ 全体でとっている）．双線形形式の定義から，

$$\langle S_\lambda, S_\mu \rangle = \sum_\gamma a_{\lambda\gamma} b_{\gamma\mu}$$

となる．一方，

$$\sum S_\lambda(x) S_\lambda(y) = \sum a_{\lambda\gamma} H_\gamma(x) b_{\rho\lambda} M_\rho(y) = \sum H_\gamma(x) M_\gamma(y)$$

となる．$\{H_\gamma(x) M_\rho(y)\}_{\gamma,\rho}$ は x, y 変数の対称式の基底であるので，

$$\sum_\lambda b_{\rho\lambda} a_{\lambda\gamma} = \delta_{\rho,\gamma}$$

となる（和は d の分割全体）．よって $\sum_\gamma a_{\lambda\gamma} b_{\gamma\mu} = \delta_{\lambda\mu}$ となり，$\langle S_\lambda, S_\nu \rangle = \delta_{\lambda\nu}$ となる．この式から双一次形式が非退化対称形式となることもわかり，S_λ は正規直交基底になる． □

さて，Kostka 数の定義は $H_\lambda = \sum K_{\mu\lambda} S_\mu$ であった．上の証明における $a_{\lambda\gamma}, b_{\gamma\lambda}$ を用いれば，$H_\lambda = \sum (a^{-1})_{\mu\lambda} S_\mu = \sum b_{\mu\lambda} S_\mu$ となるので，$K_{\mu\lambda} = b_{\mu\lambda}$ となる．よって．

$$S_\mu = \sum K_{\mu\lambda} M_\lambda$$

が成立する．そこで，**これを Kostka 数の定義として採用してもよい．**

$$M_\lambda = \frac{1}{c} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} \sigma(x_1^{\lambda_1} \cdots x_k^{\lambda_k}) = x_1^{\lambda_1} \cdots x_k^{\lambda_k} + \cdots$$

であるので，

$$X^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_k^{\lambda_k}$$

とすれば，

命題 5.33. ***Kostka* 数** $K_{\mu\lambda}$ は S_μ における，X^λ の係数である．

系 5.34 (シューア多項式の計算法)**.** シューア多項式 S_λ は次のように表せる．

$$S_\lambda = \sum K_{\lambda a} X^a, \quad X^a = x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}$$

ここで $K_{a\lambda}$ は $a = (a_1, \cdots, a_k) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$ およびヤング図形 λ に対して，a_1 個の 1，…， a_k 個の k を詰めていったヤング盤で各行が非減少で各列が増加するものの数である．このようなヤング盤を**半標準盤**という．

Proof. $a = \mu$ のとき．つまり $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ となる場合には，前命題から $K_{\lambda\mu}$ は $S_\lambda = \sum K_{\lambda\mu} M_\mu$ と表示したとき X^μ の係数である．また $K_{\lambda\mu}$ はヤング図形 λ の箱に μ_1 個の 1，…，μ_k 個の k を詰めていったヤング盤で各行が非減少で各列が増加するものの数であった．

次に一般の $a = (a_1, \cdots, a_k)$ について考える．Pieri の公式を使って，

$$H_a = h_{a_1} h_{a_2} \cdots h_{a_k} = S_{a_1} \cdots S_{a_k} = \sum K_{\lambda a} S_\lambda$$

となる．ここで Pieri の公式から $K_{\lambda a}$ は，ヤング図形 λ に対して，a_1 個の 1，…，a_k 個の k を詰めていったヤング盤で各行が非減少で各列が増加するものの数である．a を置換して $a_{\tau(1)} \geq \cdots \geq a_{\tau(k)} \geq 0$ となるようにして，$\mu = \tau(a)$ とすれば，

$$\sum K_{\lambda\mu} S_\lambda = H_\mu = H_a = \sum K_{\lambda a} S_\lambda$$

となるが S_λ は基底なので $K_{\lambda\mu} = K_{\lambda a}$ が成立する．そして，$S_\lambda = \sum K_{\lambda\mu} M_\mu$ という表示から X^a の係数は $K_{\lambda\mu} = K_{\lambda a}$ となることがわかる．

□

例 5.35. 3 変数で $S_{(2,1)}(x)$ を考えてみる．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned}
&S_{(2,1)}(x) \\
=&x_1x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_1x_1x_2 + x_1x_1x_3 + x_1x_2x_2 + x_2x_2x_3 + x_1x_3x_3 + x_2x_3x_3 \\
=&2x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2
\end{aligned}$$

例 5.36. シューア関数 $S_\lambda(x)=S_\lambda(x_1,\cdots,x_k)$ に対して，$x_i=x^{i-1}$ とする．このとき

$$S_\lambda(1,x,x^2,\cdots,x^{k-1})=\prod_{i<j}\frac{x^{\lambda_i+k-i}-x^{\lambda_j+k-j}}{x^{j-1}-x^{i-1}}$$

となる．さらに，$x\to 1$ とすれば，

$$S_\lambda(1,\cdots,1)=\prod_{i<j}\frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i}$$

となる．

Proof. まず $\Delta(1,x,\cdots,x^{k-1})=\prod_{i<j}(x^{i-1}-x^{j-1})$ である．また

$$\begin{aligned}
S_\lambda=&\begin{vmatrix} 1^{\lambda_1+k-1} & 1^{\lambda_2+k-2} & \cdots & 1^{\lambda_k}\\ x^{\lambda_1+k-1} & x^{\lambda_2+k-2} & \cdots & x^{\lambda_k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (x^{k-1})^{\lambda_1+k-1} & (x^{k-1})^{\lambda_2+k-2} & \cdots & (x^{k-1})^{\lambda_k}\end{vmatrix}/\Delta\\
=&\begin{vmatrix} (1^{\lambda_1+k-1})^0 & (1^{\lambda_2+k-2})^0 & \cdots & (1^{\lambda_k})^0\\ (x^{\lambda_1+k-1})^1 & (x^{\lambda_2+k-2})^1 & \cdots & (x^{\lambda_k})^1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (x^{\lambda_1+k-1})^{k-1} & (x^{\lambda_2+k-2})^{k-1} & \cdots & (x^{\lambda_k})^{k-1}\end{vmatrix}/\Delta\\
=&(-1)^{k(k-1)/2}\prod_{i<j}\frac{x^{\lambda_i+k-i}-x^{\lambda_j+k-j}}{x^{i-1}-x^{j-1}}=\prod_{i<j}\frac{x^{\lambda_i+k-i}-x^{\lambda_j+k-j}}{x^{j-1}-x^{i-1}}
\end{aligned}$$

となる．さらに $x\to 1$ としたときにはロピタルの定理を使えば，

$$S_\lambda(1,\cdots,1)=\prod_{i<j}\frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i}=\frac{1}{1!2!\cdots(k-1)!}\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)$$

となることもわかる（S_λ は多項式なので微分可能関数である）． □

さらに，命題 5.8, 5.9 を使えば，

$$S_\lambda(1,\cdots,1)=|h_{\lambda_i+j-i}|,\quad \text{where } \sum h_jt^j=\frac{1}{(1-t)^k},$$
$$S_\lambda(1,\cdots,1)=\left|\binom{k}{\mu_i+j-i}\right|,\quad \mu \text{ は } \lambda \text{ の共役}$$

また，$S_\lambda=\sum K_{\mu a}X^a$ と書けた．ここで $K_{\mu a}$ は $a=(a_1,\cdots,a_k)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$ に対して，ヤング図形 λ に対して，a_1 個の 1，⋯， a_k 個の k を詰めていったヤング盤で各行が非減少で各列が増加するものの数である．つまり半標準盤である．この式で $x=(1,\cdots,1)$ とすれば，

$$S_\lambda(1,\cdots,1)=\#\{\text{ 半標準盤 }\} \tag{5.7}$$

となることがわかる．

補足 5.37. シューア多項式は $U(k)$ or $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ の既約表現の指標に対応する．ここで $x=(x_1,\cdots,x_k)$ が極大トーラスの座標に対応する．そこで $x\to(1,\cdots,1)$ にすることは，表現空間の次元を与える Weyl の次元公式である．

5.3.3 応用：Frobenius forumla への補題

さて，P を任意の k 変数の d 次対称式とする．また λ を d の分割で $l(\lambda)\le k$ なるものとする．このとき

$$\psi_\lambda(P)=[P]_\lambda=\ X^\lambda \text{ の係数}$$

とする．また

$$\omega_\lambda(P)=[\Delta\cdot P]_l,\quad l=(\lambda_1+k-1,\lambda_2+k-2,\cdots,\lambda_k)$$

とする．

上のように定義したとき，

$$P=\sum\psi_\lambda(P)M_\lambda,\quad P=\sum_\lambda\omega_\lambda(P)S_\lambda$$

となる．よって，

$$\langle P,H_\lambda\rangle=\psi_\lambda(P),\quad\langle P,S_\lambda\rangle=\omega_\lambda(P)$$

となる．

Proof. 第一式は M_λ の定義から明らかである．第二式を証明する．まず

$$S_\lambda=\frac{|x_j^{\lambda_i+k-i}|}{\Delta}=\frac{|x_j^{l_i}|}{\Delta}$$

であるので，ΔS_λ において X^l の係数は 1 である．また他の項は $x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$ となるが，$i_1>i_2>\cdots>i_k$ となるものは存在しない．そこで，$\{S_\lambda\}_\lambda$ は基底なので，$P=\sum a_\lambda S_\lambda$ とかける．$\Delta P=\sum a_\lambda\Delta S_\lambda$ において，$\omega_\lambda(P)=[\Delta P]_l=a_\lambda$ となる． □

そこで $S_\mu=\sum K_{\mu\lambda}M_\lambda$ より，

$$K_{\mu\lambda}=\psi_\lambda(S_\mu)=[S_\mu]_\lambda$$

であり，$H_\lambda=\sum K_{\mu\lambda}S_\mu$ であるので，

$$K_{\mu\lambda}=\omega_\mu(H_\lambda)=[\Delta H_\lambda]_l$$

となる．

例 5.38. $K_{\lambda(1,\cdots,1)}$ はヤング図形 λ に対する標準盤の数である．そこで，

$$K_{\Lambda(1,\cdots,1)} = [\Delta(x)H_{(1,\cdots,1)}]_l = [\Delta(x)h_1^d]_l = [\Delta(x)(x_1+\cdots+x_k)^d]_l$$

は対称群 $\mathfrak{S}_d$ の既約表現 V_λ の次元である（フロベニウス公式はまだ証明してないけど）．よって，$\dim V_\lambda$ とヤング図形 λ に対する標準盤の数は一致する．

以下の二つの補題を Frobenius 公式を証明するために用いる．

補題 5.39. k 変数 d 次対称式 P に対して，

$$\psi_\lambda(P) = \sum_\mu K_{\mu\lambda}\omega_\mu(P) = \omega_\lambda(P) + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}\omega_\mu(P)$$

が成立.（任意の対称式に対して，上を満たすような定数 $K_{\mu\lambda}$ を *Kostka* 数の定義としてもよい）．

Proof.

$$\sum_\lambda \psi_\lambda(P)M_\lambda = P = \sum \omega_\mu(P)S_\mu = \sum \omega_\mu(P)K_{\mu\lambda}M_\lambda$$

であり $\{M_\lambda\}_\lambda$ は基底なので $\psi_\lambda(P) = \sum_\mu K_{\mu\lambda}\omega_\mu(P)$ となる． □

さて，冪和対称式 $p_j = x_1^j + \cdots + x_k^j$ として，$i = (i_1, \cdots, i_d)$ で $\sum \alpha i_\alpha = d$ となるものに対して，

$$P^i = p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_d^{i_d}$$

とする．さらに，

$$\omega_\lambda(i) := \omega_\lambda(P^i)$$

とする．つまり $\omega_\lambda(i)$ を

$$P^i = \sum \omega_\lambda(i)S_\lambda \quad \text{or} \quad \omega_\lambda(i) = \langle S_\lambda, P^i\rangle$$

により定義する．この $\omega_\lambda(i)$ に対して次が成立する．

補題 5.40. d の分割 λ, μ に対して，

$$\sum_{i_1+2i_2+\cdots di_d=d} \frac{1}{z(i)}\omega_\lambda(i)\omega_\mu(i) = \begin{cases} 1 & if\ \lambda=\mu \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

となる．ここで

$$z(i) = 1^{i_1}i_1!\cdots d^{i_d}i_d!.$$

Proof. 以前見たように，$\frac{d}{dt}\log H(t) = P(t) = \sum p_j t^{j-1}$ であるので，

$$\log \prod \frac{1}{1-x_i t} = \sum \frac{p_j}{j} t^j$$

であるので，

$$\log(\prod_{i,j}(1-x_i y_j)^{-1}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} p_j(x) p_j(y)$$

となる．よって，命題 5.19 の証明と同様にして，

$$\sum_\lambda S_\lambda(x) S_\lambda(y) = \frac{1}{\prod(1-x_i y_j)} = \prod_{j=1}^{\infty} \exp(\frac{1}{j} p_j(x) p_j(y))$$

$$= \sum_{i_1+2i_2+\cdots di_d=d} \frac{1}{1^{i_1} i_1! \cdots d^{i_d} i_d!} p_1(x)^{i_1} \cdots p_d^{i_d}(x) p_1(y)^{i_1} \cdots p_d^{i_d}(y) = \sum_i \frac{1}{1^{i_1} i_1! \cdots d^{i_d} i_d!} P^i(x) P^i(y)$$

$$= \sum_i \frac{1}{1^{i_1} i_1! \cdots d^{i_d} i_d!} \sum_\lambda \omega_\lambda(i) S_\lambda(x) \sum_\mu \omega_\mu(i) S_\mu(y)$$

$$= \sum_{i,\lambda,\mu} \frac{1}{1^{i_1} i_1! \cdots d^{i_d} i_d!} \omega_\lambda(i) \omega_\mu(i) S_\lambda(x) S_\mu(y)$$

となる．$\{S_\lambda(x) S_\mu(y)\}_{\lambda,\mu}$ は基底であるので，補題が証明できる． □

系 5.41. $k \geq d$ とすれば，冪和対称式 $\{P^i\}_i$ は内積に関して直交し，さらに

$$\langle P^i, P^i \rangle = z(i) = 1^{i_1} i_1! \cdots d^{i_d} i_d!$$

となる．よって．

$$S_\lambda = \sum \frac{1}{z(i)} \omega_\lambda(i) P^i.$$

この式は $k < d$ に対しても成立する．実際，d 変数のときにこの式が成立するので，$x_{k+1} = \cdots = x_d = 0$ とすればよい（λ の長さ $l(\lambda)$ は k 以下として）．

Proof. 変数 k が $k \geq d$ であるとすれば，λ は d の分割すべてを動く．一方 i に対して，

$$\lambda_1 = i_1 + \cdots + i_d, \quad \lambda_2 = i_2 + \cdots + i_d, \ \cdots, \ \lambda_d = i_d, \quad \lambda_{d+1} = 0, \ \cdots, \ \lambda_k = 0.$$

とすれば，$i_1 + 2i_2 + \cdots + di_d = d$ であるので，d の分割に対応する．つまり i の数も d の分割の個数と同じである．そこで，$P^i = \sum a_{i\lambda} H_\lambda = \sum b_{i\lambda} M_\lambda$ とする．このとき

$$\langle P^i, P^j \rangle = \sum_\lambda a_{i\lambda} b_{j\lambda}$$

となる．一方，

$$\sum_{\lambda} H_\lambda(x)M_\lambda(y)=\sum_{\lambda} S_\lambda(x)S_\lambda(y)=\sum_i \frac{1}{z(i)}P^i(x)P^i(y)=\sum_{i,\lambda,\mu}\frac{1}{z(i)}a_{i\lambda}b_{i\mu}H_\lambda(x)M_\mu(y)$$

となる．よって，

$$\sum_i \frac{1}{z(i)}a_{i\lambda}b_{i\mu}=\delta_{\lambda\mu}$$

となる．行列 $(a_{i\lambda})$ は逆行列をもつことになり，

$$\langle P^i, P^j\rangle=\delta_{ij}z(i)$$

となる．また，これより $\{P^i\}_i$ が直交基底になることもわかる．

次に，$S_\lambda=\sum a_iP^i$ とすれば，

$$\omega_\lambda(j)=\langle S_\lambda, P^j\rangle=a_jz(j)$$

となるので，

$$S_\lambda=\sum_i \frac{\omega_\lambda(i)}{z(i)}P^i$$

を得る．この表示は d 変数 d 次対称式に対して成立するが，この表示において $x_{k+1}=\cdots=x_d=0$ とすれば，

$$P^i(x_1,\cdots,x_k)=P^i(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0),\quad S_\lambda(x_1,\cdots,x_k)=S_\lambda(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$$

が成立する（ただし λ の長さは k 以下としている）．

□

上の系をみると，$k<d$ のときに $P_\lambda=p_{\lambda_1}\cdots p_{\lambda_k}$ が k 変数 d 次対称式の基底になるか?という疑問がわく．それについて答えよう．ここで，上で述べた $S_\lambda=\sum_i \frac{\omega_\lambda(i)}{z(i)}P^i$ における P^i のことではないことに注意しよう．この表示だと $l(\lambda)>k$ となる分割も含んでいることになる．

変数を $x_1,\cdots,x_k$ として，λ を $l(\lambda)\le k$ の d の分割とする．このとき

$$P_\lambda:=p_{\lambda_1}\cdots p_{\lambda_k}$$

とする．これは k 変数 d 次対称式である．ちゃんと書くと，

$$P_\lambda=(x_1^{\lambda_1}+\cdots+x_k^{\lambda_1})\cdots(x_1^{\lambda_k}+\cdots+x_k^{\lambda_k})=\sum_{i_1,\cdots,i_k}x_{i_1}^{\lambda_1}\cdots x_{i_k}^{\lambda_k}$$

となる．これを軌道和対称式によって表示する．つまり

$$P_\lambda=\sum L_{\lambda\mu}M_\mu$$

とする．たとえば，P_λ は x_1^d という項を含み対称式であるので，$M_{(d,0,\cdots,0)}$ を含むことになる．また M_λ という項も含むことがわかる．同様に，d の分割 μ で各成分 μ_i が $\{\lambda_j\}$ の部分和，各部分和が同じ λ_j を含まないようなものとすれば，P_λ は M_μ という項を含む．つまり，μ に対して，各成分 μ_i の分割を $\lambda^{(i)}$ とすれば，λ は $\cup_i\lambda^{(i)}$ の形をしている．一方，$\lambda > \mu$ となる場合を考えると，μ の各成分を λ_j の部分和として書くことができないことがわかる（ちょっと考えるとすぐにわかる）．つまり $L_{\lambda\mu}$ は三角行列であり，対角成分はゼロでない．よって，$L_{\lambda\mu}$ は逆行列をもつので，M_μ は P_λ の線形和で書くことができる．以上から

命題 5.42. $\{P_\lambda \mid \lambda, l(\lambda) \le k\}$ は k 変数 d 次対称式の基底である．

例 5.43. 3 変数で $\lambda = (3,2,1)$ の場合を考える．このとき

$$P_{(3,2,1)} = M_{(6)} + M_{(5,1)} + M_{(4,2)} + 2M_{(3,3)} + M_{(3,2,1)}$$

となる．ここで $M_{(3,3)}$ の係数が 2 である理由は $\mu = (3, 2+1)$, $\mu = (2+1, 3)$ の二通りのとり方があるからである．

5.4 変数を増やす

これまで k 変数 d 次対称式について扱ってきた．変数を増やして議論してみよう．つまり変数の数が十分大きいとする．まず $m \ge n$ に対して，

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m = S[x_1, \cdots, x_m] \ni f(x) \to f(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots 0) \in \Lambda_n = S[x_1, \cdots, x_n]$$

という写像は準同形である．また

$$\rho_{m,n}(M_\lambda(x_1, \cdots, x_m)) = \begin{cases} M_\lambda(x_1, \cdots, x_n) & l(\lambda) \le n \\ 0 & l(\lambda) > n \end{cases}$$

であるので，$\rho_{m,n}$ は全射である．さらに $\Lambda_m = \oplus \Lambda_m^d$ と次数付き環の形で書いたときに，

$$\rho_{m,n}^d : \Lambda_m^d \to \Lambda_n^d$$

も全射であり，$m \ge n \ge d$ なら全単射になる（基底はどちらも d の分割 λ に対する $\{M_\lambda | \lambda\}$ である．命題 2.7 から次元が一致）．この Λ_n^d, $\rho_{m,n}^d$ に対する逆極限を

$$\Lambda^d := \lim_{\leftarrow} \Lambda_n^d$$

とする．つまり $f = (f_n)_{n\ge 0} \in \Lambda^d$ とは，$f_n = f_n(x_1, \cdots, x_n)$ が次数 d で変数 n の斉次対称式であり，$m \ge n$ なら $\rho_{m,n}(f_m) = f_n$ をみたすものである．また，$\rho_{m,n}^d$ は $m \ge n \ge d$ に対して同型写像なので，

$$\rho_n^d : \Lambda^d \ni f = (f_n) \to f_n \in \Lambda_n^d$$

は $n \geq d$ なら同型写像となる．特に Λ^d の基底として，

$$\rho_n^d(M_\lambda) = M_\lambda(x_1, \cdots, x_n), \quad \forall n \geq d, \quad (\lambda \text{ は } d \text{ の分割})$$

により定義されるもの全体を考えればよい．よって Λ^d の次元は分割数 $p(d)$ である．また

$$\Lambda := \oplus_{d \geq 0} \Lambda^d$$

として，これを対称関数の環とよぶ．これは，すべての分割 λ に対する M_λ で生成される自由加群である．また

$$\rho_n = \oplus \rho_n^d : \Lambda \to \Lambda_n$$

は全射準同形となる．この Λ は次数付き環であり，ρ_n は環準同形になる．

補足 5.44. Λ_n に対して逆極限（環の圏で）をとってしまうと，無限積 $\prod(1+x_i)$ などを含んでしまい，M_λ の有限和でかけないので $\lim_{\leftarrow} \Lambda_n \supset \Lambda$ となっている．

このように変数を無限個だと思っても，変数が有限個の場合の話を得ることができる．例えば，上の ρ_n は全射環準同形であるので，Λ に対して成立する関係式は ρ_n により Λ_n へ移しても成立することがわかる．例えば，変数が $k \geq 2$ の時に，$S_{(1)}^2 = S_{(2)} + S_{(1,1)}$ が成立する．そこで $k=1$ の場合を得るには，$x_2 = x_3 = \cdots = 0$ とすればよく．$S_{(1,1)} = 0$ となるので，変数が $k=1$ の場合には $S_{(1)}^2 = S_{(2)}$ が成立する．このように変数が無限個の場合（または変数が次数の数より大きい場合）の議論をしておけば，有限個の場合へ落とすことができるので便利．

さて，上の設定で，

$$\Lambda = \mathbb{C}[e_1, e_2, \cdots] = \mathbb{C}[h_1, h_2, \cdots] = \mathbb{C}[p_1, p_2, \cdots]$$

となることがわかる．

補足 5.45. 実は $\mathbb{Z}$ 係数の対称式 $\Lambda_{\mathbb{Z}}$ でも

$$\Lambda_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \cdots] = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \cdots]$$

が成立する．しかし，$\mathbb{Z}[p_1, p_2, \cdots]$ は同型にならない．実際，h_d などは $\mathbb{Q}[p_1, \cdots]$ に入る（h_d を p_i を使ってあらわしてみよ）．つまり，

$$\Lambda_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \cdots] = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \cdots] = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \cdots]$$

5.4.1 involution ω

さて，**対合** or **involution**

$$\omega : \Lambda \to \Lambda$$

を

$$\omega(e_r) = h_r$$

を環準同形として拡張したものとして定義する．このとき

命題 5.46. ω は $\omega^2 = \mathrm{id}$ をみたす．また $\omega(p_d) = (-1)^{d-1}p_d$（$d \geq 1$）であり，

$$\omega(P_\lambda) = (-1)^{d-k}P_\lambda, \quad (\omega(P^i) = (-1)^{d-\sum_{q=1}^{d} i_q}P^i)$$

となる．ここで $P_\lambda = p_{\lambda_1}\cdots p_{\lambda_k}$ であり，λ は d の分割で $l(\lambda) = k$ となるものである．さらに

$$\omega(S_\lambda) = S_{\lambda'}, \quad \lambda' \text{ は } \lambda \text{ の共役}$$

Proof. $\sum_{d=0}^{k}(-1)^d h_{p-d}e_d = 0$ が成立していた．まず $h_1 = e_1$ であるので，$\omega(h_1) = \omega(e_1) = h_1 = e_1$ である．次に，

$$\omega(h_2) - \omega(e_1)\omega(h_1) + \omega(e_2) = \omega(h_2) - h_1e_1 + h_2 = 0$$

となるので，$\omega(h_2) = e_2$ である，以下同様にしていけば，$\omega(h_r) = e_r$ であることがわかる．よって $\omega^2 = \mathrm{id}$ である．

次に $\omega(S_\lambda) = S_{\lambda'}$ となることは，$S_\lambda = |h_{\lambda_i+j-i}|$ に ω を当てれば，$\omega(S_\lambda) = |e_{\lambda_i+j-i}| = S_{\lambda'}$ となる．

次に $\omega(p_d) = (-1)^{d-1}p_d$ を証明するには，

$$(-1)^l(-l)e_l = \sum_{r=0}^{l-1}(-1)^r e_r p_{l-r}, \quad lh_l = \sum_{s=1}^{l} p_s h_{l-s}$$

を用いればよい． □

命題 5.47. *involution* ω は内積に関して等長的である．つまり，

$$\langle \omega(P), \omega(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$$

となる．

Proof. 基底 $\{S_\lambda\}_\lambda$ について確かめればよい．

$$\langle \omega(S_\lambda), \omega(S_\mu) \rangle = \langle S_{\lambda'}, S_{\mu'} \rangle = \delta_{\lambda',\mu'} = \langle S_\lambda, S_\mu \rangle$$

となる． □

例 5.48. $H_\lambda = \sum K_{\lambda\mu}S_\mu$ に対して ω を作用させると，

$$E_\lambda = \sum K_{\mu\lambda}S_{\mu'}$$

を得る．

例 5.49. 次は Pieri の公式の双対版である．

系 5.50 (Pieri の公式の双対版).

$$S_\lambda S_{(\underbrace{1,\cdots,1}_{m})} = S_\lambda e_m = \sum S_\mu$$

ここで左辺は，λ に m 個の箱をつけるが，同じ行には二つ以上の箱をつけないようなヤング図形で和をとっている．

Proof. Pieri の公式は

$$S_\lambda S_{(m)} = S_\lambda h_m = \sum S_\mu$$

となる．ここで左辺は，λ に m 個の箱をつけるが，同じ列に二つ以上の箱をつけないようなヤング図形で和をとっている．この式において，ω をとれば，

$$S_{\lambda'} e_m = \sum S_{\mu'}$$

となる．ここで箱の形が共役になるので和は，λ' に m 個の箱をつけるが，同じ行に二つ以上の箱をつけないようなヤング図形で和をとっていることになる． □

例 5.51. Section 5.3.2 及び補題 5.40　において次のことを証明した．

$$\begin{aligned}\prod_{i,j}\frac{1}{(1-x_iy_j)} &= \sum_i \frac{1}{z(i)}P^i(x)P^i(y) = \sum H_\lambda(x)M_\lambda(y)\\ &= \sum M_\lambda(x)H_\lambda(y) = \sum S_\lambda(x)S_\lambda(y)\end{aligned}$$

これらに式において x 変数に対して ω を作用させる．

$$\prod_i(1+x_iy_j) = \sum e_k y_j^k, \quad \prod_i \frac{1}{(1-x_iy_j)} = \sum h_k y_j^k, \quad \omega(e_k) = h_k$$

であることから，

$$\prod_{i,j}(1+x_iy_j) = \sum_i \frac{1}{z_i}\omega(P^i(x))P^i(y) = \sum \omega(H_\lambda(x))M_\lambda(y) = \sum \omega(S_\lambda(x))S_\lambda(y)$$

となる．よって，次の恒等式が成立する．

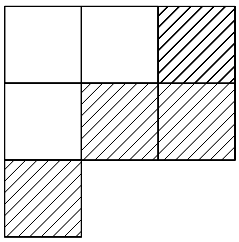
$$\begin{aligned}\prod_{i,j}(1+x_iy_j) &= \sum_i \frac{(-1)^{d-\sum i_q}}{z(i)}P^i(x)P^i(y) = \sum E_\lambda(x)M_\lambda(y)\\ &= \sum M_\lambda(x)E_\lambda(y) = \sum S_\lambda(x)S_{\lambda'}(y)\end{aligned}$$

5.5　Skew シューア多項式

シューア多項式の一般化である Skew シューア多項式について学ぶ.

定義 5.6. ヤング図形 λ と μ を考える．また $\mu_i \leq \lambda_i$（$\forall i$）とする．このとき λ/μ により，λ から μ を引いた図形とする．これを **Skew ヤング図形**とよぶ.

例 5.52. $\lambda = (3,3,1)$, $\mu = (2,1)$ とする．このとき λ/μ はつぎのよう.



以下では，ヤング図形の行の数は k 以下とする（よって，k 変数で考える）.

定義 5.7. λ/μ に対する **Skew シューア多項式** $S_{\lambda/\mu}$ とは，次で定義されるものである．さらに次の定義はすべて同値．また λ を $d+m$ の分割 μ を m の分割とすれば，$S_{\lambda/\mu}$ の次数は d である.

1. $S_{\lambda/\mu} = |h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}|$
2. $S_{\lambda/\mu} = |e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}|$
3. $S_{\lambda/\mu} = \sum m_a x_1^{a_1}\cdots x_k^{a_k}$．ここで，$m_a$ は λ/μ の箱に，行に関しては非減少，列に関して増加しているように a_1 個の 1, a_2 個の 2, $\cdots$ a_k 個の k をつめる方法の数である.
4. $S_{\lambda/\mu} = \sum_\nu N_{\mu\nu\lambda} S_\nu$．ここで $N_{\mu\nu\lambda}$ は Littlewood-Richardson 数である.（ν は d の分割である）.
5. $\langle S_{\lambda/\mu}, S_\nu\rangle = \langle S_\lambda, S_\mu S_\nu\rangle$ がすべての ν（d の分割で $l(\nu) \leq k$）に対して成立.

また $S_{\lambda/0} = S_\lambda$ である.

Proof. まず 4 と 5 の定義が同値であることを確かめよう．Littelwood-Ricardson rule により，

$$S_\mu S_\nu = \sum_\lambda N_{\mu\nu\lambda} S_\lambda$$

が成立していた（$d+m = \sum \mu_i + \nu_i$ に対する分割で $l(\lambda) \leq k$ となるものすべてに対して和をとっている）．そこで，5 が成立するとすれば，

$$\langle S_{\lambda/\mu}, S_\nu\rangle = N_{\mu\nu\lambda}$$

となる．また $\{S_\nu\}_\nu$ が k 変数 d 次対称式の正規直交基底であることから，

$$S_{\lambda/\mu} = \sum N_{\mu\nu\lambda} S_\nu$$

となり 4 の定義と一致する．4 から 5 も同様.

つぎに 4 と 1 が同値であることを証明する.

$$\begin{aligned}\sum_\lambda S_{\lambda/\mu}(x)S_\lambda(y) = \sum_{\lambda,\nu} N_{\mu\nu\lambda}S_\nu(x)S_\lambda(y) = \sum_\nu S_\nu(x)S_\mu(y)S_\nu(y) \\ = S_\mu(y)\sum_\nu H_\nu(x)M_\nu(y)\end{aligned} \tag{5.8}$$

となる．ν は d の分割で $l(\nu) \le k$ となるもので和をとっている．ここで軌道和対称式の定義を思い出す．$M_\nu(y) = \sum y_1^{\alpha_1}\cdots y_k^{\alpha_k}$ で和は $(\nu_1,\cdots,\nu_k)$ のすべての異なる置換 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ に対してとっている．そこで，(5.8) を使って，

$$\begin{aligned}&\sum_\lambda S_{\lambda/\mu}(x)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)y_1^{\lambda_{\sigma(1)}+k-\sigma(1)}\cdots y_k^{\lambda_{\sigma(k)}+k-\sigma(k)} \\ =&\sum_\lambda S_{\lambda/\mu}(x)|y_j^{\lambda_i+k-i}| = \sum_\nu H_\nu(x)M_\nu(y)|y_j^{\mu_i+k-i}| \\ =&\sum_\nu\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} H_\nu(x)M_\nu(y)\operatorname{sgn}(\sigma)y_1^{\mu_{\sigma(1)}+k-\sigma(1)}\cdots y_k^{\mu_{\sigma(k)}+k-\sigma(k)} \\ =&\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=d} H_\alpha(x)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)y_1^{\alpha_1+\mu_{\sigma(1)}+k-\sigma(1)}\cdots y_k^{\alpha_k+\mu_{\sigma(k)}+k-\sigma(k)}\end{aligned}$$

となる（$H_\alpha = h_{\alpha_1}\cdots h_{\alpha_k}$）．命題 5.4 のようにしていけば，$y_1^{\lambda_1+k-1}\cdots y^{\lambda_k}$ の係数を比較すればよいので，

$$\alpha_1 = \lambda_1 + k - 1 - (\mu_{\sigma(1)} + k - \sigma(1)),\cdots,\alpha_k = \lambda_k - (\mu_{\sigma(k)} + k - \sigma(k))$$

となるので，

$$S_{\lambda/\mu}(x) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sgn}(\sigma)h_{\lambda_1-\mu_{\sigma(1)}-1+\sigma(1)}\cdots h_{\lambda_k-\mu_{\sigma(k)}-k+\sigma(k)} = |h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}|$$

となる．よって定義 4 から定義 1 が従う．1 から 4 を示すには，上の証明を逆にたどっていけばよい.

2 が同値であることを証明しよう．これには inovlution ω を使えばよい．まず

$$\langle\omega(S_{\lambda/\mu}), S_{\nu'}\rangle = \langle\omega(S_{\lambda/\mu}),\omega(S_\nu)\rangle = \langle\omega(S_\lambda),\omega(S_\mu)\omega(S_\nu)\rangle = \langle S_{\lambda'}, S_{\mu'}S_{\nu'}\rangle$$

となるので，

$$\omega(S_{\lambda/\mu}) = S_{\lambda'/\mu'} = |h_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}| = \omega(|e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}|)$$

となる．よって，2 が成立する.

定義 3 が同値であることを証明するにはもう少し準備が必要なので，後で証明する． □

上の証明において，次のことがわかる（直接，証明することも可能 [2]）．

系 5.53. 完全対称式と基本対称式の間に次の関係が成立する．

$$|h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}| = |e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}|.$$

特に $\mu=0$ とした場合には，以前証明した (5.5) である．

定義 1 について，もう少し考察してみよう．

$$S_{\lambda/\mu} = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1-\mu_1} & h_{\lambda_1-\mu_2+1} & h_{\lambda_1-\mu_3+2} & \cdots & h_{\lambda_1-\mu_k+k-1} \\ h_{\lambda_2-\mu_1-1} & h_{\lambda_2-\mu_2} & h_{\lambda_2-\mu_3+1} & \cdots & h_{\lambda_2-\mu_k+k-2} \\ h_{\lambda_3-\mu_1-2} & h_{\lambda_3-\mu_2-1} & h_{\lambda_3-\mu_3} & \cdots & h_{\lambda_3-\mu_k+k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_k-\mu_1-k+1} & h_{\lambda_k-\mu_2-k+2} & \cdots & \cdots & h_{\lambda_k-\mu_k} \end{vmatrix}$$

となる．そこで，すべての i に対して $\mu_i \leq \lambda_i$ でない場合には，$S_{\lambda/\mu}=0$ となる．これは $\mu \subset \lambda$ とならない場合に相当する．たとえば，$\mu_2 > \lambda_2$ とすれば，

$$S_{\lambda/\mu} = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1-\mu_1} & h_{\lambda_1-\mu_2+1} & h_{\lambda_1-\mu_3+2} & \cdots & h_{\lambda_1-\mu_k+k-1} \\ 0 & 0 & h_{\lambda_2-\mu_3+1} & \cdots & h_{\lambda_2-\mu_k+k-2} \\ 0 & 0 & h_{\lambda_3-\mu_3} & \cdots & h_{\lambda_3-\mu_k+k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{\lambda_k-\mu_3-k+3} & \cdots & h_{\lambda_k-\mu_k} \end{vmatrix} = 0$$

となる．

次に，$\mu \subset \lambda$ となるが，$\mu_r \geq \lambda_{r+1}$ となる r が存在するとする．このとき，$\mu_{r-1} \geq \mu_r \geq \lambda_{r+1} \geq \lambda_{r+2} \geq \cdots \geq \lambda_k$ となるので $r+1 \leq s \leq k$, $1 \leq t \leq r$ に対して，

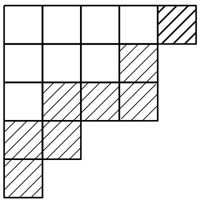
$$h_{\lambda_s-\mu_t-s+t} = h_{-(\mu_r-\lambda_s)-(s-t)} = 0$$

となるので，

$$\begin{aligned}(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}) &= \begin{pmatrix} h_{\lambda_1-\mu_1} & \cdots & h_{\lambda_1-\mu_r-1+r} & h_{\lambda_1-\mu_{r+1}+r} & \cdots & h_{\lambda_1-\mu_k+k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{\lambda_r-\mu_1-r+1} & \cdots & h_{\lambda_r-\mu_r} & h_{\lambda_r-\mu_{r+1}+1} & \cdots & h_{\lambda_r-\mu_k-r+k} \\ h_{\lambda_{r+1}-\mu_1-r} & \cdots & h_{\lambda_{r+1}-\mu_r-1} & h_{\lambda_{r+1}-\mu_{r+1}} & \cdots & h_{\lambda_{r+1}-\mu_k-(r+1)+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{\lambda_k-\mu_1-k+1} & \cdots & h_{\lambda_k-\mu_r-k+r} & h_{\lambda_k-\mu_{r+1}-k+r+1} & \cdots & h_{\lambda_k-\mu_k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_{\lambda_1-\mu_1} & \cdots & h_{\lambda_1-\mu_r-1+r} & h_{\lambda_1-\mu_{r+1}+r} & \cdots & h_{\lambda_1-\mu_k+k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{\lambda_r-\mu_1-r+1} & \cdots & h_{\lambda_r-\mu_r} & h_{\lambda_r-\mu_{r+1}+1} & \cdots & h_{\lambda_r-\mu_k-r+k} \\ 0 & \cdots & 0 & h_{\lambda_{r+1}-\mu_{r+1}} & \cdots & h_{\lambda_{r+1}-\mu_k-(r+1)+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{\lambda_k-\mu_{r+1}-k+r+1} & \cdots & h_{\lambda_k-\mu_k} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

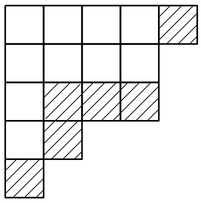
となる．よって，この場合には，$S_{\lambda/\mu}$ は split する．これをヤング図形で考えてみれば，$\mu_r \geq \lambda_{r+1}$ は次のように Skew ヤング図形が二つの連結成分に分解することを意味する．

$\lambda = (5,4,4,2,1)$
$\mu = (4,3,1)$



連結成分は二つ

$\lambda = (5,4,4,2,1)$
$\mu = (4,4,1,1)$



連結成分は三つ

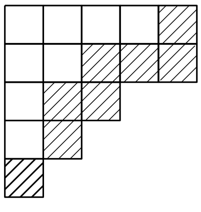
上で述べたことを解釈すれば次のようになる．

補題 5.54. $S_{\lambda/\mu}$ は $\mu \subset \lambda$ とならないならゼロである．また $\mu \subset \lambda$ となる場合には，$S_{\lambda/\mu}$ は *Skew* ヤング図形にのみ依存する．そして，θ_i を λ/μ の連結な *Skew* ヤング図形の成分とすれば，$S_{\lambda/\mu} = \prod_i S_{\theta_i}$ となる．ここで S_{θ_i} は *Skew* ヤング図形に対するシューア多項式で．定義は $\theta_i = \nu^{(i+1)}/\nu^{(i)}$ となる $\exists\nu^{(i+1)}$, $\exists\nu^{(i)}$ に対して $S_{\theta_i} := S_{\nu^{(i+1)}/\nu^{(i)}}$ としている.（この補題の意味は以下であげる例をみればわかるであろう）.

例 5.55. 上の図の $\lambda = (5,4,4,2,1)$, $\mu = (4,3,1)$ の場合に考えてみる．定義に従えば，

$$S_{\lambda/\mu} = \begin{vmatrix} h_{5-4} & h_{5-3+1} & h_{5-1+2} & h_{5-0+3} & h_{5-0+4} \\ h_{4-4-1} & h_{4-3} & h_{4-1+1} & h_{4-0+2} & h_{4-0+3} \\ h_{4-4-2} & h_{4-3-1} & h_{4-1} & h_{4-0+1} & h_{4-0+2} \\ h_{2-4-3} & h_{2-3-2} & h_{2-1-1} & h_{2-0} & h_{2-0+1} \\ h_{1-4-4} & h_{1-3-3} & h_{1-1-2} & h_{1-0-1} & h_{1-0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & h_3 & h_6 & h_8 & h_9 \\ 0 & h_1 & h_4 & h_6 & h_7 \\ 0 & h_0 & h_3 & h_5 & h_6 \\ 0 & 0 & h_0 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{vmatrix}$$
$$= h_1 \begin{vmatrix} h_1 & h_4 & h_6 & h_7 \\ h_0 & h_3 & h_5 & h_6 \\ 0 & h_0 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{vmatrix}$$

一方，$\tilde{\lambda} = (5,5,3,2,1)$, $\tilde{\mu} = (4,2,1,1)$ とする，



$$
S_{\tilde{\lambda}/\tilde{\mu}} = \begin{vmatrix} h_{5-4} & h_{5-2+1} & h_{5-1+2} & h_{5-1+3} & h_{5-0+4} \\ h_{5-4-1} & h_{5-2} & h_{5-1+1} & h_{5-1+2} & h_{5-0+3} \\ h_{3-4-2} & h_{3-2-1} & h_{3-1} & h_{3-1+1} & h_{3-0+2} \\ h_{2-4-3} & h_{2-2-2} & h_{2-1-1} & h_{2-1} & h_{2-0+1} \\ h_{1-4-4} & h_{1-2-3} & h_{1-1-2} & h_{1-1-1} & h_{1-0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & h_4 & h_6 & h_7 & h_9 \\ h_0 & h_3 & h_5 & h_6 & h_8 \\ 0 & h_0 & h_2 & h_3 & h_5 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 \end{vmatrix}
$$

$$
= h_1 \begin{vmatrix} h_1 & h_4 & h_6 & h_7 \\ h_0 & h_3 & h_5 & h_6 \\ 0 & h_0 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 \end{vmatrix}
$$

となるので，$S_{\lambda/\mu}$ と一致することがわかる．これが Skew ヤング図形にのみ依存するということである．

もうひとつの図である $\lambda = (5,4,4,2,1)$, $\mu = (4,4,1,1)$ の場合に考えてみると，

$$
S_{\lambda/\mu} = \begin{vmatrix} h_{5-4} & h_{5-4+1} & h_{5-1+2} & h_{5-1+3} & h_{5-0+4} \\ h_{4-4-1} & h_{4-4} & h_{4-1+1} & h_{4-1+2} & h_{4-0+3} \\ h_{4-4-2} & h_{4-4-1} & h_{4-1} & h_{4-1+1} & h_{4-0+2} \\ h_{2-4-3} & h_{2-4-2} & h_{2-1-1} & h_{2-1} & h_{2-0+1} \\ h_{1-4-4} & h_{1-4-3} & h_{1-1-2} & h_{1-1-1} & h_{1-0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_6 & h_7 & h_9 \\ 0 & h_0 & h_4 & h_5 & h_7 \\ 0 & 0 & h_3 & h_4 & h_6 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 \end{vmatrix}
$$

$$
= h_1 h_0 (h_3 h_1 - h_4 h_0) h_1
$$

同様にして，次もいえる．

補題 5.56. ある i に対して，$\lambda'_i - \mu'_i > k$ となるなら $S_{\lambda/\mu}(x_1, \cdots, x_k) = 0$ である．

Proof. $\lambda'_i - \mu'_i > k$ と仮定する．このとき $e_{k+1} = e_{k+2} = \cdots = 0$ である．よって，

$$
S_{\lambda/\mu} = \begin{vmatrix} e_{\lambda'_1-\mu'_1} & e_{\lambda'_1-\mu'_2+1} & \cdots & e_{\lambda'_1-\mu'_i+2} = 0 & \cdots & 0 \\ e_{\lambda'_2-\mu'_1-1} & e_{\lambda'_2-\mu'_2} & \cdots & e_{\lambda'_2-\mu'_i+1} = 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{\lambda'_i-\mu'_1-2} & e_{\lambda'_i-\mu'_2-1} & \cdots & e_{\lambda'_i-\mu'_i} = 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{\lambda'_k-\mu'_1-k+1} & e_{\lambda'_k-\mu'_2-k+2} & \cdots & \cdots & \cdots & e_{\lambda'_k-\mu'_k} \end{vmatrix} = 0
$$

となる． □

さて，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda,\mu} S_{\lambda/\mu}(x) S_\lambda(z) S_\mu(y) &= \sum_{\lambda,\mu} N_{\mu\nu\lambda} S_\nu(x) S_\lambda(z) S_\mu(y) = \sum_{\mu} S_\nu(x) S_\mu(z) S_\nu(z) S_\mu(y) \\
&= \sum_{\mu} S_\mu(y) S_\mu(z) \prod_{i,l} \frac{1}{1 - x_i z_l} = \prod_{i,l} \frac{1}{1 - x_i z_l} \prod_{j,l} \frac{1}{1 - y_j z_l}
\end{aligned}
$$

となる．そこで $S_\lambda(x,y) := S_\lambda(x_1,x_2,\cdots,y_1,y_2,\cdots)$ とすれば，

$$\sum_{\lambda,\mu} S_{\lambda/\mu}(x)S_\lambda(z)S_\mu(y) = \sum_\lambda S_\lambda(x,y)S_\lambda(z)$$

となるので，

$$S_\lambda(x,y) = \sum_\mu S_{\lambda/\mu}(x)S_\mu(y) = \sum_{\mu,\nu} N_{\mu\nu\lambda}S_\mu(y)S_\mu(x)$$

を得る．一般に次が成立する

補題 5.57.

$$S_{\lambda/\mu}(x,y) = \sum_\nu S_{\lambda/\nu}(x)S_{\nu/\mu}(y) \tag{5.9}$$

が成立する．ここで ν は $\mu \subset \nu \subset \lambda$ となるものについて和をとっている．特に $\mu = 0$ とすれば，

$$S_\lambda(x,y) = \sum_\mu S_{\lambda/\mu}(x)S_\mu(y)$$

が成立する．

Proof. 上で証明したことを使えば，

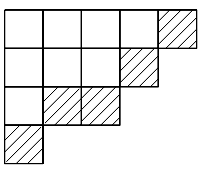
$$\sum_\mu S_{\lambda/\mu}(x,y)S_\mu(z) = S_\lambda(x,y,z) = \sum_\nu S_{\lambda/\nu}(x)S_\nu(y,z) = \sum_{\mu,\nu} S_{\lambda/\nu}(x)S_{\nu/\mu}(y)S_\mu(z)$$

となる．よって，$S_{\lambda/\mu}(x,y) = \sum_\nu S_{\lambda/\nu}(x)S_{\nu/\mu}(y)$ となる． □

上の補題を繰り返して使ってみる．$x,y,z,\cdots$ の変わりに $x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}\cdots,$ とする．このとき，

$$S_{\lambda/\mu}(x^{(1)},\cdots,x^{(k)}) = \sum_{(\nu)} \prod_{i=1}^{k} S_{\nu^{(i)}/\nu^{(i-1)}}(x^{(i)})$$

となる．ここで $(\nu) = (\nu^{(0)},\nu^{(1)},\cdots,\nu^{(k)})$ は $\mu = \nu^{(0)} \subset \nu^{(1)} \subset \cdots \subset \nu^{(k)} = \lambda$ となる分割の列である．各成分 $x^{(i)}$ がひとつの変数 x_i の場合を考える．まず，ただひとつの変数 x しかない場合を考える．補題 5.56 から，λ/μ が長さ 2 以上の列を持つ場合には $S_{\lambda/\mu} = 0$ になる．それ以外の場合には $S_{\lambda/\mu}(x) = x^{|\lambda-\mu|}$ である（行の長さが 1 以上でも定義できることに注意）．たとえば，



なら，$S_{\lambda/\mu} = x^1x^1x^2x^1 = x^5$ となる．そこで，

$$S_{\lambda/\mu}(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{(\nu)} \prod_{i=1}^{k} S_{\nu^{(i)}/\nu^{(i-1)}}(x_i)$$

において $\prod_{i=1}^{k} S_{\nu^{(i)}/\nu^{(i-1)}}(x_i) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$ となる．ここで $\alpha_i = |\nu^{(i)}/\nu^{(i+1)}|$．そこで，

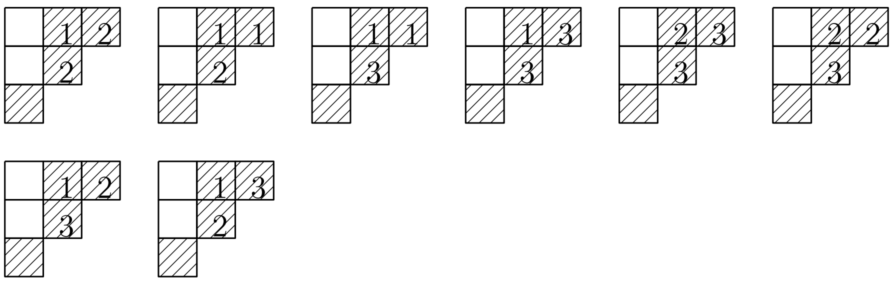
$$S_{\lambda/\mu}(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{(\nu)} x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

となる．このようにして，定義 5.7 の 3 番目の定義となる．つまり，

$$S_{\lambda/\mu} = \sum m_a x_1^{a_1} \cdots x_k^{a_k}.$$

ここで，m_a は λ/μ の箱に，行に関しては非減少，列に関して増加しているように a_1 個の 1, a_2 個の 2, ⋯ a_k 個の k をつめる方法の数である．

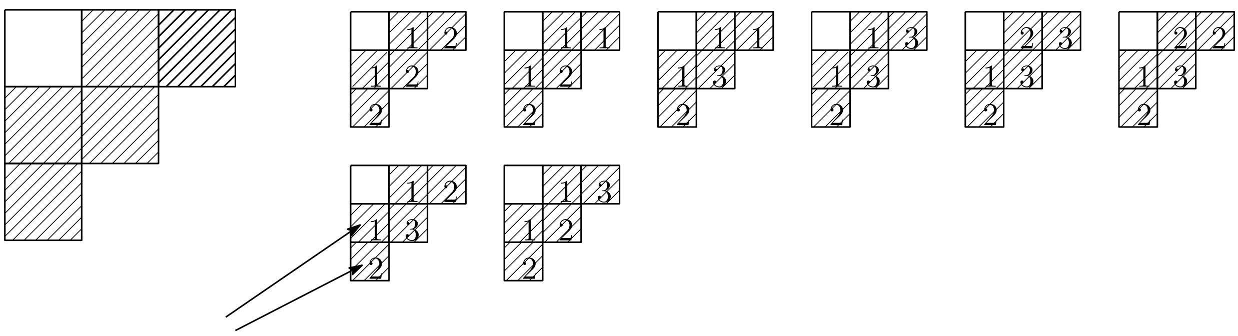
例 5.58. $\lambda = (3,2,1)$, $\mu = (1,1)$ の場合を考える．上の方法で考えれば，



となるので，

$$S_{\lambda/\mu} = (x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3).$$

次に，$\lambda = (3,2,1)$, $\mu = (1)$ の場合を考えると，



他に，この二つを 1, 3 に変えたものと，2, 3 に変えたもの

よって，

$$S_{\lambda/\mu} = (x_1x_2^2 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + 2x_1x_2x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

となる．

6 Frobenius 公式の証明と応用

Frobenius の公式とは次である．

d の分割 λ に対する $\mathfrak{S}_d$ の既約表現 V_λ の指標 χ_λ を考える．この共役類 C_i 上での値は，

$$\chi_\lambda(C_i) = \left[\Delta(x) \prod_{1 \leq j \leq d} p_j(x)^{i_j} \right]_{(l_1, \cdots, l_k)}.$$

で与えられる．

以下で Frobenius の公式を証明する．

6.1 Frobenius 公式の証明

d の分割を $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ とする．このとき**ヤング部分群**と呼ばれる部分群を次で定義，

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \mathfrak{S}_{\lambda_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k} \subset \mathfrak{S}_d$$

これはヤング対称化作用素 $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$ の a_λ に対応した部分群 P のことである．a_λ は冪等元なので，$U_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda$ は $\mathfrak{S}_d$ の表現を与える．さらに，この U_λ は $\mathfrak{S}_\lambda$ の自明表現からの誘導表現であることがわかる．特に，$\dim U_\lambda = |\mathfrak{S}_d|/|\mathfrak{S}_\lambda|$ となる．

Proof. ヤング部分群 $\mathfrak{S}_\lambda$ は a_λ へ自明に作用する．よって $W = \mathbb{C}(a_\lambda)$ は $\mathfrak{S}_\lambda$ の自明表現である．そして，

$$\mathrm{Ind} W = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_\lambda} W = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda = U_\lambda$$

となる． □

次に $V_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda b_\lambda$ と $U_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda$ の関係を見てみよう．U_λ の指標を ψ_λ とし，V_λ の指標を χ_λ とする．

まず，V_λ は U_λ の部分表現である．実際，

$$U_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda \ni x \mapsto x b_\lambda \in V_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda b_\lambda$$

は $\mathfrak{S}_d$ 線形な全射で V_λ は既約なので，$V_\lambda \subset U_\lambda$ となる．

例 6.1. $\lambda = (d-1, 1)$ とする．$U_\lambda = \mathrm{Ind} W$ である．U を自明表現とすれば，フロベニウス相互律から

$$(\chi_{\mathrm{Ind}W}, \chi_U) = (\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}U}) = 1$$

となる．よって U_λ の中には自明表現が存在する．また $\dim U_\lambda = \dim \mathrm{Ind} W = |\mathfrak{S}_d|/|\mathfrak{S}_\lambda| = d$ である．また上で述べたように $V_{(d-1,1)}$ が存在するが，これは標準表現であるので $d-1$ 次元である．以上から，

$$U_{(d-1,1)} = V_{(d-1,1)} \oplus V_{(d)}$$

となる．

別証明：命題 4.14 のようにして，$U_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda$ が $\mathfrak{S}_d$ の $\mathbb{C}^d$ への表現と同値であることがわかるので，$U_{(d-1,1)} = V_{(d-1,1)} \oplus V_{(d)}$ を得る．

上の例では，U_λ が V_λ を重複度 1 で含んでいる．また，辞書式順序に関して，$\mu > \lambda$ となる V_μ という既約表現を含んでいることがわかる．実は，この事実は一般にも成立する．以下で，それを見ていこう．

$i = (i_1, \cdots, i_d)$ を $\sum \alpha i_\alpha = d$ となる非負整数の組として，対応する共役類を C_i と書く．つまり，i_1 個の 1-cycle, i_2 個の 2-cycle, $\cdots$ となるものである．subsection 1.4 で見たように，

$$|C_i| = \frac{d!}{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \cdots d^{i_d} i_d!}$$

となる．さらに誘導表現の指標の公式から，$\psi_\lambda = \chi_{U_\lambda}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda(C_i) &= \frac{|\mathfrak{S}_d|}{|\mathfrak{S}_\lambda|} \frac{|C_i \cap \mathfrak{S}_\lambda|}{|C_i|} \\
&= \frac{d!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k!} \frac{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \cdots d^{i_d} i_d!}{d!} \sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p1}} r_{p1}! \cdots d^{r_{pd}} r_{pd}!}
\end{aligned}$$

となる．ここで和は $\{r_{pq} : 1 \le p \le k, 1 \le q \le d\} \subset (\mathbb{Z}_{\ge 0})^{kd}$ で

$$i_q = r_{1q} + r_{2q} + \cdots + r_{kq}, \quad \lambda_p = r_{p1} + 2r_{p2} + \cdots + d r_{pd}$$

を満たすものでとっている．

Proof. $\mathfrak{S}_\lambda \subset \mathfrak{S}_d$ は

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

となる．$g \in \mathfrak{S}_\lambda$ を

$$g = g_1 \cdots g_k \in \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

とする．この各 $g_p \in \mathfrak{S}_{\lambda_p}$ をサイクル表示して，サイクルタイプが

$$(r_{p1}, \cdots, r_{pd}), \quad \lambda_p = \sum \alpha r_{p\alpha}$$

とする．そこで g のサイクルタイプは

$$(\sum_{p=1}^{k} r_{p1}, \sum_{p=1}^{k} r_{p2}, \cdots, \sum_{p=1}^{k} r_{pd})$$

となる．そして，このサイクルタイプをもつ元の個数は

$$\prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p1}} r_{p1}! \cdots d^{r_{pd}} r_{pd}!}$$

となる．

よって $|C_i \cap \mathfrak{S}_\lambda|$ の個数は

$$\sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p1}} r_{p1}! \cdots d^{r_{pd}} r_{pd}!}$$

となる．和は上で述べたものである． □

そこで

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(C) &= \frac{d!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k!} \frac{1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \cdots d^{i_d} i_d!}{d!} \sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p1}} r_{p1}! \cdots d^{r_{pd}} r_{pd}!} \\ &= \sum \prod_{q=1}^{d} \frac{i_q!}{r_{1q}! r_{2q}! \cdots r_{kq}!}\end{aligned}$$

となる（和のとり方は上で述べたもの）．これは，対称式

$$P^i = (x_1 + \cdots + x_k)^{i_1} (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{i_2} \cdots (x_1^d + \cdots + x_k^d)^{i_d}$$

における，$X^\lambda = x_1^{\lambda_1} \cdots x_k^{\lambda_k}$ の係数に一致する．よって，

$$\psi_\lambda(C_i) = [P^i]_\lambda = P^i \text{ の } X^\lambda \text{ における係数}$$

となる．

Proof.

$$\begin{aligned}&(x_1 + \cdots + x_k)^{i_1} (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{i_2} \cdots (x_1^d + \cdots + x_k^d)^{i_d} \\ =& \sum_{r_{11} + \cdots + r_{k1} = i_1} \frac{i_1!}{r_{11}! \cdots r_{k1}!} x_1^{r_{11}} x_2^{r_{21}} \cdots x_k^{r_{k1}} \cdots \sum_{r_{1d} + \cdots + r_{kd} = i_d} \frac{i_d!}{r_{1d}! \cdots r_{kd}!} x_1^{dr_{1d}} x_2^{dr_{2d}} \cdots x_k^{dr_{kd}} \\ =& \sum_{r_{11} + \cdots + r_{k1} = i_1} \cdots \sum_{r_{1d} + \cdots + r_{kd} = i_d} \prod_{q=1}^{d} \frac{i_1!}{r_{1q}! \cdots r_{kq}!} x_1^{1r_{11} + 2r_{12} + \cdots dr_{1d}} x_2^{r_{21} + 2r_{22} + \cdots dr_{2d}} \cdots x_k^{r_{k1} + 2r_{k2} + \cdots dr_{kd}}\end{aligned}$$

であるので，X^λ の成分は $\lambda_p = r_{p1} + 2r_{p2} + \cdots + dr_{pq}$（$1 \leq p \leq k$）となるものを考えればよい． □

以上で，U_λ の指標 ψ_λ がもとめることができた．

さて，我々の目標は $\chi_\lambda(C_i) = \chi_{V_\lambda}(C_i)$ が

$$\omega_\lambda(i) := [\Delta P^i]_l, \quad l = (l_1, \cdots, l_k) = (\lambda_1 + k - 1, \lambda_2 + k - 2, \cdots, \lambda_k)$$

と一致することをみることである．

補題 5.39 から

$$\psi_\lambda(C_i) = \omega_\lambda(i) + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}\omega_\mu(i) \tag{6.1}$$

が成立する．さらに，補題 5.40 から，

$$\sum_i \frac{1}{1^{i_1}i_1!\cdots d^{i_d}i_d!}\omega_\lambda(i)\omega_\mu(i) = \frac{1}{d!}\sum_i |C_i|\omega_\lambda(i)\omega_\mu(i) = \delta_{\lambda,\mu}$$

が成立する．この式は $\omega_\lambda : C_i \to \omega_\lambda(i)$ として ω_λ を類関数だとみなしたときに，$\{\omega_\lambda\}_\lambda$ が類関数全体の直交基底となることを意味する．実際に，$\omega_\lambda = \chi_\lambda$ となることを証明しよう．

命題 6.2. $\mathfrak{S}_d$ の λ に対応する既約表現を考える．この指標を χ_λ とし，サイクルタイプが $i = (i_1, \cdots, i_d)$ の共役類を C_i と書く．このとき，

$$\chi_\lambda(C_i) = \omega_\lambda(i) = [\Delta P^i]_l$$

となる．ここで $l_i = \lambda_i + k - i$ である．

Proof. まず表現 U_λ は既約表現 V_λ を少なくも一つは含むことを見た．よって，

$$\psi_\lambda = \sum n_{\lambda\mu}\chi_\mu, \quad n_{\lambda\lambda} \geq 1, \quad n_{\lambda\mu} \geq 0 \tag{6.2}$$

となる．さて，ω_λ は類関数であり，指標全体 $\{\chi_\mu\}_\mu$ が類関数の基底なので，

$$\omega_\lambda = \sum m_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

と書ける．さらに，(6.1) と (6.2) はすべての λ に対して成立していたので，辞書式順序に対して帰納的に考えると，$K_{\mu\lambda}, n_{\lambda\mu}$ が整数なので，上の係数 $m_{\lambda\mu}$ は整数でなければならないことがわかる．そして，$\{\omega_\lambda\}_\lambda, \{\chi_\lambda\}_\lambda$ が正規直交基底であることから，

$$1 = (\omega_\lambda, \omega_\lambda) = \sum_\mu m_{\lambda\mu}^2$$

となる．よって，$\exists\mu_0$ に対して，$\omega_\lambda = \pm\chi_{\mu_0}$ となる．辞書式順序に対する帰納法を行う．$\mu > \lambda$ となる，すべての μ に対して，$\chi_\mu = \omega_\mu$ であると仮定する．すると，

$$\psi_\lambda = \omega_\lambda + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}\chi_\mu = \pm\chi_{\mu_0} + \sum_{\mu>\lambda} K_{\mu\lambda}\chi_\mu = \sum n_{\lambda\mu}\chi_\mu$$

となる．$n_{\lambda\lambda} \geq 1$ であるので，$\{\chi_\mu\}_\mu$ の一次独立性から，$\mu_0 = \lambda$ であり，$\omega_\lambda = \chi_\lambda$ が成立する． □

以上で Frobenius 公式が証明できた．

系 6.3. 表現 $U_\lambda=\mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda$ を考えると，次が成立する．

$$U_\lambda\cong V_\lambda\oplus\bigoplus_{\mu>\lambda}K_{\mu\lambda}V_\mu,\quad \psi_\lambda=\chi_\lambda+\sum_{\mu>\lambda}K_{\mu\lambda}\chi_\mu$$

ここで $K_{\mu\lambda}$ は *Kostka* 数である（*Kostka* 数の計算の仕方は *Section 5.3.1* を参照）

例 6.4. $\lambda=(1,\cdots,1)$ に対して $a_\lambda=\mathrm{id}$ となり，U_λ は左正則表現になる．よって U_λ の中に V_λ は $\dim V_\lambda$ 個現れる．上の系から $K_{\lambda(1,\cdots,1)}$ に一致する．また，この数はヤング図形 λ に対する標準盤の数に一致した．以上から，

$$\dim V_\lambda=\#\{\text{ヤング図形 }\lambda\text{ に対する標準盤}\}$$

（これは，すでに例 5.38 において述べた）．

例 6.5. $\lambda=(d-a,a)$ とする．このとき

$$U_{(d-a,a)}=\oplus_{i=0}^a V_{(d-i,i)}$$

が成立する．

Proof. $\mu>(d-a,a)$ の場合のみを考えればよい．3 行以上のヤング図形に 1 を $d-a$ 個，2 を a 個詰めると，列が増加にならないので，考えるべきヤング図形は 2 行または 1 行のものである．つまり $\mu=(d-i,i)$（$i=0,\cdots,a$）である．$(d-i,i)$ のヤング図形に 1 を $d-a$ 個，2 を a 個詰めるとき，列が増加でなくてはならないので，一通りの詰め方したかない．つまり $K_{(d-i,i)(d-a,a)}=1$ である． □

例 6.6. 以下で述べるのは例 4.12 の別証明である．

U' を一次元交代表現とする．l 次の巡回置換の符号は $(-1)^{l-1}$ である．そこで

$$\chi_{U'}(C_i)=(-1)^{(d-1)i_d+(d-2)i_{d-1}+\cdots+1i_2}$$

でとなる．$\chi_\lambda\chi_{U'}=\chi_{V_\lambda\otimes U'}$ を考えると

$$\chi_{\lambda\otimes U'}(C_i)=(-1)^{(d-1)i_d+(d-2)i_{d-1}+\cdots+1i_2}[\Delta(x)\prod_j p_j(x)^{i_j}]_{(l_1,\cdots,l_k)}=[\Delta(x)\omega(\prod_j p_j(x)^{i_j})]_{(l_1,\cdots,l_k)}$$

ここで ω は Section 5.4 で導入した対称式上の involution である．また $P^i=\sum\omega_\lambda(i)S_\lambda$ が成立した．よって，

$$\omega(P^i)=\sum\omega_\lambda(i)\omega(S_\lambda)=\sum\omega_\lambda(i)S_{\lambda'}=\sum\omega_{\lambda'}(i)S_\lambda$$

となる．ここで λ' は λ の共役．よって，

$$\chi_{\lambda\otimes U'}(C_i)=\omega_{\lambda'}(i)=\chi_{\lambda'}(C_i)$$

が成立し，$V_\lambda\otimes U'=V_{\lambda'}$ であることがわかる．

命題 6.7. λ に対する既約表現を V_λ とし，λ の共役 λ' に対する既約表現を $V_{\lambda'}$ とする．また一次元交代表現を U' とする（$(1,\cdots,1)$ に対する既約表現である）．このとき，

$$V_\lambda\otimes U'\cong V_{\lambda'},\quad \dim V_\lambda=\dim V_{\lambda'}$$

が成立する．

6.2 応用

6.2.1 応用１:Littelwood-Richardson rule と誘導表現

まず, 既約表現 V_λ の指標 χ_λ を表現 U_μ の指標 ψ_μ の多項式として表す公式を与えよう.

まず ψ_λ の定義を拡張しよう．$a=(a_1,\cdots,a_k)\in\mathbb{Z}^k$ に対して,

$$\psi_a := \begin{cases} \psi_\lambda & a \text{ を非増加な列に並べ替えたときに } \lambda \text{ となる場合} \\ 0 & \text{ある } a_i \text{ に対して } a_i<0 \text{ となる場合} \end{cases}$$

とする．以前みたように，この ψ_a は,

$$\mathfrak{S}_{a_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{a_k}\subset\mathfrak{S}_d$$

としたときの，$\mathfrak{S}_{a_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{a_k}$ の自明表現からの誘導表現 $\mathrm{Ind}U$ に対する指標であった.

また

$$\psi_\lambda(C_i)=[P^i]_\lambda=\chi_\lambda(C_i)+\sum_{\mu>\lambda}K_{\mu\lambda}\chi_\mu(C_i)=[\Delta P^i]_{l_\lambda}+\sum K_{\mu\lambda}[\Delta P^i]_{l_\mu}$$

が成立した．一方，対称式の間の関係式として,

$$H_\lambda=S_\lambda+\sum_{\mu>\lambda}K_{\mu\lambda}S_\mu,\quad S_\lambda=|h_{\lambda_i+j-1}|$$

が成立した．この式と先ほどの式は

$$\psi_\lambda(C_i)=[P^i]_\lambda=\langle H_\lambda,P^i\rangle=\langle S_\lambda,P^i\rangle+\sum_{\mu>\lambda}K_{\mu\lambda}\langle S_\mu,P^i\rangle$$

で関係しあっている．そこで，$S_\lambda=|h_{\lambda_i+j-1}|$ に対して P^i との内積をとれば,

$$\begin{aligned}\chi_\lambda(C_i)&=\langle S_\lambda,P^i\rangle=\langle|h_{\lambda_i+j-1}|,P^i\rangle\\ &=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\tau)\langle h_{\lambda_1+\tau(1)-1}h_{\lambda_2+\tau(2)-2}\cdots h_{\lambda_k+\tau(k)-k},P^i\rangle\\ &=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\mathrm{sgn}(\tau)\langle H_{(\lambda_1+\tau(1)-1,\lambda_2+\tau(2)-2,\cdots,\lambda_k+\tau(k)-k)},P^i\rangle\\ &=|\psi_{\lambda_i+j-1}|(C_i)\end{aligned}$$

となる．以上から

命題 6.8. 対称群 $\mathfrak{S}_d$ の既約表現 V_λ の指標を χ_λ，表現 U_μ の指標を ψ_μ とする．このとき，

$$\chi_\lambda = |\psi_{\lambda_i+j-1}| = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\tau)\psi_{(\lambda_1+\tau(1)-1,\lambda_2+\tau(2)-2,\cdots,\lambda_k+\tau(k)-k)}$$

が成立する．つまり χ_λ は $\{\psi_\mu\}_\mu$ の線形結合でかける（どちらも類関数である）．

例 6.9. $\mathfrak{S}_4$ の場合に具体的に見ていこう．$\mathfrak{S}_4$ の既約表現は

$$U=(4),\quad V=(3,1),\quad W=(2,2),\quad \Lambda^2V=V\otimes U'=(2,1,1),\quad U'=(1,1,1,1).$$

の 5 つある．そして，

$$(4)>(3,1)>(2,2)>(2,1,1)>(1,1,1,1)$$

となる．Kostka 数を計算すると

$$\begin{aligned}
&K_{(4)(3,1)}=1,\quad K_{(4)(2,2)}=1,\quad K_{(4)(2,1,1)}=1,\quad K_{(4)(1,1,1,1)}=1,\\
&K_{(3,1)(2,2)}=1,\quad K_{(3,1)(2,1,1)}=2,\quad K_{(3,1)(1,1,1,1)}=3,\\
&K_{(2,2)(2,1,1)}=1,\quad K_{(2,2)(1,1,1,1)}=2,\\
&K_{(2,1,1)(1,1,1,1)}=3.
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
&U_{(4)}=V_{(4)}=U\\
&U_{(3,1)}=V_{(3,1)}+V_{(4)}\\
&U_{(2,2)}=V_{(2,2)}+V_{(4)}+V_{(3,1)}\\
&U_{(2,1,1)}=V_{(2,1,1)}+V_{(4)}+2V_{(3,1)}+V_{(2,2)}\\
&U_{(1,1,1,1)}=V_{(1,1,1,1)}+V_{(4)}+3V_{(3,1)}+2V_{(2,2)}+3V_{(2,1,1)}
\end{aligned}$$

となる．特に $U_{(1,1,1,1)}=\mathbb{C}\mathfrak{S}_4$ である．さて，一方で，上で与えた公式を考えると，

$$\begin{aligned}
&\chi_{(4)}=|\psi_4|=\psi_{(4)}\\
&\chi_{(3,1)}=\begin{vmatrix}\psi_3&\psi_4\\ \psi_0&\psi_1\end{vmatrix}=\psi_{(3,1)}-\psi_{(4)}\\
&\chi_{(2,2)}=\begin{vmatrix}\psi_2&\psi_3\\ \psi_1&\psi_2\end{vmatrix}=\psi_{(2,2)}-\psi_{(3,1)}\\
&\chi_{(2,1,1)}=\begin{vmatrix}\psi_2&\psi_3&\psi_4\\ \psi_0&\psi_1&\psi_2\\ \psi_{-1}&\psi_0&\psi_1\end{vmatrix}=\psi_{(2,1,1)}+\psi_{(4)}+0-0-\psi_{(3,1)}-\psi_{(2,2)}\\
&\chi_{(1,1,1,1)}=\begin{vmatrix}\psi_1&\psi_2&\psi_3&\psi_4\\ \psi_0&\psi_1&\psi_2&\psi_3\\ \psi_{-1}&\psi_0&\psi_1&\psi_2\\ \psi_{-2}&\psi_{-1}&\psi_0&\psi_1\end{vmatrix}=\psi_{(1,1,1,1)}-\psi_{(2,2)}-\psi_{(2,1,1)}+\psi_{(4)}
\end{aligned}$$

となる．このように χ_λ を ψ_μ の線形結合としてかけるのである．さらに表現環 $R(\mathfrak{S}_4)$ を考えれば，これは類関数の空間と同一視できた．つまり，上の式は，例えば，

$$V_{(2,1,1)} = U_{(2,1,1)} + U_{(4)} - U_{(3,1)} - U_{(2,2)}$$

となることを述べている．実際，先ほど計算した式を代入すれば

$$\begin{aligned}
&U_{(2,1,1)} + U_{(4)} - U_{(3,1)} - U_{(2,2)}\\
=&2V_{(4)} + V_{(2,1,1)} + 2V_{(3,1)} + V_{(2,2)} - (2V_{(3,1)} + 2V_{(4)} + V_{(2,2)})\\
=&V_{(2,1,1)}
\end{aligned}$$

となることがわかる．

上では，$\mathfrak{S}_{a_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a_k}$（$\sum a_k = d$）の自明表現からの誘導表現を考えた．より一般に $\mathfrak{S}_{a_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{a_k}$ の表現 $V_1 \boxtimes \cdots \boxtimes V_k$ からの誘導表現を考えよう．その誘導表現を $V_1 \circ \cdots \circ V_k$ と書くことにする．この積「$\circ$」は結合律をみたす．つまり各 V_i を既約分解して $V_i = \oplus W_{is}$ としたときに結合律をみたす．そこで V_i は既約としてよい．また $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_{d+m}$ の場合について考えれば十分である．そこで，次のような問題を考える．

λ を d の分割として $\mathfrak{S}_d$ の既約表現 V_λ を考える．また μ を m の分割として $\mathfrak{S}_m$ の既約表現 V_μ を考える．このとき $V_\lambda \boxtimes V_\mu$ から導かれる $\mathfrak{S}_{d+m}$ の誘導表現 $V_\lambda \circ V_\mu \cong V_\mu \circ V_\lambda$ を考える．これは，先ほどと異なり既約とは限らない．そこで，この既約分解や指標はどうなるのであろうか？

この問題に対する解答が次の命題である．

命題 6.10. *Littlewood-Richardson rule*（定理 *5.24*）における，$S_\lambda S_\mu = \sum N_{\lambda\mu\nu} S_\nu$ の係数 $N_{\lambda\mu\nu}$ 使えば，

$$V_\lambda \circ V_\mu = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{d+m}} V_\lambda \boxtimes V_\mu = \sum N_{\lambda\mu\nu} V_\nu$$

となる．

Proof. 部分群 $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_{d+m}$ の意味は $\mathfrak{S}_d$ は $\{1, \cdots, d\}$ の置換．$\mathfrak{S}_m$ は $\{d+1, \cdots, d+m\}$ の置換とみなすことである．誘導表現の指標の公式 3.67 を思い出す．$\mathfrak{S}_{d+m}$ の共役類 C_i と $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m$ の共通部分を考える必要がある．まず簡単な例で考えてみよう．$d = 4$, $m = 4$ で考えてみる．$g \in \mathfrak{S}_8$ として，

$$g = \{(1)(2)(3,4)\}\{(5)(6)(7,8)\} \in \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4 \subset \mathfrak{S}_8$$

を選ぶと，この g が入る共役類は $C_{(4,2)}$ となる．そして $C_{(4,2)} \cap (\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4)$ は

$$\{(1)(2)(3,4)\}\{(5)(6)(7,8)\}, \quad \{(1)(2)(3)(4)\}\{(5,6)(7,8)\}, \quad \{(1,2)(3,4)\}\{(5)(6)(7)(8)\}$$

を代表元とする三つの成分に分かれる．そこで $\mathfrak{S}_d$ の共役類を D_α と書き，$\mathfrak{S}_m$ の共役類を E_β と書くことにする．$\alpha_{d+1} = \cdots = \alpha_{d+m} = 0$, $\beta_{m+1} = \cdots = \beta_{m+d} = 0$ とすれば，$\sum_{k=0}^{d+m} k\alpha_k = d$, $\sum_{k=0}^{d+m} k\beta_k = m$ である．そして，

$$C_i \cap (\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m) = \sum_{\alpha+\beta=i \ such \ that \ \sum k\alpha_k = d, \sum k\beta_k = m} D_\alpha \times E_\beta$$

となる．これを誘導表現の指標の公式へ代入すれば，

$$\begin{aligned}
\chi_{V_\lambda \circ V_\mu}(C_i) &= \frac{(d+m)!}{d!m!} \sum_{\alpha+\beta=i \ such \ that \ \sum k\alpha_k = d, \sum k\beta_k = m} \frac{d!}{z(\alpha)} \frac{m!}{z(\beta)} \frac{z(i)}{(d+m)!} \chi_\lambda(D_\alpha)\chi_\mu(E_\beta) \\
&= \sum_{\alpha+\beta=i \ such \ that \ \sum k\alpha_k = d, \sum k\beta_k = m} \frac{z(i)}{z(\alpha)z(\beta)} \chi_\lambda(D_\alpha)\chi_\mu(E_\beta)
\end{aligned}$$

となる．

さて，Frobenius 公式において，考えている多項式の変数の数を増やしてもよいので，多項式の変数は $x_1, \cdots, x_{d+m}$ としておく．Littlewood-Richardson rule から，

$$\langle S_\lambda S_\mu, P^i \rangle = \sum N_{\lambda\mu\nu} \langle S_\nu, P^i \rangle = \sum N_{\lambda\mu\nu} \chi_\nu(C_i)$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
S_\lambda &= \sum_{\alpha_1 + \cdots + d\alpha_d = d} \frac{\omega_\lambda(\alpha)}{z(\alpha)} P^\alpha = \sum_{\alpha_1 + \cdots + (d+m)\alpha_{d+m} = d} \frac{\omega_\lambda(\alpha)}{z(\alpha)} P^\alpha, \\
S_\mu &= \sum_{\beta_1 + \cdots + m\beta_m = m} \frac{\omega_\lambda(\beta)}{z(\beta)} P^\beta = \sum_{\beta_1 + \cdots + (d+m)\beta_{d+m} = m} \frac{\omega_\lambda(\beta)}{z(\beta)} P^\beta
\end{aligned}$$

を使えば，系 5.41 を使って，

$$\begin{aligned}
\langle S_\lambda S_\mu, P^i \rangle &= \sum_{\sum k\alpha_k = d, \sum k\beta_k = m} \frac{\omega_\lambda(\alpha)\omega_\mu(\beta)}{z(\alpha)z(\beta)} \langle P^{\alpha+\beta}, P^i \rangle \\
&= \sum_{\alpha,\beta \ such \ that \ \sum k\alpha_k = d, \sum k\beta_k = m \ \alpha+\beta=i} \frac{\chi_\lambda(D_\alpha)\chi_\mu(E_\beta)z(i)}{z(\alpha)z(\beta)} = \chi_{V_\lambda \circ V_\mu}(C_i)
\end{aligned}$$

以上をあわせれば，

$$\chi_{V_\lambda \circ V_\mu}(C_i) = \chi_{\mathrm{Ind} V_\lambda \boxtimes V_\mu}(C_i) = \sum_\nu N_{\lambda\mu\nu} \chi_\nu(C_i)$$

となり，

$$V_\lambda \circ V_\mu = \sum_\nu N_{\lambda\mu\nu} V_\nu$$

を得る． □

例 6.11. $\mathfrak{S}_d$ の既約表現 V_λ と $\mathfrak{S}_m$ の交代表現 $U' = V_{(1,\cdots,1)}$ を考える．このとき，

$$V_\lambda \circ V_{(1,\cdots,1)} = \oplus V_\mu$$

ここで左辺において，λ に m 個の箱を付け加え，同じ行には箱が二個以上こないようなヤング図形で和をとっている.（証明は 系 5.50 を使えばよい）

上の命題で $m=1$ で $\mu=(1)$（自明表現）の場合を考えると，次を得る.

系 6.12. $\mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_{d+1}$ という部分群及び，$\mathfrak{S}_d$ の既約表現 V_λ を考える．このとき，

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+1}} V_\lambda = \sum_\mu V_\mu$$

となる．ここで左辺の和は λ に対するヤング図形に箱を一個くっつけたヤング図形全体である.

補足 6.13. この系は Littlewood-Richardson rule を使わなくても，Pieri の公式で証明できる．また今の場合には $\mathfrak{S}_1 = \{\mathrm{id}\}$ という自明な群である．一般に，$\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m$ の表現 $V_\lambda \boxtimes V_{(m)}$ を考える（$V_{(m)}$ は自明表現）．このとき $\mathrm{Ind}(V_\lambda \boxtimes V_{(m)}) = V_\lambda \circ V_{(m)}$ と $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+m}} V_\lambda$ は同型ではない．例えば，誘導表現の定義から次元も一致してない.

$$\dim \mathrm{Ind} V_\lambda \boxtimes V_{(m)} = \dim V_\lambda \times \frac{(d+m)!}{d!m!} \neq \dim V_\lambda \times \frac{(d+m)!}{d!} = \dim \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+m}} V_\lambda$$

この違いは，左辺は，λ の m 個の箱を同じ列に二つ以上こないようにくっつけてヤング図形であり，右辺は，λ に 1 個づつくっつけてヤング図形にすることを m 回続けるものである.（命題 6.16 を参照）

さらに上の命題の逆の操作を考えてみよう.

命題 6.14. $\mathfrak{S}_{d+m}$ の既約表現 V_ν を部分群 $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m$ へ制限したとき，$V_\lambda \boxtimes V_\mu$ の重複度は *Littewood-Ricardson rule* における $N_{\lambda\mu\nu}$ である．特に，$m=1$ で $\mu=(1)$ の場合には，いわゆる**分岐則**を得る．つまり

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+1}} V_\nu = \sum V_\lambda$$

となる．ここで和は ν に対するヤング図形から箱を一個抜いたヤング図形でとっている．特に，各 V_λ の重複度は 1 である（*multiplicity free* という）.

Proof. 上の命題の証明において，

$$\chi_{V_\lambda \circ V_\mu}(C_i) = \chi_{\mathrm{Ind} V_\lambda \boxtimes V_\mu}(C_i) = \sum_\nu N_{\lambda\mu\nu} \chi_\nu(C_i)$$

を証明した．Frobenius 相互律（系 3.70）から，

$$N_{\lambda\mu\nu} = (\chi_{\mathrm{Ind} V_\lambda \boxtimes V_\mu}, \chi_\nu)_{\mathfrak{S}_{d+m}} = (\chi_{V_\lambda \boxtimes V_\mu}, \chi_{\mathrm{Res} V_\nu})_{\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m}$$

となる．

さらに $m=1$, $\mu=(1)$ の場合には，$\mathfrak{S}_{d+1}$ の表現 V_ν を $\mathfrak{S}_d$ へ制限した $\mathrm{Res}V_\nu$ における V_λ の重複度は

$$(\chi_\lambda, \chi_{\mathrm{Res}V_\nu})_{\mathfrak{S}_d} = (\chi_{\mathrm{Ind}V_\lambda}, \chi_\nu)_{\mathfrak{S}_{d+1}} = \sum_\kappa (\chi_\kappa, \chi_\nu)_{\mathfrak{S}_{d+1}} = \begin{cases} 1 & \kappa = \nu \\ 0 & \kappa \neq \nu \end{cases}$$

となる．ここで右辺の和は λ に箱を一つ加えたものである．つまり，ν が λ に箱を一つ加えたものなら重複度 1 であり，それ以外は零となる．よって，$\mathrm{Res}V_\nu$ には ν から箱を一つ取り除いたヤング図形がそれぞれ重複度 1 で現れる． □

例 6.15. V を標準表現とする．このとき $\Lambda^s V \cong V_{(d-s,1,\cdots,1)}$ であることを証明しよう（面倒な証明を Section 4.3.5 で与えた．ここではもっと簡単な証明を与える）．d に対する帰納法で証明する．$\Lambda^s V \cong V_{(d-s,1,\cdots,1)}$ であると仮定する．また $\mathfrak{S}_{d+1}$ の標準表現を V' とする．これを $\mathfrak{S}_d$ へ制限したとき，箱を一個取り除いたヤング図形を考えればよいので，

$$\mathrm{Res}V' \cong V \oplus U$$

となる．そこで

$$\mathrm{Res}\Lambda^s V' = \Lambda^s V \oplus \Lambda^{s-1} V$$

となる．仮定から $\Lambda^s V = V_{(d-s,1,\cdots,1)}$, $\Lambda^{s-1} V = V_{(d-s-1,1,1,\cdots,1)}$ である．そこで箱を一つ取り除いて，このヤング図形ができるためには

$$\Lambda^s V' \cong V_{(d+1-s,1,\cdots,1)}$$

でなくてはならない．

6.2.2 応用２:Pieri's rule と誘導表現

命題 6.16 (Pieri's rule). 部分群 $\mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_{d+m}$ を考える．また λ を d の分割，ν を $d+m$ の分割とする．このとき $\mathrm{Ind}(V_\lambda)$ 内での V_ν の重複度は次のようになる．

1. ヤング図形 ν 内に λ が入らない場合は零．
2. ヤング図形 ν 内に λ が入る場合は，ν から λ を引いた斜めの図形を考えて，そこに行も列も増加するように 1 から m までの数を入れる方法が何通りあるか数えればよい．

Proof. $\mathfrak{S}_d \subset \mathfrak{S}_{d+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_{d+m}$ という部分群の列を考える．このとき

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+m}} V_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{d+m-1}}^{\mathfrak{S}_{d+m}} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{d+m-2}}^{\mathfrak{S}_{d+m-1}} \cdots \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+1}} V_\lambda$$

となる（Section 3.12 を参照）．よって，$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_d}^{\mathfrak{S}_{d+m}} V_\lambda$ は λ に対するヤング図形に箱を一つづつ加えていったものすべてをかんがえればよい．m 個の箱を加えてできたヤング図形が同じ形でも，箱を加えていく方法がことなれば，その数だけ重複度が存在する．以上のことから命題は容易に証明できる． □

系 6.17. 上の補題において，$d = 0$ の場合を考えれば，V_ν の次元がヤング図形 ν に対する標準盤の数に等しいことがわかる．

この系は例 6.4 で証明してある．

6.2.3 応用３:Murnaghan-Nakayama rule（指標の計算法）

次に，指標をうまく計算する方法である Murnaghan-Nakayama rule について述べる．

命題 6.18 (Murnaghan-Nakayama rule)**.** *λ を d の分割として，$g \in \mathfrak{S}_d$ が m サイクル $(1, 2, \cdots, m)$ と $h \in \mathfrak{S}_{d-m}$ の積で書けたとする:*

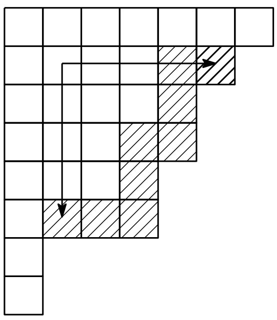
$$g = (1, 2, \cdots, m)h \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{d-m} \subset \mathfrak{S}_d.$$

このとき

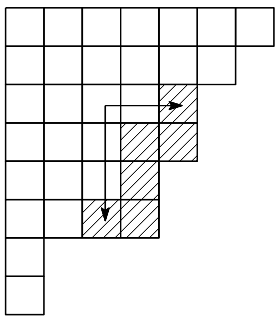
$$\chi_\lambda(g) = \sum (-1)^{r(\mu)} \chi_\mu(h)$$

*となる．ここで和は λ から長さが m の（境界上の）**skew hook** を取り去って得られる $d - m$ の分割 μ のすべてに対して和をとっている．また $r(\mu)$ は skew hook の垂直な段の数であり，**step** とよぶ．*

Skew hook の説明をしよう．分割 λ に対する（境界上の）skew hook とは，λ より小さいヤング図形を取り去ったときにできる，境界にある箱の連結領域である．**また λ の hook らと λ の skew hook らは一対一対応する**（下図）．そして skew hook の step とは，対応する hook $(k, 1, \cdots, 1)$ における 1 の数のことである．



hook length = 9, step = 4



hook length = 6, step = 3

例 6.19. 上の g に対して λ が長さ m の hook を持たないなら，$\chi_\lambda(g) = 0$ である．

例 6.20. $g = (1, \cdots, d) \in \mathfrak{S}_d$ としたとき，長さ d の skew hook を持つのは，$\lambda = (d-s, 1, \cdots, 1)$ のときのみである．そして長さ d の hook はヤング図形そのものに対応する．

$$\chi_\lambda(g) = \begin{cases} (-1)^s & \lambda = (d-s, 1, \cdots, 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる.（これはすでに Section 4.3.5 において証明した）.

さらに，上の命題を帰納的に使えば，次が成立する．

定理 6.21 (指標の計算方法). *$g \in \mathfrak{S}_d$ が $m_1, m_2, \cdots, m_p$ という長さのサイクルの積で書けたとする（もちろん異なるサイクルに共通部分はない）．このとき*

$$\chi_\lambda(g) = \sum_s (-1)^{r(s)}$$

となる．λ を長さ $m_1, \cdots, m_p$ の p 個の skew hook らへと順に分解することを s とすれば，和はそのようなすべての分解 s についてとっている．また $r(s)$ は分解 s における hook の setp 数の和である.（注意：$m_1, \cdots, m_p$ の順番を変えても同じ値を与える）

例 6.22. $\mathfrak{S}_d$ の標準表現 $V = V_{(d-1,1)}$ を考える．$g \in C_i$ とする．特に，長さ 1 のサイクルは i_1 個とする．$\lambda = (d-1, 1)$ の skew hook への分解を考えたとき，長さが 1 より大きい skew hook は第 1 行目からしかとれないので一通りしかない（さらに step 0）．残りのヤング図形は $(i_1 - 1, 1)$ となる．これを長さ 1 の skew hook へと分解する．ヤング図形 $(i_1 - 1, 1)$ に 1 から i_1 までの数を行，列が増加するように埋める方法を数えればよい．それは $i_1 - 1$ 通りである．よって $\chi_V(g) = i_1 - 1$ となる．

次に，$\Lambda^2 V = V_{(d-2,1,1)}$ について考える．$g \in C_i$（$i = (i_1, i_2, \cdots)$）とする．まず長さが 2 より大きい skew hook を順に取り除く方法は一通りであり，step 0 である．残りは $(i_1 + i_2 - 2, 1, 1)$ である．まず，ここから長さ 2 の skew hook を除く方法を考える．

上の図のように，左のような取り除き方は i_2 通りであり，左のような取り除き方は 1 通りである．さらに左図の場合には setp が 1 であり，ここから長さ 1 の skew hook を除く方法は 1 通りしかない．また右図の場合は setp 0 であり，ここから長さ 1 の skew hook を取り除く方法は $\binom{i_1-1}{2}$ である．よって，

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \binom{i_1 - 1}{2} - i_2$$

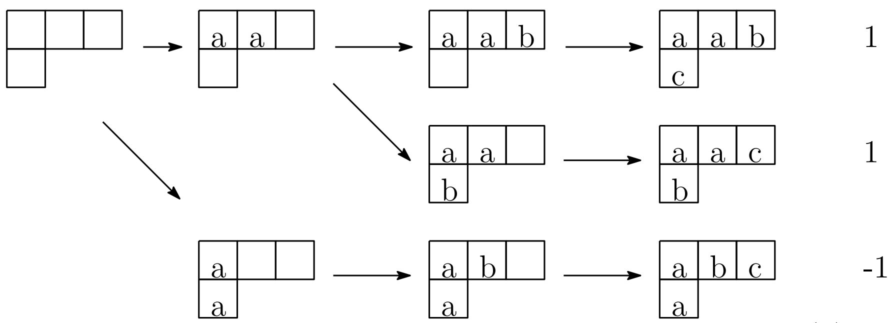
となる．同様にして，

$$\chi_{\Lambda^3 V}(g) = \binom{i_1 - 1}{3} - (i_1 - 1)i_2 + i_3,$$

と続けることが可能である（see section 4.2 ）．一般の場合にどうなるかは Frobenius 「Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe」, Sitz. König Preuss Akad. Wissen .(1900), 526-534;Gesammelte Abhandliungen III, Spirnger-Verlag, Heiderlberg, (1968), 148-166 に載ってるそうだけど見てない．

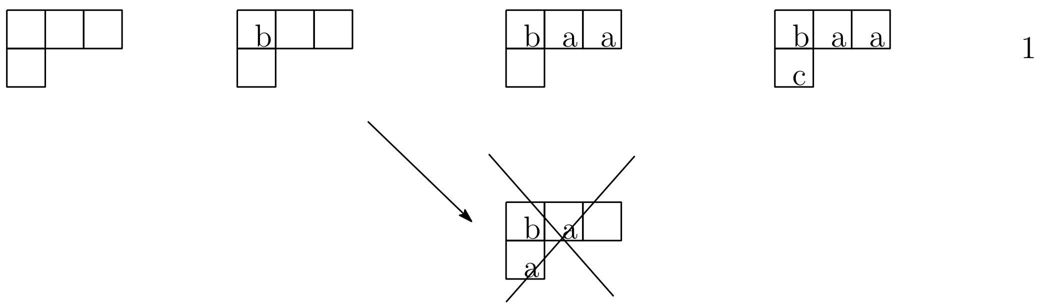
例 6.23. もう少し具体的な例の場合についてみていこう．

まず $\lambda = (3,1)$ として，$g = (1)(2)(3,4)$ の場合を考える．つまり $m_1 = m_2 = 1, m_3 = 2$ の場合である．skew hook に順に分解していく数を数えるのだが，分解の順序を逆にしてもよいので，つぎのようにすればよい．文字として a, a, b, c を考えて，下のように埋めていけばよい．ただし，埋めたときには skew hook の形でなければならない．



$\chi(g) = 1$

上の図の一番下の図は step の長さが 1 なので $(-1)^1 = -1$ となっている．よって，$\chi(g) = 1 + 1 + (-1) = 1$ となる．順番はどうでもよいので b, a, a, c で埋めた場合には次のようになる.（×印をつけたのは， skew hook になっていないので，駄目）.



別の例として，$\lambda = (8,2)$, $g = (1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10)$ の場合と，$\lambda = (20,2,1)$ で $g = (1)(2,\cdots,9)(10,\cdots,20)$（$m_1 = 1, m_2 = 8, m_3 = 9$ の場合）をあげておいた．

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a & a & a & a & a & & & \\ \hline & & \multicolumn{6}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

どちらの場合も b を skew hook で入れられない．

よって，$\chi(g) = 0$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a & a & a & a & & & & \\ \hline a & & \multicolumn{6}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & b & b & b \\ \hline b & b & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} b & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|c|}\hline b & c & c \\ \hline\end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|}\hline c & c \\ \hline\end{array}$$

上の一通りしかない．$\chi(g) = (-1)^2 = 1$

さて，Murnaghan-Nakayama rule の証明を与えよう．

補題 6.24. シューア多項式 S_μ と冪和対称式 p_m を考える．このとき，

$$S_\mu p_m = \sum_\lambda (-1)^{r(\lambda-\mu)} S_\lambda$$

ここで，$\lambda - \mu$ が長さ m の境界上の *skew hook* となるような λ に対して和をとっている．

Proof. まず，3 変数の場合に考えると，

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x_1^{\mu_1+2} & x_1^{\mu_2+1} & x_1^{\mu_3} \\ x_2^{\mu_1+2} & x_2^{\mu_2+1} & x_2^{\mu_3} \\ x_3^{\mu_1+2} & x_3^{\mu_2+1} & x_3^{\mu_3} \end{vmatrix} (x_1^m + x_2^m + x_3^m) \\
=&(x_1^{\mu_1+2}x_2^{\mu_2+1}x_3^{\mu_3} + x_1^{\mu_3}x_2^{\mu_1+2}x_3^{\mu_2+1} + x_1^{\mu_2+1}x_2^{\mu_3}x_3^{\mu_1+2} \\
&\quad - x_1^{\mu_3}x_2^{\mu_2+1}x_3^{\mu_1+2} - x_1^{\mu_2+1}x_2^{\mu_1+2}x_3^{\mu_3} - x_1^{\mu_1+2}x_2^{\mu_3}x_3^{\mu_2+1})(x_1^m + x_2^m + x_3^m) \\
=&(x_1^{\mu_1+2+m}x_2^{\mu_2+1}x_3^{\mu_3} + x_1^{\mu_3+m}x_2^{\mu_1+2}x_3^{\mu_2+1} + x_1^{\mu_2+1+m}x_2^{\mu_3}x_3^{\mu_1+2} \\
&\quad - x_1^{\mu_3+m}x_2^{\mu_2+1}x_3^{\mu_1+2} - x_1^{\mu_2+1+m}x_2^{\mu_1+2}x_3^{\mu_3} - x_1^{\mu_1+2+m}x_2^{\mu_3}x_3^{\mu_2+1}) + (x_1 \leftrightarrow x_2) + (x_1 \leftrightarrow x_3) \\
=&(x_1^{\mu_1+2+m}x_2^{\mu_2+1}x_3^{\mu_3} + x_1^{\mu_3}x_2^{\mu_1+2+m}x_3^{\mu_2+1} + x_1^{\mu_2+1}x_2^{\mu_3}x_3^{\mu_1+2+m} \\
&\quad - x_1^{\mu_3}x_2^{\mu_2+1}x_3^{\mu_1+2+m} - x_1^{\mu_2+1}x_2^{\mu_1+2+m}x_3^{\mu_3} - x_1^{\mu_1+2}x_2^{\mu_3}x_3^{\mu_2+1+m}) + \cdots \\
=&\begin{vmatrix} x_1^{\mu_1+2+m} & x_1^{\mu_2+1} & x_1^{\mu_3} \\ x_2^{\mu_1+2+m} & x_2^{\mu_2+1} & x_2^{\mu_3} \\ x_3^{\mu_1+2+m} & x_3^{\mu_2+1} & x_3^{\mu_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1+2} & x_1^{\mu_2+1+m} & x_1^{\mu_3} \\ x_2^{\mu_1+2} & x_2^{\mu_2+1+m} & x_2^{\mu_3} \\ x_3^{\mu_1+2} & x_3^{\mu_2+1+m} & x_3^{\mu_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1+2} & x_1^{\mu_2+1} & x_1^{\mu_3+m} \\ x_2^{\mu_1+2} & x_2^{\mu_2+1} & x_2^{\mu_3+m} \\ x_3^{\mu_1+2} & x_3^{\mu_2+1} & x_3^{\mu_3+m} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

となる．この式が一般に成立することを証明する．$\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ を d の分割

とする．このとき

$$
\begin{aligned}
&|x_j^{\mu_i+k-i}|p_m = |x_j^{\mu_i+k-i}|(x_1^m+\cdots+x_k^m)\\
&=\sum_{q=1}^{k}|x_j^{\mu_i+k-i+m\delta_{qj}}|\\
&=\sum_{q=1}^{k}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\mathrm{sgn}(\sigma)x_1^{\mu_{\sigma(1)}+k-\sigma(1)+m\delta_{q1}}\cdots x_p^{\mu_{\sigma(p)}+k-\sigma(p)+m\delta_{qp}}\cdots x_k^{\mu_{\sigma(k)}+k-\sigma(k)+m\delta_{qk}}\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\sum_{q=1}^{k}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^{\mu_1+k-1+m\delta_{q\sigma(1)}}\cdots x_{\sigma(p)}^{\mu_p+k-p+m\delta_{q\sigma(p)}}\cdots x_{\sigma(k)}^{\mu_k+k-k+m\delta_{q\sigma(k)}}\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\sum_{q=1}^{k}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^{\mu_1+k-1+m\delta_{\sigma^{-1}(q)1}}\cdots x_{\sigma(p)}^{\mu_p+k-p+m\delta_{\sigma^{-1}(q)p}}\cdots x_{\sigma(k)}^{\mu_k+k-k+m\delta_{\sigma^{-1}(q)k}}
\end{aligned}
$$

となるが q が $1,\cdots,k$ と動くとき，$\sigma^{-1}(q)$ も $1,\cdots,k$ を動くので，

$$
=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\sum_{s=1}^{k}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{\sigma(1)}^{\mu_1+k-1+m\delta_{s1}}\cdots x_{\sigma(p)}^{\mu_p+k-p+m\delta_{sp}}\cdots x_{\sigma(k)}^{\mu_k+k-k+m\delta_{sk}}=\sum_{s=1}^{k}|x_j^{\mu_i+k-i+m\delta_{si}}|
$$

となる．

さて，$|x_j^{\mu_i+k-i+m\delta_{qi}}|$ において，列が一致するとする．つまり，ある p が存在して $\mu_p+k-p=\mu_q+k-q+m$ となる場合を考えると $|x_j^{\mu_i+k-i+m\delta_{qi}}|$ はゼロになる．そこで，$p\leq q$ に対して

$$
\mu_{p-1}+k-p+1>\mu_q+k-q+m>\mu_p+k-p \quad (\iff \mu_{p-1}+1>\mu_q-(q-p)+m>\mu_p)
$$

となる場合のみ考えればよい．このとき列を取り替えて，

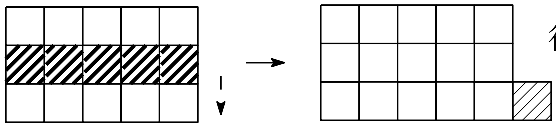
$$
|x_j^{\mu_i+k-i+m\delta_{qi}}|=(-1)^{q-p}|x_j^{\lambda_i+k-i}|
$$

となる．ここで，

$$
\lambda=(\mu_1,\cdots,\mu_{p-1},\mu_q+p-q+m,\mu_p+1,\cdots,\mu_{q-1}+1,\mu_{q+1},\cdots,\mu_k)
$$

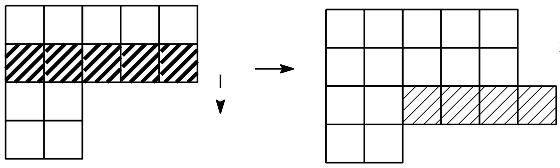
である．これがどのようなヤング図形に対応しているかを見てみる．上の λ の第 p 成分から q 成分目までが μ と異なっている．第 s 成分（$p+1\leq s\leq q$）が $\mu_{s-1}+1$ になっている．これは μ において，$s-1$ 行目の箱を下の行へ移して，箱を一つ足すことになっている．そこで，ヤング図形 μ に対して，下の図のような操作を行えば λ になる．ただし．加える箱の数はあわせて m 個である．

case 1



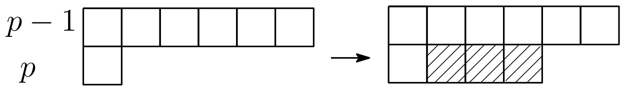
行をひとつ落として，箱を一個たす.

case 2



行をひとつ落として，箱を一個たす.

第 p 成分.



第 p 成分のところは左図.

このように $\lambda-\mu$ は（境界上）の長さ m の skew hook である.
よって,

$$S_\mu p_m = \sum_\lambda (-1)^{r(\lambda-\mu)} S_\lambda$$

になる．ここで和は $\lambda-\mu$ が長さ m の skew hook となるものでとっている． □

この補題を使って Murnaghan-Nakayama rule を証明しよう．$g=(1,\cdots,m)h\in\mathfrak{S}_d$ として，$\chi_\lambda(g)$ を計算する．h の共役類を C_j とすれば,

$$\chi_\lambda(g) = \langle S_\lambda, p_m P_j\rangle = \langle S_\lambda, p_m \sum_\mu \chi_\mu(C_j) S_\mu\rangle = \sum_\mu \chi_\mu(C_j)\langle S_\lambda, p_m S_\mu\rangle = \sum_\mu{}' \chi_\mu(C_j)(-1)^{r(\lambda-\mu)}$$

となる．ここで $\sum_\mu{}'$ は，$\lambda-\mu$ が長さ m の skew hook となる μ に対して和をとっていることを意味する．以上で Murnaghan-Nakayama rule が証明された.

6.2.4 応用４

d の分割 λ に対して，$a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ を定義し，$U_\lambda=\mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda$ について議論した．今度は $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d b_\lambda$ について考えよう．b_λ の定義を思い出すと,

$$b_\lambda = \sum_{g\in Q} \mathrm{sgn}(g) g$$

であり，Q は λ に対するヤング盤の各列を保存する部分群である．そこで λ と共役な分割 λ' を考えて，この λ' に対するヤング部分群

$$\mathfrak{S}_{\lambda'} = \mathfrak{S}_{\lambda'_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda'_r}\subset\mathfrak{S}_d$$

とすれば，$Q = \mathfrak{S}_{\lambda'}$ である．さらに，b_λ の定義からこの $\mathfrak{S}_{\lambda'}$ は b_λ に交代表現として作用する．よって，

$$U'_\lambda := \mathbb{C}\mathfrak{S}_d b_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d \otimes_{\mathfrak{S}_{\lambda'}} \mathbb{C}b_\lambda = \mathrm{Ind} U' \boxtimes \cdots \boxtimes U'$$

となる．この U'_λ を既約分解すれば，

$$U'_\lambda = \sum_\mu K_{\mu'\lambda'} V_\mu$$

となる．

Proof. $U'_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d b_\lambda$ の指標 ψ'_λ を考える．U_λ のときと同様にすれば，

$$\begin{aligned}\psi'_\lambda(C_i) = &\frac{d!}{\lambda'_1!\cdots\lambda'_l!}\frac{z(i)}{d!}\sum(-1)^{\sum_{p=1}^{l}\sum_{q=1}^{d}(q-1)r_{pq}}\prod_{p=1}^{l}\frac{\lambda'_p!}{1^{r_{p1}}r_{p1}!\cdots d^{r_{pd}}r_{pd}!}\\ =&(-1)^{d-\sum_{q=1}^{d} i_q}\sum\prod_{q=1}^{d}\frac{i_q!}{r_{1q}!\cdots r_{lq}!}\end{aligned}$$

となる．ここで和は $\{r_{pq} | 1 \leq p \leq l, 1 \leq q \leq d\} \subset (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{ld}$ で，

$$i_q = r_{1q} + \cdots + r_{lq}, \quad \lambda'_p = r_{p1} + 2r_{p2} + \cdots dr_{pd}$$

を満たすものの和でとっている．さて，対称式上の involution Ω（区別するためここでは大文字を使う）を使えば，

$$\Omega(P^i) = \Omega(p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_d^{i_d}) = (-1)^{\sum qi_q - \sum i_q}P^i = (-1)^{d-\sum i_q}P^i$$

であるので，$\psi'_\lambda(C_i) = [\Omega(P^i)]_{\lambda'}$ となる．また補題 5.39 を使えば，

$$[\Omega(P^i)]_{\lambda'} = \psi_{\lambda'}(\Omega(P^i)) = \omega_{\lambda'}(\Omega(P^i)) + \sum_{\mu > \lambda'} K_{\mu\lambda'}\omega_\mu(\Omega(P^i))$$

となる．また例 6.6 のようにして，

$$\Omega(P^i) = \sum \omega_\lambda(i)S_{\lambda'} = \sum \omega_{\lambda'}(i)S_\lambda$$

となる．よって，$\omega_\lambda(S_\mu) = \langle S_\mu, S_\lambda\rangle = \delta_{\mu\lambda}$ を使えば，

$$\omega_\mu(\Omega(P^i)) = \omega_{\mu'}(i)$$

となるので，

$$[\Omega(P^i)]_{\lambda'} = \omega_\lambda(i) + \sum_{\mu > \lambda'} K_{\mu\lambda'}\omega_{\mu'}(i) = \sum_{\mu' \geq \lambda'} K_{\mu'\lambda'}\chi_\mu(C_i) = \sum_\mu K_{\mu'\lambda'}\chi_\mu(C_i)$$

を得る．よって，$U'_\lambda = \sum_\mu K_{\mu'\lambda'}V_\mu$ となる． □

さて，上で証明したことを用いれば，**既約表現 V_λ は $U_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda$ および $U'_\lambda = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d b_\lambda$ の両方に現れる唯一の表現であり，重複度 1 で現れる．**

Proof. $U_\lambda = \sum K_{\mu\lambda} V_\mu$ 及び $U'_\lambda = \sum_\mu K_{\mu'\lambda'} V_\mu$ を使えば，V_λ が U_λ, U'_λ の両方に重複度 1 で現れることは明らかである．そこで U_λ, U'_λ の両方に現れる既約表現は V_λ のみであることを証明しよう．補題 5.27 から，$K_{\mu\lambda} > 0$ となるための必要十分条件は

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$$

がすべての i に対して成立することである．そこで U_λ, U'_λ の両方に現れるためには μ が $K_{\mu\lambda} > 0$, $K_{\mu'\lambda'} > 0$ をみたす必要がある．ちょっと考えれば，上の条件を使えば，そのようなものは $\mu = \lambda$ しかないことがわかる． □

補足 6.25. 一般に $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d c_\lambda \neq \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda \cap \mathbb{C}\mathfrak{S}_d b_\lambda$ であることに注意．実際，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_d c_\lambda \subset \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\lambda$ とは限らない．

6.2.5 テンソル積の既約分解

対称群 $\mathfrak{S}_d$ の既約表現 V_λ と V_μ を考える．このとき

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \sum_\nu C_{\lambda\mu\nu} V_\nu$$

という既約分解について考えよう．この $C_{\lambda\mu\nu}$ を求めるのが目的となるが方法はいろいろある．ここでは一つの方法を紹介する．その他の方法や d が小さい場合の分解の表は，G. James and A Kerber, The Representation Theory of the Symmetric group, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications vol 16 (1981) などを参照．

V_λ, V_μ, V_ν の指標を χ_λ, χ_μ, χ_ν とする．このとき

$$C_{\lambda\mu\nu} = (\chi_\lambda \chi_\mu, \chi_\nu)$$

となる．この値を計算すればよい．

共役類 C_i 上で 1 で他で零となる関数を ξ_i と書けば，$\chi_\lambda = \sum_i \omega_\lambda(i)\xi_i$ とかける．

$$\chi_\lambda \chi_\mu = \sum_{i,j} \omega_\lambda(i)\omega_\mu(j)\xi_i\xi_j = \sum_i \omega_\lambda(i)\omega_\mu(i)\xi_i$$

となる．そこで，類関数上の内積の定義に従えば，

$$(\chi_\lambda\chi_\mu, \chi_\nu) = \frac{1}{d!}\sum_i \frac{d!}{z(i)}\omega_\lambda(i)\omega_\mu(i)\omega_\nu(i)$$

となる．以上から，

命題 6.26. テンソル積表現の既約分解 $V_\lambda \otimes V_\nu = \sum C_{\lambda\mu\nu} V_\nu$ における，V_ν の重複度 $C_{\lambda\mu\nu}$ は

$$C_{\lambda\mu\nu} = \sum_i \frac{1}{z(i)} \omega_\lambda(i)\omega_\mu(i)\omega_\nu(i)$$

で与えられる．ここで和は $\sum \alpha i_\alpha = d$ をみたすすべての $i = (i_1, \cdots, i_d)$ でとっている．また $z(i) = 1^{i_1} i_1! 2^{i_2} i_2! \cdots d^{i_d} d!$ であり，$\omega_\lambda(i) = \chi_\lambda(C_i)$ である．
特に，上の係数 $C_{\lambda\mu\nu}$ は λ, μ, ν の順番によらない．つまり

$$C_{\lambda\mu\nu} = C_{\lambda\nu\mu} = C_{\mu\lambda\nu} = C_{\mu\nu\lambda} = C_{\nu\lambda\mu} = C_{\nu\mu\lambda}$$

となる．

系 6.27. *1.* $V_\lambda \otimes V_\mu$ の中に自明表現が含まれるのは $\lambda = \mu$ のときのみである．またこのときは重複度 1 である．つまり

$$C_{\lambda\mu(d)} = \begin{cases} 1 & \textit{if } \lambda = \mu \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

2. $V_\lambda \otimes V_\mu$ の中に交代表現が含まれるのは $\lambda' = \mu$ のときのみである．また，このときは重複度 1 である．つまり

$$C_{\lambda\mu(1,\cdots,1)} = \begin{cases} 1 & \textit{if } \lambda' = \mu \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Proof. $C_{\lambda\mu\nu}$ の $\lambda\mu\nu$ の順はなんでもよいのであった．そこで $V_\lambda \otimes V_{(d)}$ を考える．これは V_λ である．つまり

$$C_{\lambda\mu(d)} = C_{\lambda(d)\mu} = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda = \mu \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる．また $V_\lambda \otimes V_{(1,\cdots,1)} \cong V_{\lambda'}$ であるので二番目の主張も従がう． □

補足 6.28. $V_\lambda \otimes V_\mu$ の代わりに $V_\lambda \otimes U_\mu$ を考える．ここで $U_\mu = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d a_\mu$ である．ヤング部分群として $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_k}$ を考えれば，$V_\lambda \otimes U_\mu \cong \mathrm{Ind}(\mathrm{Res} V_\lambda)$ である（例 3.68 を使えばよい）．ヤング部分群に対する Ind および Res は，Section 6.2.1 で述べたように Littlewood-Richardson rule を用いて計算できる．さらに $U_\mu = V_\mu \oplus \oplus_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$ を使うことにより $V_\lambda \otimes V_\mu$ の既約分解を帰納的に行うことが可能である．

6.3 対称群の表現環と対称式の関係

対称群 $\mathfrak{S}_d$ の表現環を $R_d = R(\mathfrak{S}_d)$ と書く．さらに $R = \oplus_{d=0}^{\infty} R_d$ とする．この表現環 R にホップ代数の構造を入れたい．

6.3.1 Hopf 代数

余積や Hopf 代数について述べておこう．わざわざ代数の定義を述べる必要もないけど，念のため．

定義 6.1 (代数). $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間 A に対して，線形写像

$$m : A \otimes A \to A, \quad u : \mathbb{C} \to A$$

が次をの可換図式をみたすとき，(A, m, u) を**代数**とよぶ．

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes A \otimes \arrow[r, "u\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes \mathbb{C} \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[d, "\cong"] \\
A \arrow[r, "\cong"] & A & A \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

上の図式が可換であることをわかりやすく書けば，$m(a \otimes b) = ab$, $u(1) = 1_A \in A$ として，

$$(ab)c = a(bc), \quad 1_A \cdot a = a = a \cdot 1_A$$

となる．

余積とは上の積をすべて逆向きにしたものである．

定義 6.2 (余代数). $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間 C に対して，線形写像

$$\Delta : C \to C \otimes C, \quad \epsilon : C \to \mathbb{C}$$

が次をの可換図式をみたすとき，(C, Δ, ϵ) を**余代数**とよぶ．Δ を**余積**とよぶ．

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta\otimes \mathrm{id}"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \otimes C \otimes & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes \epsilon"] & AC \otimes \mathbb{C} \\
C \arrow[u, "\cong"] & C \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"'] & C \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

これをわかりやすくかけば，$c \in C$ に対して $\Delta(c) = \sum c_i' \otimes c_i''$ とすれば，

$$\sum_i \Delta(c_i') \otimes c_i'' = \sum c_i' \otimes \Delta(c_i''), \quad \sum \epsilon(c_i')c_i'' = c = \sum c_i'\epsilon(c_i'')$$

となる．さらに，opposite な余積 Δ' を，

$$\Delta = \tau \circ \Delta, \quad \text{where } \tau(c \otimes c') = c' \otimes c$$

とする．このとき (C, Δ, ϵ) が余代数なら (C, Δ', ϵ) も余代数になる．また $\Delta = \Delta'$ のとき**余可換**とよぶ．

例 6.29. A, B が代数なら $A \otimes B$ は代数となる．また C, D が余代数なら $C \otimes D$ は余代数になる．

定義 6.3 (双代数)**.** ベクトル空間 B が代数 (B, m, u) の構造と余代数 (B, Δ, ϵ) の構造をもち，$\Delta : B \to B \otimes B$, $\epsilon : B \to \mathbb{C}$ が代数準同形のとき，B を**双代数**という．（ここで $\Delta : B \to B \otimes B$, $\epsilon : B \to \mathbb{C}$ が代数準同形であることと $m : B \otimes B \to B$, $u : \mathbb{C} \to B$ が余代数準同形であることは同値であることに注意．余代数準同形とは余代数 C, D に対して，$f \in \mathrm{Hom}(C, D)$ が $\Delta(f(c)) = (f \otimes f)\Delta(c)$, $\epsilon(f(c)) = \epsilon(c)$ を満たすことである）．

定義 6.4 (Hopf 代数)**.** $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$ を双代数とする．線形写像 $S : H \to H$ が

$$m(S \otimes \mathrm{id})\Delta = u \circ \epsilon = m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta : \quad H \to H$$

を満たすとき S を**対合**とよぶ．わかりやすくかけば，$\Delta(a) = \sum a_i' \otimes a_i''$ とすれば，

$$\sum S(a_i')a_i'' = \epsilon(a)1_H = \sum a_i' S(a_i'')$$

である．この対合をもつ双代数を**ホップ代数**と呼ぶ．

補足 6.30. 対合は存在すれば唯一つであり，代数準同形かつ余代数準同形である．また H が可換，余可換なら $S^2 = \mathrm{id}$ となる．詳しいことは，ホップ代数の教科書をみよ．

例 6.31. G を有限群として G 上の関数空間 $B = \mathbb{C}(G)$ を考える．ベクトル空間として $B \otimes B$ は $\mathbb{C}(G \times G)$ と同一視できる．このとき，

$$ff'(x) = f'(x)f(x)$$

として積をいれて $1_B(x) = 1$（$\forall x \in G$）を単位元とすれば可換代数になる．さらに

$$\Delta(f)(x_1, x_2) = f(x_1 x_2), \quad \epsilon(f) = f(e)$$

とすれば余代数になる．実際，余結合律は G 内での結合律に対応し，余単位律は e が G の単位元であることに対応する．さらに双代数になることもすぐにわかる．また

$$S : H \to H \quad (Sf)(x) = f(x^{-1})$$

とすれば対合になる．実際，

$$f(x^{-1} \cdot x) = f(e) = f(x \cdot x^{-1})$$

となる．

例 6.32. $\mathfrak{g}$ をリー環として，展開環 $U(\mathfrak{g})$ を考える．これは代数である．さらに余積および余単位射を

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \epsilon(X) = 0, \quad X \in \mathfrak{g}$$

を代数準同形 $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$, $\epsilon : U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ へと拡張したものとし定義する．よって余（可換）代数になる．さらに双代数になることもわかる．また $S(X) \to -X$ を $X \in \mathfrak{g}$ に定義して，$S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ が反準同形になるように拡張する．これは対合であり，$U(\mathfrak{g})$ はホップ代数になる．

V_1, V_2 を $\mathfrak{g}$ の表現すれば，余積を使って，テンソル積表現

$$U(\mathfrak{g}) \ni X \mapsto (\pi_1 \otimes \pi_2)\Delta(X) = \pi_1(X) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_2(X) \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$$

を定義できる．また S を使って，双対表現

$$U(\mathfrak{g}) \ni X \mapsto {}^t\pi \circ S(X) = -{}^t\pi(X) \in \mathrm{End}(V^*)$$

を定義できる．

6.3.2 対称式空間の Hopf 代数構造

例 6.33. Section 5.4 での $\mathbb{Z}$ 係数の対称式の全体の空間 Λ を考える．Λ は**可換 graded 代数**であることは明らか．代数の定義に従って書けば次のよう．$P, Q \in \Lambda$ に対して，$P(x)Q(y)$ を $P \otimes Q \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ とみなす．このように見たとき積は $P(x) \otimes Q(y) \mapsto P(x)Q(x)$ となる．

次に，Λ に余積の構造を入れよう．$P(x) \in \Lambda$ に対して，$P(x, y) = P(x_1, x_2, \cdots, y_1, y_2, \cdots)$ とすれば，これは x, y に対して対称式であるので，$\Lambda \otimes \Lambda$ の元とみなせる．つまり

$$(\Delta P)(x, y) = P(x, y)$$

とする．さらに余単位射 $\epsilon : \Lambda \to \mathbb{Z}$ を定義する．$\Lambda = \oplus \Lambda^n$ と次数付けしたとき，$n \geq 1$ なら $\epsilon(P) = 0$ として，$a \in \Lambda^0 = \mathbb{Z}$ に対しては $\epsilon(a) = a$ として余単位射を定義する．言い換えれば $\epsilon : P(x) \to P(0) \in \mathbb{Z}$ である．このようにして Λ は**余可換代数**になる．

Proof. $(\Delta P)(x,y)=P(x,y)$ に対して

$$((\Delta\otimes\mathrm{id})P)(x,y,z)=P(x,z,y)=P(x,y,z)=((\mathrm{id}\otimes\Delta)P)(x,y,z)$$

であるので余結合律をみたす．また

$$((\mathrm{id}\otimes\epsilon)P)(x,y)=P(x,0)=P(0,y)=((\epsilon\otimes\mathrm{id})P)(x,y)$$

である．余可換であることは明らかである． □

さらに，対合を Section 5.4 で与えた ω を使って $S:=(-1)^n\omega$ と定義すれば，この Λ は **Hopf 代数**である．

Proof. まず双代数であることをみる．$\Delta(PQ)=\Delta(P)\Delta(Q)$ および $\epsilon(PQ)=\epsilon(P)\epsilon(Q)$ を確かめればよいが，これは明らかである．また ω が対合であることを確かめよう．まず，Λ の基底である $\{h_k\}$ について余積は

$$\Delta h_n=\sum_{k+l=n}h_k\otimes h_l$$

となる（後述）．そこで，対合の定義を確かめよう．

$$\begin{aligned}m(\mathrm{id}\otimes\omega)\Delta h_n&=\sum_{k+l=n}(-1)^l h_k e_l\\ m(\omega\otimes\mathrm{id})\Delta h_n&=\sum_{k+l=n}(-1)^k e_k h_l\\ u\circ\epsilon(h_n)&=0\end{aligned}$$

となる．$E(-t)H(t)=0$ を使えば，これらはすべて一致する． □

さて，上の証明において $\Delta h_n=\sum_{k+l=n}h_k\otimes h_l$ を使ったが，このことを証明しておこう．実は次が成立する．

補題 6.34. Λ の代数的基底に対して余積は次のようになる．(p_d は $\mathbb{Q}$ 上の基底）．

$$\Delta(h_n)=\sum_{k+l=n}h_k\otimes h_l,\quad \Delta e_n=\sum_{k+l=n}e_k\otimes e_l,\quad \Delta(p_n)=p_n\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes p_n.$$

Proof. 冪和対称式については明らかである．実際，

$$p_n(x,y)=x_1^n+x_2^n+\cdots+y_1^n+y_2^n=p_n\otimes\mathrm{id}+\mathrm{id}\otimes p_n$$

となる．次に完全対称式についてみていくと，

$$H(t)(x,y)=\prod\frac{1}{1-x_it}\prod\frac{1}{1-y_it}=\sum h_k(x)t^k\sum h_l(y)t^l=\sum_{k+l=n}h_k(x)h_l(y)t^n$$

となることから従う．e_n に対しても同様（または ω をあてればよい） □

また，シューア多項式に対しては，(5.9) より，

補題 6.35. S_λ に Δ をあてると，

$$\Delta(S_\lambda) = \sum_{\mu \subset \lambda} S_{\lambda/\mu} \otimes S_\mu$$

となる．

さて，話をもとにもどそう．対称群 $\mathfrak{S}_d$ の表現環を $R_d = R(\mathfrak{S}_d)$ と書き，$R = \oplus_{d=0}^{\infty} R_d$ とする（$R_0 = \mathbb{Z}$）．まず，代数としての積であるが普通のテンソル積ではなく，$V_\lambda \circ V_\mu = \mathrm{Ind} V_\lambda \boxtimes V_\mu \cong V_\mu \circ V_\lambda$ を使う．つまり

$$R_n \otimes R_m \ni V_\lambda \otimes V_\mu \mapsto V_\lambda \circ V_\mu = \sum N_{\lambda\mu\nu} V_\nu \in R_{n+m}$$

という積を定義する（結合律などを確かめよ．また $u(1) = 1_R$ は $1_R \in \mathbb{Z} = R_0$ としている）．そこで**表現環 R は次数つき可換代数**である．

例 6.36. $\mathfrak{S}_n$ の自明表現を H_n とかけば，

$$H_{\lambda_1} \circ H_{\lambda_2} \circ \cdots \circ H_{\lambda_k} = U_\lambda = V_\lambda + \sum K_{\mu\lambda} V_\mu$$

である（次数は $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ となる）．

また Section 6.2.1 で述べたことから，既約表現 V_λ は

$$V_\lambda = |H_{\lambda_i + j - 1}| = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\tau) H_{\lambda_1 + \tau(1) - 1} \circ H_{\lambda_2 + \tau(2) - 2} \circ \cdots \circ H_{\lambda_k + \tau(k) - k}$$

とかける．特に $\{H_i\}_i$ が R の代数的な生成元となる．また $H_\lambda := U_\lambda = V_\lambda + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$ という表示から $\{H_i\}_i$ が代数的な基底になることもわかる．実際，$\sum a_\lambda H_\lambda = 0$ であるとする．次数で分けて考えればよいので d 次とする．このとき $\sum a_\lambda U_\lambda = 0$ となるが辞書式順序の下からの帰納法により，$\{V_\lambda\}_\lambda$ が独立であることを考えれば $a_\lambda = 0$ を得る．よって，代数として，

$$R \cong \mathbb{Z}[H_1, H_2, \cdots]$$

となる．さらに例 6.33 における**対称式の空間 Λ と表現環 R は代数として同型**になる．

Proof. H_i に h_i を対応させればよい． □

この対応 $R \cong \Lambda$ は次のような対応になる．

$$\begin{aligned} &H_i \mapsto h_i \\ &H'_i \mapsto e_i \\ &U_\lambda \mapsto H_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k} \\ &U'_\lambda \mapsto E_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} \cdots e_{\lambda'_l} \\ &V_\lambda \mapsto S_\lambda \end{aligned}$$

ここで H_i' は一次元交代表現である．

次に余積を導入しよう．Λ において $\Delta S_\lambda = \sum_\mu S_{\lambda/\mu} \otimes S_\mu = \sum_{\mu\nu} N_{\nu\mu\lambda} S_\nu \otimes S_\mu$ となる．この余積に対応するようにしたい．部分群 $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+m}$ に対する制限写像

$$\mathrm{Res} : R_{n+m} \to R_n \otimes R_m \subset R \otimes R$$

を思い出す．これを使って，余積 $\delta : R \to R \otimes R$ を次のように定義する．$V \in R_n$ に対して

$$\delta(V) := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}}(V)$$

とする．この $\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}}(V)$ は $\sum a_{\lambda\mu} V_\lambda \boxtimes V_\mu$ としてかける．そして $R(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n) \cong R_n \otimes R_m$ であるので，$\delta(V) \in R \otimes R$ となる．

具体的にいえば，命題 6.14 を使うと，

$$\delta(V_\lambda) = \sum_{\mu,\nu} N_{\mu\nu\lambda} V_\mu \otimes V_\nu$$

である．また，$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} H_n = H_k \boxtimes H_{n-k}$ であるので，

$$\delta(H_n) = H_n \otimes 1 + H_{n-1} \otimes H_1 + \cdots + 1 \otimes H_n$$

となる．このように定義した $\delta : R \to R \otimes R$ が余結合律をみたすことは，Λ における余積が余結合律を満たすことから明らかである．余単位射や対合も Λ に対応して作ればよい．以上から，

定理 6.37. **表現環 R と対称式の空間 Λ は *Hopf* 代数として同型**である．また Λ 上の ω は R 上では一次元交代表現をテンソルすることに対応する．さらに R, Λ に入る内積に関して等長同型となる．ここで R に入る内積は $(V_\lambda, V_\mu) = (\chi_\lambda, \chi_\mu)$ で定義する．

Proof. 等長同型になることは $\langle S_\lambda, S_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ となることから明らかである．また $\omega(S_\lambda) = S_{\lambda'}$ 及び $V_{\lambda'} = V_\lambda \otimes U'$ であることから，ω は交代表現をテンソルすることに対応する． □

R には，表現をテンソルするという積が定義できた．つまり，Section 6.2.5 における $V_\lambda \otimes V_\mu = \sum C_{\lambda\mu\nu} V_\nu$ のことである．この積が Λ 上でどうなるかを見ていこう．

命題 6.38. R でのテンソル積を Λ 上で $P * Q$ と書くことにする．このとき，

1.

$$S_\lambda * S_\mu = \sum C_{\lambda\mu\nu} S_\nu, \quad P^i * P^j = \delta_{ij} z(i) P^i.$$

2.

$$\langle P,Q\rangle=(P*Q)(1,0,\cdots,0).$$

3. 変数として $\{x_iy_j\}_{i,j}$ を変数とする多項式を $S_\lambda(xy)$ とかく．このとき

$$S_\lambda(xy)=\sum C_{\mu\nu\lambda}S_\mu(x)S_\nu(y)$$

が成立する．

Proof. まず，三番目の主張を証明する．x_iy_j を変数として $p_d(xy)$ を考えると，

$$p_d(x)p_d(y)=(x_1^d+x_2^d+\cdots)(y_1^d+y_2^d+\cdots)=((x_1y_1)^d+(x_1y_2)^d+\cdots)=p_d(xy)$$

となる．また $P^i=\sum\omega_\lambda(i)S_\lambda=\sum\chi_\lambda(C_i)S_\lambda$ であるので，

$$\sum_\lambda\chi_\lambda(C_i)S_\lambda(xy)=P^i(xy)=P^i(x)P^i(y)=\sum\chi_\mu(C_i)\chi_\nu(C_i)S_\mu(x)S_\nu(y)$$
$$=\sum C_{\mu\nu\lambda}\chi_\lambda(C_i)S_\mu(x)S_\nu(y)$$

となる．指標の独立性により，

$$S_\lambda(xy)=\sum C_{\mu\nu\lambda}S_\mu(x)S_\nu(y)$$

となる．

また，最初の主張 $S_\lambda*S_\mu=\sum C_{\lambda\mu\nu}S_\nu$ は，$V_\lambda\otimes V_\mu=\sum C_{\lambda\mu\nu}V_\nu$ から明らかである．次に，$P^i=\sum\chi_\lambda(C_i)S_\lambda$ は R 上では

$$F^i:=\sum_\lambda\chi_\lambda(C_i)\chi_\lambda\in\mathbb{C}_{class}(\mathfrak{S}_d)\cong R_d\otimes\mathbb{C}$$

に対応する（指標で書いている）．そこで，命題 3.34 から

$$F^i(C_j)=\sum_\lambda\chi_\lambda(C_i)\chi_\lambda(C_j)=\frac{1}{z(i)}\delta_{i,j}$$

となる．よって，表現のテンソル積は指標の関数としての積に対応するので

$$F^iF^j(C_k)=F^i(C_k)F^j(C_k)=\frac{1}{z(i)}\frac{1}{z(j)}\delta_{ik}\delta_{kj}=\frac{1}{z(i)^2}\delta_{ij}\delta_{ki}$$

となる．よって $F^iF^j=\delta_{ij}z(i)F^i$ であるので，これを Λ へ移せば，

$$P^i*P^j=\delta_{ij}z(i)P^i$$

となる．

2 番目の主張は内積の線形性から $P=P^i,Q=P^j$ について確かめればよい．そこで，

$$\langle P^i,P^j\rangle=z(i)\delta_{ij}=\delta_{ij}z(i)P^i(1,0,\cdots)=(P^i*P^j)(1,0,\cdots)$$

となる． □

7　交代群 $\mathfrak{A}_d$ の表現

対称群の表現論を使って，交代群 $\mathfrak{A}_d = \ker \mathrm{sgn}$ の表現を論じる．

7.1　$|G/H| = 2$ となる場合の制限表現

まず，一般の場合を考える．G を有限群として H を部分群で $|G/H| = 2$ となるものとする．このとき H は正規部分群であり，G/H は群となる．$G/H \cong \mathfrak{S}_2$ であり，表現としては自明表現と交代表現しかない．この一次元表現から得られる G の表現をそれぞれ U, U' としておく．U は G の一次元自明表現であり，U' は $g \in G$ に対して $g \in H$ なら自明に作用し $g \notin H$ なら -1 で作用する 1 次元表現である．

G の任意の表現を V として，$V' := V \otimes U'$ とする．V の指標と V' の指標を比較すれば，H 上では同じであり，H に入らない場合はマイナスをつければよい．また $\mathrm{Res}_H^G V' = \mathrm{Res}_H^G V$ である．

W を H の任意の表現とする．このとき $t \notin H$ に対して，W の**共役表現**を作ることができる．$|G/H| = 2$ であるので $h \in H$ に対して，$tht^{-1} \in H$ である．そこで

$$H \ni h \mapsto tht^{-1} \in \mathrm{GL}(W)$$

とすれば，表現になることがわかる．W の指標を ψ とすれば，共役表現の指標は $\psi(tht^{-1})$ であるが，一般にはこれらは一致しない．また $t' \notin H$ を使って共役表現を作った場合には

$$\psi(t'ht'^{-1}) = \psi(t't^{-1}tht^{-1}tt'^{-1}) = \psi(t't^{-1})\psi(tht^{-1})\psi(tt'^{-1}) = \psi(tht^{-1})$$

となり $h \mapsto tht^{-1}$ と $h \mapsto t'ht'^{-1}$ に対する指標は一致する．つまり**共役表現は同値類を除いてただひとつ**である．また W とその共役表現が同値になるとき**自己共役**とよぶ．G の表現 V を考えて，その H への制限を考えると，

$$\psi(tht^{-1}) = \mathrm{tr}\,\rho_V(tht^{-1}) = \mathrm{tr}\,\rho_V(t)\rho_V(h)\rho_V(t^{-1}) = \mathrm{tr}\,\rho_V(h) = \psi(h)$$

となる．よって $\mathrm{Res}V$ は自己共役表現である．

また W を H の表現空間として，誘導表現を考える．ベクトル空間としては $\mathrm{Ind}W = W \oplus \sigma W$ である．σ の代表元として $t_0 \notin H$ を選んでおく．このとき $h \in H$ に対して，W へはそのまま作用する．そして $ht_0 = t_0(t_0^{-1}ht_0) \in \sigma H$ であるので，σW へは

$$h(t_0w) = t_0(t_0^{-1}ht_0w)$$

として作用する．よって，

$$\mathrm{ResInd}W = W \oplus \widetilde{W} \tag{7.1}$$

となる．ここで $\widetilde{W}$ は W の共役表現である．

命題 7.1. V を G の既約表現として，$W = \mathrm{Res}_H^G V$ とする．このとき次のどちらかひとつが成立する．

1. V は $V' = V \otimes U'$ と同値でない．そして W は既約であり，自己共役である．また $\mathrm{Ind}_H^G W = V \oplus V'$ となる．

2. $V \cong V'$ となる．また $W = W' \oplus W''$ であり，W' と W'' は互いに共役であり，W' と W'' は同値でない．また $\mathrm{Ind}_H^G W' \cong \mathrm{Ind}_H^G W'' \cong V$ である．

さらに，H のすべての既約表現はこの方法のどちらかひとつの方法で得られる．

Proof. 既約表現 V の指標を χ とする．このとき

$$1 = (\chi, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum |\chi(g)|^2$$

であるので，

$$|G| = 2|H| = \sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 + \sum_{t \notin H} |\chi(t)|^2$$

となる．$W = \mathrm{Res}_H^G V$ とすれば，

$$|H|(\chi_W, \chi_W) = \sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 \leq 2|H|$$

となる，よって (χ_W, χ_W) は 1 または 2 であり，$\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2$ は $2|H|$ または $|H|$ に一致する．また，V と V' が非同値なら，

$$0 = (\chi_V, \chi_{V'}) = \frac{1}{2|H|}(\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 - \sum_{t \notin H} |\chi(t)|^2)$$

同値なら，

$$1 = (\chi_V, \chi_{V'}) = \frac{1}{2|H|}(\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 - \sum_{t \notin H} |\chi(t)|^2)$$

が成立する．そこで

1. (1) $\sum_{h \in H} |\chi(h)|^2 = |H|$ となる場合．これは $(\chi_W, \chi_W) = 1$ であり，W が既約であることを意味する．また制限なので W は自己共役である．また $\sum_{t \notin H} |\chi(t)|^2 = |H|$ となる．よって，$(\chi_V, \chi_V') = 0$ となるので V と V' は同値でない．さらに，例 3.68 から，

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{Res} V) = V \otimes (U \oplus U')$$

となるので，$\mathrm{Ind} W = V \oplus V'$ となる．

2. (2) $\sum_{h\in H}|\chi(h)|^2=2|H|$ となる場合には $(\chi_W,\chi_W)=2$ となり，W が二つの非同値な既約成分 W' と W'' の和に分解することを意味する（同値な二つの既約成分の和になったら $(\chi_W,\chi_W)=4$ となって矛盾）．また $(\chi_V,\chi_{V'})=1$ となるので $V\cong V'$ となる．また

$$\mathrm{Ind}(\mathrm{Res}V)=\mathrm{Ind}W=\mathrm{Ind}W'\oplus\mathrm{Ind}W''=2V$$

となり V が既約であるので，$\mathrm{Ind}W'\cong\mathrm{Ind}W''\cong V$ を得る．また (7.1)

$$W'\oplus\widetilde{W'}=\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}W')\cong\mathrm{Res}V=W'\oplus W''$$

となるので．W' と W'' は互いに共役であることがわかる．

また H のすべての既約表現が上の方法で得られることを見てみる．M を既約表現として $V=\mathrm{Ind}M$ を考える．

1. V が G の表現として既約であるとする．$W=\mathrm{ResInd}M=M\oplus\tilde{M}$ であるので，W は既約でないので (2) の場合である．

2. $V=\mathrm{Ind}M$ が G の表現として可約であるとする．(7.1) より $\mathrm{ResInd}M=M\oplus\tilde{M}$ となるので，$\mathrm{Ind}M$ は二つの既約成分に分解されることになる．その片方を V とすれば，$\mathrm{Res}V=M$ または $\mathrm{Res}V=\tilde{M}$ が成立する．よって制限が既約であるので (1) の場合に対応する．つまり $M=\mathrm{Res}V=\tilde{M}$ となる．

このように，H のすべての既約表現は (1) or (2) のどちらかの方法で作れる． □

補足 7.2. 上の事実は $|G/H|$ が素数となるような正規部分群 H の場合に一般化できる．

さて，H には二種類の共役類 C がある．

1. C は G の共役類にもなる．また $t\notin H$ に対して $C'=tCt^{-1}$ とすれば，C' は H の共役類であるが，このとき $C'=C$ となる．

2. C は G の共役類とはならない．$t\notin H$ に対して $C'=tCt^{-1}$ とすれば，$C\neq C'$ である．そして，$C\cup C'$ が G の共役類となる．この共役類を **split 共役類**とよぶ．また $(C')'=C$，$|C|=|C'|$ であることに注意．

Proof. C を H の共役類とする．つまり，すべての $h\in C$ に対して $hCh^{-1}=C$ である．この C に対して，$t\notin H$ をとって $C'=tCt^{-1}$ を考える．これが $tCt^{-1}=C$ となるなら，C は G の共役類となる．一方 $C'=tCt^{-1}\neq C$ とする．このとき C は G の共役類ではない．$ht\in tH$ であるので $ht=th'$ なる h' が存在する．よって，$hC'h^{-1}=htCh^{-1}t^{-1}=th'Ch'^{-1}t^{-1}=tCt^{-1}=C'$ が成立する．つまり C' は H の共役類である．そして $C\cup C'$ は G の共役類になることがわかる． □

V を G の既約表現として，$W=\mathrm{Res}V$ とする．

1. W が既約の場合．C, C' を split 共役類の組とする．$\chi_W(C)=\chi_V(C)=\chi_V(C')=\chi_W(C')$ となり，C と $C'\neq C$ 上の値は一致する．もちろん split しない共役類 $C=C'$ 上でも指標は一致．

2. $W=W'\oplus W''$ となる場合．W' と W'' は互いに共役であるので，$C=C'$ なる共役類上では $\chi_{W'}(C)=\chi_{W''}(C')=\chi_{W''}(C)=\frac{1}{2}\chi_V(C)$ となる．一方，W' と W'' は同値でないので，ある split 共役類 C が存在して $\chi_{W'}(C)\neq\chi_{W''}(C)$ となる（このような split 共役類は一つとは限らない．また $\chi_{W'}(C)=\chi_{W''}(C')$, $\chi_{W'}(C')=\chi_{W''}(C)$ であることに注意）．このとき，誘導表現の指標公式から，$\chi_{W'}(C)+\chi_{W''}(C)=\chi_{W'}(C')+\chi_{W''}(C')$ の値は $\chi_V(C\cup C')$ の値に一致することはわかる．

そこで，G の指標がすでに計算されているとすれば，H の指標で問題となるのは $W=W'\oplus W''$ となる場合で，さらに split 共役類の pair 上での値である．

命題 7.3. 次が成立する．

$$
\begin{aligned}
&\#\{H \text{ の } \textit{split} \text{ 共役類の } \textit{pair} \text{ の個数}\}\\
=&\#\{G \text{ の既約表現 } V \text{ で } V\cong V' \text{ となるもの}\}\\
=&\#\{H \text{ の既約表現で自己共役でないものの}\}
\end{aligned}
$$

また

$$\#\{H \text{ の } \textit{nonsplit} \text{ な共役類}\}=\#\{G \text{ の共役類で } H \text{ に含まれないもの}\}$$

Proof. 類関数 $\mathbb{C}_{class}(H)$ の次元と共役類の数は一致するのであった．つまり類関数は共役類全体の集合上の関数である．共役類 C に対して，

$$f_C(h)=\begin{cases}1 & h\in C\\ 0 & h\notin C\end{cases}$$

とすることにより類関数が定まり，これが基底になる．split 共役類は pair で現れるので $C_1, C_1', C_2, C_2'\cdots, C_k, C_k'$ とする．また non-split 共役類を $D_1=D_1',\cdots,D_l=D_l'$ とする．これらについて $f_{C_i}, f_{C_i'}, f_{D_i}$ を作っておく．さて，W が自己共役とすれば，

$$\chi_W=\sum a_if_{C_i}+b_if_{C_i'}+\sum c_jf_{D_j}$$

と書いたときに，$a_i=b_i$ を得る．つまり自己共役な表現全体の指標空間を考えると，$\{f_{C_i}+f_{C_i'}\}\cup\{f_{D_j}\}$ の線形結合でかける．また既約で自己共役でない表現は互いに共役な表現と pair で現れるので $\{W_1,\tilde{W}_1,\cdots,W_q,\tilde{W}_q\}$ とする．このとき

$W_t \oplus \tilde{W}_t$ は自己共役なので，$\{f_{C_i}+f_{C'_i}\}\cup\{f_{D_j}\}$ の線形結合でかける．一方，W_t は自己共役でないので χ_{W_t} は $\{f_{C_i}+f_{C'_i}\}\cup\{f_{D_j}\}$ とは独立である．そして，

$$\{f_{C_i}+f_{C'_i}\}\cup\{f_{D_j}\}\cup\{\chi_{W_t}\}$$

は独立であり，自己共役な表現の指標，自己共役でない表現の指標をこれらの線形結合で書くことができる．つまり類関数の基底である．よって $k=q$ である．つまり split 共役類の pair の数 k と自己共役でない表現の数 q は一致する．また命題 7.1 で述べたことから，G の既約表現 V で $V\cong V'$ となるものの数と一致する．

H の既約表現の数は共役類の個数なので $2k+l$ である．命題 7.1 から，$V\cong V'$ とならない表現 V の個数は $2\times(2k+l-2k)=2l$ 個である（V と $V\otimes U'$n の pair が l 個）．また，$V\cong V'$ となる表現の個数は k 個であるので，G の既約表現の数は $k+2l$ 個となる．よって，G の共役類の数は $k+2l$ 個となる．また G の共役類で H に入るものの数は $k+l$ 個である（$\#(\{C_i\cup C'_i\}\cup\{D_j\})$）．よって G の共役類で H に入らないものの数は $k+2l-(k+l)=l$ となり，non-split な共役類の数と一致する． $\square$

7.2 交代群の表現

上での議論と対称群 $\mathfrak{S}_d$ の表現論を使って，交代群 $\mathfrak{A}_d$ の表現について考えよう．λ を d の分割とする．λ' を共役なヤング図形とすれば，

$$V_{\lambda'}=V_\lambda\otimes U'$$

となるのであった．ここで U' は交代表現である．命題 7.1 に当てはめると，

1. $\lambda'\neq\lambda$ の場合．$W_\lambda=\mathrm{Res}V_\lambda$ とすれば，これは既約である．また $\mathrm{Ind}W_\lambda=V_\lambda\oplus V_{\lambda'}$，$\mathrm{Res}V_\lambda=\mathrm{Res}V_{\lambda'}=W_\lambda$ となる．
2. $\lambda'=\lambda$ の場合．$\mathrm{Res}V_\lambda=W'_\lambda\oplus W''_\lambda$ となり，W'_λ と W''_λ は非同値で互いに共役．また $\mathrm{Res}V_\lambda=W'_\lambda\oplus W''_\lambda$ となる．

また，

$$\begin{aligned}&\#\{\mathfrak{S}_d\text{ の自己共役表現 }\}\\=&\#\{\text{ 対称なヤング図形 }\}\\=&\#\{\mathfrak{A}_d\text{ の split 共役類の pair}\}\\=&\#\{\mathfrak{S}_d\text{ の共役類で }\mathfrak{A}_d\text{ の共役類として二つに分解するもの }\}\end{aligned}$$

である．

さて，$\mathfrak{A}_d$ の共役類の代表元 g をサイクル表示しておく．この元 g が **split 共役類にはいるための必要十分条件は，g と可換な奇置換（符号がマイナスの元）が存**

在しないことである．いいかえれば，g をサイクル表示したとき，各サイクルの長さは奇数であり，同じ長さをもつサイクルが存在しないことである．よって，自己共役な表現の数は，d の分割で互いに異なる奇数の和として書けるものの数に一致する．

Proof. まず，$\mathfrak{A}_d$ の元 g をサイクル表示しておき，この元の $\mathfrak{A}_d$ における共役類 C が split 共役類でないとする．つまり，$t \notin \mathfrak{A}_d$ に対して $tCt^{-1} = C$ となるとする．$tgt^{-1} = h^{-1}gh$ となる $h \in \mathfrak{A}_d$ が存在する．そこで，$g = (ht)^{-1}g(ht)$ となる．$th \notin \mathfrak{A}_d$ であり，これは奇置換である．つまり，g の共役類が split 共役類でないなら，g と可換な奇置換が存在する．逆に，$g = tgt^{-1}$ なる奇置換 t が存在するなら，$thgh^{-1}t^{-1} \in tCt^{-1}$ に対して，$\mathfrak{A}_d$ は正規部分群なので $th = h't$ なる $h' \in \mathfrak{A}_d$ が存在する．よって，$thgh^{-1}t^{-1} = h'tgt^{-1}h'^{-1} = h'gh'^{-1} \in C$ となる．そこで $tCt^{-1} = C$ となる．つまり，$tCt^{-1} = C$ となることと，可換な奇置換が存在することは同値である．よって，g が split 共役類に入ることは，任意の奇置換が g と可換でないことは同値である．

さて，g がすべての奇置換と可換でないとする．g のサイクル表示において，あるサイクル $g_0 = (i_1, \cdots, i_k)$ の長さ k が偶数とする．この g_0 は奇置換であり，またサイクルは互いに交わらないのであった．つまり $g = g_0g_1 \cdots g_s$ とすれば，$g_ig_0 = g_0g_i$（$i \neq 0$）となる．よって，

$$g_0gg_0^{-1} = g_0g_0g_0^{-1}g_0g_1g_0^{-1} \cdots g_0g_sg_0^{-1} = g_0g_1 \cdots g_s$$

となるので可換となり，矛盾する．よって，g のサイクル表示において，サイクルの長さは奇数である．また，同じ長さのサイクルがあるとする，たとえば，g のサイクル表示が $(1,2,3)(4,5,6)$ を含むとする．このとき $\sigma = (1,4)(2,3)(5,6)$ すれば，これは奇置換であり，さらに g と可換である．よって，g は同じ長さの元を含まない．（長さ 1 の元も二個以上は含まない．たとえば $\mathfrak{A}_5$ において $(1,2,3) = (1,2,3)(4)(5)$ は split 共役類ではない）．

逆に，g を $g_0 \cdots g_s$ とサイクル表示したとき，各サイクルの長さが奇数であり，同じ長さのサイクルがないとする．さらに，ある奇置換 σ があり，$\sigma g\sigma^{-1} = g$ と仮定する．Section 1 でみたように，$\sigma g_i\sigma^{-1}$ のサイクルの長さは g_i と同じであり，$\sigma(i_1, \cdots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k))$ となる．そこで，

$$g_0 \cdots g_s = (\sigma g_0\sigma^{-1}) \cdots (\sigma g_s\sigma^{-1})$$

において，各サイクルの長さが異なることから $\sigma g_i\sigma^{-1} = g_i$ となる．（g_p, g_q が同じ長さなら $\sigma g_p\sigma^{-1} = g_q$ となることはありえることに注意）．また，例えば，$g_0 = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ とすれば，$\sigma g_0\sigma^{-1}$ は

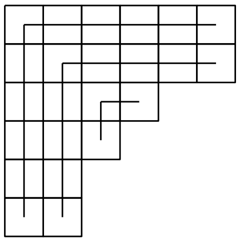
$$(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \cdots, \sigma(i_k)) = (i_l, i_{l+1}, \cdots, i_k, i_1, i_2, \cdots, i_{l-1})$$

という形，つまり，σ は $A_0 := \{i_1, \cdots, i_k\}$ を A_0 に移し，$\sigma(i_1) = i_l$, $\sigma(i_2) = i_{l+1}$, $\cdots$, $\sigma(i_k) = i_{l-1}$ となる．そこで，$\tau_0 \in \mathfrak{S}_d$ を A_0 を A_0 へ移し，$\{1, \cdots, n\} \setminus A_0$ を

動かさないで，$\tau_0(i_l) = i_1, \cdots, \tau_0(i_{l-1}) = i_k$ となるものとする．あみだくじを考えれば，$A_0 = \{i_1, \cdots, i_k\}$ の個数が奇数なので，τ_0 は偶置換である．$\tau_0\sigma$ を考えれば，$\{1, \cdots, n\} \setminus A_0$ を $\{1, \cdots, n\} \setminus A_0$ にうつし，A_0 には作用しない．この議論を $g_1, \cdots, g_s$ に対して繰り返していけば，$\tau_k \cdots \tau_1\tau_0\sigma = 1$ となる．しかし σ は奇置換なので矛盾．以上から，$g \in \mathfrak{A}_d$ に対して，「各サイクルの長さが奇数であり，同じ長さのサイクルがない」ことと「任意の奇置換と可換でない」が同値であることがわかった． $\square$

そこで，$\mathfrak{S}_d$ の自己共役表現の個数は d の分割で異なる奇数の和で表せるものの数に一致する．また．これは対称なヤング図形の数と一致した．実際，次のように対応をつけることができる：

対称ヤング図形を $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$ とする．このとき各対角成分に対する hook length は $q_1 = 2\lambda_1 - 1$, $q_2 = 2\lambda_2 - 3$, $q_3 = 2\lambda_3 - 5$, $\cdots$ $q_r = 2\lambda_r - (2r-1)$ となる．そこで $(q_1, \cdots, q_r)$ が対応する split 共役類のサイクル表示になる．



ここで r は対角成分の箱の数であり，$q_1 + q_2 + \cdots + q_r = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = d$ となる．

例 7.4. $\mathfrak{A}_5$ の共役類をもとめよう．まず，$\mathfrak{S}_5$ の共役類の代表元は

$$\begin{aligned} 1 =& (1)(2)(3)(4)(5), \quad (1,2)(3)(4)(5), \quad (1,2,3)(4)(5), \quad (1,2,3,4)(5) \\ & (1,2)(3,4)(5) \quad (1,2)(3,4,5), \quad (1,2,3,4,5) \end{aligned}$$

である．これらのうち，偶置換であるものは，

$$1 = (1)(2)(3)(4)(5), \quad (1,2,3)(4)(5), \quad (1,2)(3,4)(5), \quad (1,2,3,4,5)$$

となる．しかし，$\mathfrak{A}_5$ の共役類としては split するものがあり，今の場合には $(1,2,3,4,5)$ である．つまり $(1,2,3,4,5)$ と $(2,1,3,4,5)$ は $\mathfrak{A}_5$ 内で異なる共役類に入る．これは $(1,2,3,4,5)$ に対して，奇置換 $\sigma_0 = (1,2) \notin \mathfrak{A}_5$ をとれば，$(2,1,3,4,5) = \sigma_0(1,2,3,4,5)\sigma_0^{-1}$ となるからである．もちろん任意の奇置換 σ に対して，$\sigma(1,2,3,4,5)\sigma^{-1}$ を考えると，これは $(2,1,3,4,5)$ と同じ共役類に入る．このように，split 共役類の組をサイクル表示したとき，サイクルタイプは同じである．

一方，$(1,2,3) = (1,2,3)(4)(5)$ と $(2,1,3)$ は同じ共役類に入る．たとえば $\sigma = (1,2)(4,5)$ をとれば，$\sigma \in \mathfrak{A}_5$ であり，

$$\sigma(1,2,3)\sigma^{-1} = (2,1,3)$$

となるのである．

さて，以上の準備のもとで，$\mathfrak{A}_d$ の既約表現の指標を計算しよう．対称なヤング図形を λ とする．これには自己共役な $\mathfrak{S}_d$ の表現が対応する（$V \cong V' = V \otimes U'$）．これを $\mathfrak{A}_d$ へ制限すれば，二つの既約表現に分解する．それぞれ W'_λ, W''_λ とする．また，その指標を $\chi'_\lambda, \chi''_\lambda$ とする．また λ に対応する $\mathfrak{A}_d$ の split 共役類の pair を c, c' とする．$c \cup c'$ は $\mathfrak{S}_d$ の共役類となり，その代表元をサイクル表示すれば，$q_1 > \cdots > q_r$ となる．このとき次が成立する．

命題 7.5 (交代群の表現の指標). *1.* c, c' が λ に対応していないなら，

$$\chi'_\lambda(c) = \chi'_\lambda(c') = \chi''_\lambda(c) = \chi''_\lambda(c') = \frac{1}{2}\chi_\lambda(c \cup c')$$

2. c, c' が λ に対応した *split* 共役類の *pair* とれば，

$$\chi'_\lambda(c) = \chi''_\lambda(c') = x, \quad \chi'_\lambda(c') = \chi''_\lambda(c) = y$$

となる．ここで x, y は

$$\frac{1}{2}((-1)^m \pm \sqrt{(-1)^m q_1 \cdots q_r})$$

であり，

$$m = \frac{1}{2}(d - r) = \frac{1}{2}\sum(q_i - 1) \equiv \frac{1}{2}(\prod q_i - 1) \mod 2$$

である（この m はヤング図形の対角線より上にある箱の数である）．

以下でこの命題を証明していく．

$q = (q_1, \cdots, q_r)$ を $q_1 > \cdots > q_r$, $\sum q_i = d$ となる正奇数の列とする．これに対応する $\mathfrak{A}_d$ の split 共役類の pair を $c = c(q)$, $c' = c'(q)$ とする．また λ を自己共役な d の分割として，対応する $\mathfrak{A}_d$ の既約表現の指標を $\chi'_\lambda, \chi''_\lambda$ とする.（λ が q に対応しているとは仮定してない）.

[Step 1-1]：まず，χ'_λ χ''_λ が $c = c(q)$ および $c' = c'(q)$ に対してのみ値が異なり，他の $\mathfrak{A}_d$ の共役類に対しては値が一致すると仮定する（以下 Step2 に行くまで仮定）．また W'_λ と W''_λ が共役な表現であることから，$\chi'_\lambda(c) = \chi''_\lambda(c')$ となるが，これを u と書く．同様に $v = \chi'_\lambda(c') = \chi''_\lambda(c)$ とする．このとき，m が偶数なら u, v は実数であり，m が奇数なら $\bar{u} = v$ となる．

Proof. 双対表現の指標を考えると $\chi_\lambda(g^{-1}) = \chi_{\lambda^*}(g) = \overline{\chi_\lambda(g)}$ となるのであった．そこで，c の逆元の共役類を考えてみよう．例えば，c の代表元 g が

$$g = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8)$$

とすれば，この逆元は

$$(5,4,3,2,1)(8,7,6)$$

である（つまり各サイクルは可換なので，各サイクルで見ればよい．$\mathfrak{S}_d$ の共役類とみれば同じ共役類を与える）．そこで，

$$\sigma_0(5,4,3,2,1)\sigma_0^{-1} = (\sigma_0(5),\sigma_0(4),\sigma_0(3),\sigma_0(2),\sigma_0(1)) = (1,2,3,4,5)$$

となるようにするには，$\sigma_0 = (5,1)(4,2)$ とすればよい．また $(6,7,8)$ に対しては $\sigma_1 = (6,8)$ とすればよい．しかし $\sigma_0 \in \mathfrak{A}_d$ であるが，$\sigma_1 \notin \mathfrak{A}_d$ である．以上のことを考慮すれば，

$$m = \frac{1}{2}\sum(q_i - 1)$$

が偶数なら $\sigma g^{-1}\sigma^{-1} = g$ となる $\sigma \in \mathfrak{A}_d$ が取れる．一方，m が奇数なら $\sigma g^{-1}\sigma^{-1} = g$ となる σ は $\sigma \notin \mathfrak{A}_d$ である．よって，m が偶数なら c の逆元の $\mathfrak{A}_d$ における共役類は c であり，$\chi'_\lambda(c) = \chi'_\lambda(c^{-1}) = \overline{\chi'_\lambda(c)}$ となる．つまり，$\overline{u} = u, \overline{v} = v$ が成立する．一方，m が奇数なら $\overline{u} = \overline{\chi'_\lambda(c)} = \chi'_\lambda(c^{-1}) = \chi'_\lambda(c') = v$ となる． □

[Step1-2]：$\theta = \chi'_\lambda - \chi''_\lambda$ とする．このとき，

$$(\theta,\theta) = (\chi'_\lambda,\chi'_\lambda) + (\chi''_\lambda,\chi''_\lambda) - (\chi'_\lambda,\chi''_\lambda) - (\chi''_\lambda,\chi'_\lambda) = 2$$

となる．一方，仮定から，$\chi'_\lambda, \chi''_\lambda$ は c, c' においてのみ値が異なるとしているので，（大文字 C で $\mathfrak{A}_d$ の共役類をあらわして）

$$\begin{aligned}2 =&(\theta,\theta) = \frac{2}{d!}\sum_C |C||\chi'_\lambda(C) - \chi''_\lambda(C)|^2 \\ =&\frac{2}{d!}(|c||u-v|^2 + |c'||v-u|^2) = \frac{2}{d!}|u-v|^2|(c\cup c')| \\ =&\frac{2}{d!}\frac{d!}{q_1\cdots q_r}|u-v|^2\end{aligned}$$

となる．よって

$$|u-v|^2 = |u|^2 - 2(\bar{u}v + \bar{v}u) + |v|^2 = q_1\cdots q_r$$

となる．

[Step1-3]：λ が $p = (p_1,\cdots,p_l)$（$p_1,\cdots,p_l$ は異なる奇数で $\sum p_i = d$）に対応しているとして，$\mathfrak{S}_d$ の既約表現の指標を χ_λ とする．また $g \in c(p)$ とする．このとき

$$\chi_\lambda(g) = (-1)^{\frac{d-l}{2}}$$

となる．

Proof. Murnaghan-Nakayama rule （定理 6.21 ）を使えば，

$$\chi_\lambda(g) = (-1)^{\frac{p_1-1}{2}}(-1)^{\frac{p_2-1}{2}}\cdots(-1)^{\frac{p_l-1}{2}} = (-1)^{\frac{d-l}{2}}$$

□

[Step1-4] 仮定が成立するには，λ は q に対応した分割である．また $u+v=(-1)^m$ であることがわかるので，u, v は

$$\frac{1}{2}((-1)^m \pm \sqrt{(-1)^m q_1\cdots q_r})$$

となる．

Proof. λ が $p \neq q$ に対応した分割であるとする．このとき，仮定から $\chi'_\lambda(c(p)) = \chi''_\lambda(c(p)) = \chi'_\lambda(c'(p)) = \chi''_\lambda(c'(p))$ となるので，これを w とする．Step1-3 から，$2w = \chi_\lambda(c(p)) = \pm 1$ となる．$w = \pm 1/2$ となるが，Section 3.8 で見たように，有限群の有限次元表現に対する指標は代数的整数でなくてならならいので矛盾．そこで λ は q に対応した分割である．

そこで λ が q に対応した分割としてよい．このとき，Step 1-3 から

$$(-1)^m = \chi_\lambda(c\cup c') = \chi'_\lambda(c) + \chi''_\lambda(c) = u+v$$

となる．m が偶数なら u, v は実数であり，

$$(u-v)^2 = q_1\cdots q_r, \quad u+v=1$$

である．また m が奇数なら $\bar{u} = v$ であるので，

$$(u-\bar{u})^2 = -q_1\cdots q_r, \quad u+\bar{u} = -1$$

となる．よって，u, v は

$$\frac{1}{2}((-1)^m \pm \sqrt{(-1)^m q_1\cdots q_r}).$$

□

[Step 2]：命題を d に対する帰納法で証明したい．d より小さい d' に対して，命題が成立していると仮定する．

[Step2-1]：$r>1$（**対角成分の箱の数が** 2 **以上**）**の場合**を考える．記号が紛らわしいけど，$q_r > \cdots > q_1$ と番号付けを変えておく．つまり q_1 は q の中で最小の奇数である．$H = \mathfrak{A}_{q_1}\times\mathfrak{A}_{d-q_1} \subset G = \mathfrak{A}_d$ とする．q_1 に対応する $\mathfrak{A}_{q_1}$ の表現を W'_1, W''_1 とする．つまり対称な分割 $(\frac{1}{2}(q_1-1), 1, \cdots, 1)$ に対応するものである．また $(q_2, \cdots, q_r)$ から決まる対称な分割に対する，$\mathfrak{A}_{d-q_1}$ の表現の一つを W'_2 とする．そして，$X' = \mathrm{Ind} W'_1 \boxtimes W'_2$, $X'' = \mathrm{Ind} W''_1 \boxtimes W'_2$ とする．このとき X', X'' は互いに

共役な表現である．また，その指標を考えると χ', χ'' は $c(q)$, $c'(q)$ 以外の split 共役類の組に対して同じ値になる．さらに，

$$\chi_{X'}(c(q)) = \frac{(-1)^m + \sqrt{(-1)^m q_1 \cdots q_r}}{2}$$
$$\chi_{X'}(c'(q)) = \frac{(-1)^m - \sqrt{(-1)^m q_1 \cdots q_r}}{2}$$
$$\chi_{X''}(c(q)) = \frac{(-1)^m - \sqrt{(-1)^m q_1 \cdots q_r}}{2}$$
$$\chi_{X''}(c'(q)) = \frac{(-1)^m + \sqrt{(-1)^m q_1 \cdots q_r}}{2}$$

Proof. p を $p_l > \cdots > p_1$（$\sum p_i = d$）となる奇数次の列として，$c(p)$, $c'(p)$ を $\mathfrak{A}_d$ の split 共役類の組とする（$p = p_1$ の場合も考慮する）．$c(p) \cap (\mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{d-q_1})$ を考える．

$$p_{i_1} + \cdots + p_{i_s} = q_1$$

となるときのみ共通部分は空集合でない．空集合なら誘導表現の指標の公式から指標はゼロになる（例えば，$p = p_1$ となるときには，$p_1 = q_1$ となることはないので空集合である）．そこで共通部分が空集合でないときを考える．この共通部分は，いくつかの集合に分割されるので，$D_1 \times E_1, \cdots, D_t \times E_t$ としておく．

$$\chi_{X'}(c(p)) = \frac{|\mathfrak{A}_d|}{|\mathfrak{A}_{q_1}||\mathfrak{A}_{d-q_1}|} \sum \frac{|D_i \times E_i|}{|c(q)|} \chi_{W_1'}(D_i)\chi_{W_2'}(E_i)$$

となる．$p \neq q$ のときには，$c(q_1) = D_i$, $c(q_2, \cdots, q_r) = E_i$ および $c'(q_1) = D_i$, $c'(q_2, \cdots, q_r) = E_i$ となることはない．よって．帰納法の仮定から W_1', W_1'', W_2' に対する指標はすでにわかっているので，

$$\begin{aligned}\chi_{X''}(c(p)) &= \frac{|\mathfrak{A}_d|}{|\mathfrak{A}_{q_1}||\mathfrak{A}_{d-q_1}|} \sum \frac{|D_i \times E_t|}{|c(q)|} \chi_{W_1''}(D_i)\chi_{W_2'}(E_i) \\ &= \frac{|\mathfrak{A}_d|}{|\mathfrak{A}_{q_1}||\mathfrak{A}_{d-q_1}|} \sum \frac{|D_i \times E_t|}{|c(q)|} \chi_{W_1'}(D_i)\chi_{W_2'}(E_i) = \chi_{X'}(c(p))\end{aligned}$$

となる．また $c'(p) = tc(p)t^{-1}$ として，$t \in \mathfrak{S}_{q_1}$ かつ $t \notin \mathfrak{A}_{q_1}$ となる元をとってくる．このときも，同様にして考えれば，$\chi_{X'}(c(p)) = \chi_{X'}(c'(p))$ となることがわかる．

次に $p = q$ の時を考える．このとき $c(q) \cap (\mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{d-q_1})$ は，二つの集合に分割する．実際，$c(p = q) \cap (\mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{d-q_1})$ を考えたとき，q_1 が最小であることから，$p_1 = q_1$ の場合のみ考えればよい．そして，$c(p = q) \cap (\mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{d-q_1})$ は，

$$c(q_1) \times c(q_2, \cdots, q_r) \quad c'(q_1) \times c'(q_2, \cdots, q_r)$$

と二つに分解する.（これらが $\mathfrak{A}_d$ の元として同じ共役類 $c(q)$ に入ることは，$c(p_1)$ を $c'(p_1)$ へ移す $\mathfrak{A}_{q_1}$ の奇置換と，$c(p_2, \cdots, p_r)$ を $c'(p_2, \cdots, p_r)$ へ移す $\mathfrak{A}_{d-q_1}$ の奇置

換の積は偶置換で $\mathfrak{A}_d$ の元であるので）．また，

$$|c(q_1)| = |c(q_1)| = \frac{q_1!}{2q_1}, \quad |c(q_2, \cdots, q_r)| = |c(q_2, \cdots, q_r)| = \frac{(d-q_1)!}{2q_2 \cdots q_r}$$
$$|c(q)| = \frac{d!}{2q_1 \cdots q_r},$$

であるので，帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
\chi_{X'}(c(p)) =& \frac{d!}{2}\frac{2}{q_1!}\frac{2}{(d-q_1)!}\frac{2q_1\cdots q_r}{d!}\frac{q_1!}{2q_1}\frac{(d-q_1)!}{2q_2\cdots q_r} \\
&\times \{\chi_{W_1'}(c(q_1))\chi_{W_2'}(c(q_2,\cdots q_r)) + \chi_{W_1'}(c'(q_1))\chi_{W_2'}(c(q_2,\cdots,q_r))\} \\
=& \chi_{W_1'}(c(q_1))\chi_{W_2'}(c(q_2,\cdots q_r)) + \chi_{W_1'}(c'(q_1))\chi_{W_2'}(c(q_2,\cdots,q_r)) \\
=& \frac{\epsilon_1 + \sqrt{\epsilon_1 q_1}}{2}\frac{\epsilon' + \sqrt{\epsilon' q_2\cdots q_r}}{2} + \frac{\epsilon_1 - \sqrt{\epsilon_1 q_1}}{2}\frac{\epsilon' - \sqrt{\epsilon' q_2\cdots q_r}}{2} \\
=& \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon q_1\cdots q_r}}{2}
\end{aligned}$$

となる．ここで $\epsilon_1 = (-1)^{(q_1-1)/2}$, $\epsilon' = (-1)^{(d-q_1-r+1)/2}$ であり，

$$\epsilon = \epsilon_1\epsilon' = (-1)^{(d-r)/2}$$

同様に $c'(q)$ にたいして $c'(q) \cap (\mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{d-q_1})$ は

$$c'(q_1) \times c(q_2, \cdots, q_r) \quad c(q_1) \times c'(q_2, \cdots, q_r)$$

であるので，

$$\begin{aligned}
\chi_{X'}(c'(p=q)) &= \frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon q_1\cdots q_r}}{2} \\
\chi_{X''}(c(p=q)) &= \frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon q_1\cdots q_r}}{2} \\
\chi_{X''}(c'(p=q)) &= \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon q_1\cdots q_r}}{2}
\end{aligned}$$

となることがわかる．

最後に，split しない共役類 $c = tct^{-1}$ を考える．$t \in \mathfrak{S}_{q_1}$ かつ $t \notin \mathfrak{A}_{q_1}$ としてよい．$c \cap (\mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{d-q_1})$ を考えると，いくつかの集合に分割される．たとえば，$D_i = c(q_1)$, $E_i \neq c(q_2, \cdots, q_r)$ となることもありえる．このとき $D_i' = c'(q_1)$, $E_i' = E_i$ も $c \cap (\mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{d-q_1})$ 内に存在する．そして，誘導表現の指標公式を使えば，$\chi_{X'}(c) = \chi_{X''}(c)$ となることがわかる．そのほかの場合でも，帰納法の仮定と誘導表現の指標公式を使えば，$\chi_{X'}(c) = \chi_{X''}(c)$ となる．

以上から c が $c(q), c'(q)$ 以外の共役類の場合には $\chi_{X'}(c) = \chi_{X''}(c) = \chi_{X'}(c') = \chi_{X''}(c')$ が成立する．また，指標の関係から X' と X'' は互いに共役であることがわかる．$\square$

[Step2-2]：$\theta = \chi' - \chi''$ とすれば，$(\theta, \theta) = 2$ となる．そして，X', X'' を既約分解すれば，$X' = Y \oplus W'_\lambda$, $X'' = Y \oplus W''_\lambda$ となる．ここで Y は自己共役な表現，また λ は対称な d の分割．

Proof. $\theta = \chi' - \chi''$ に対して．Step2-1 の結果を使えば，

$$\begin{aligned}(\theta, \theta) &= (\chi', \chi') + (\chi'', \chi'') - 2\Re(\chi', \chi'') \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{A}_d|} \sum_C |C| |\chi'(C) - \chi''(C)|^2 \\ &= \frac{1}{|\mathfrak{A}_d|} (|c(q)| q_1 \cdots q_r + |c'(q)| q_1 \cdots q_r) \\ &= \frac{2}{d!} \frac{d!}{2q_1 \cdots q_r} (q_1 \cdots q_r) \times 2 = 2\end{aligned}$$

となる．また X', X'' は互いに共役であった．そこで，指標は

$$\chi' = (i_1\chi'_1 + \cdots + i_l\chi'_l) + (j_{l+1}\chi_{l+1} + \cdots + j_s\chi_s), \quad \chi'' = (i_1\chi''_1 + \cdots i_l\chi''_l) + (j_{l+1}\chi_{l+1} + \cdots + j_s\chi_s)$$

とかける．ここで $\{\chi_i\}_{l+1 \le i \le s}$ は自己共役な表現．よって，

$$\chi' - \chi'' = i_1(\chi'_1 - \chi''_1) + \cdots + i_l(\chi'_l - \chi''_l)$$

となるので，

$$2 = (\theta, \theta) = 2i_1 + \cdots 2i_l$$

となる．よって，$i_1 = 1$ で他はゼロとなる．以上から，$X' = Y \oplus W'_\lambda$, $X'' = Y \oplus W''_\lambda$ となる．ここで Y は自己共役な表現，また λ は自己共役な d の分割． □

[Step2-3]：$X' = Y \oplus W'_\lambda$, $X'' = Y \oplus W''_\lambda$ であり，それぞれの指標 χ', χ'' を考えると $c(q), c'(q)$ でのみ値が異なるのであった．Y は自己共役なので，$c(q), c'(q)$ での値は同じである．よって W'_λ, W''_λ の指標が $c(q), c'(q)$ に対してのみ値が異なることになる．そこで Step 1 を使うと，$c(q), c'(q)$ に対してのみ値が異なることから，実は λ は q の対応する自己共役な分割であることがわかる．以上から，自己共役分割 λ で対角成分の箱が 2 以上の場合には，命題が成立することが証明された．($p = p_1$ の場合にも，λ の対角成分が 2 以上のときは指標が一致することも証明されている)．

[Step2-4]：$r = 1$ の場合を考える．$r = 1$ で自己共役な分割となるのは hook の場合であり，λ を $(\frac{1}{2}(d+1), 1, \cdots, 1)$ という場合である．$q = q_1 = 2m + 1 + d$ とする．$p \neq q$ を奇数の異なる列として，対応する分割を μ とする．このとき，χ'_μ, χ''_μ の値はすでにわかっている．そこで，

$$\begin{aligned}0 = (\chi'_\lambda, \chi'_\mu - \chi''_\mu) &= \sum_C |C| \overline{\chi'_\lambda(C)} (\chi'_\mu(C) - \chi''_\mu(C)) \\ &= |c(p)| \overline{\chi'_\lambda(c(p))} (\chi'_\mu(c(p)) - \chi''_\mu(c(p))) + |c'(p)| \overline{\chi'_\lambda(c'(p))} (\chi'_\mu(c'(p)) - \chi''_\mu(c'(p))) \\ &= |c(p)| \overline{\chi'_\lambda(c(p))} \sqrt{(-1)^m p_1 \cdots p_r} - |c'(p)| \overline{\chi'_\lambda(c'(p))} \sqrt{(-1)^m p_1 \cdots p_r} \\ &= |c(p)| \sqrt{(-1)^m p_1 \cdots p_r} (\overline{\chi'_\lambda(c(p))} - \overline{\chi'_\lambda(c'(p))})\end{aligned}$$

となる．よって $\chi'_\lambda(c(p)) = \chi'_\lambda(c'(p))$ である．同様に，$\chi''_\lambda(c(p)) = \chi''_\lambda(c'(p))$．もちろん split しない共役類でも $\chi'_\lambda(C) = \chi''_\lambda(C)$ となる．

また，Step1-3 から，$\chi_\lambda(c(q) \cup c'(q)) = (-1)^m$ となる．よって，$\chi'_\lambda(c(q)) + \chi''_\lambda(c(q)) = (-1)^m$ となる．$w = \chi'_\lambda(c(q)) = \chi''_\lambda(c(q))$ とすると，$w = (-1)^m/2$ となるが，指標は代数的整数でなければならないので，このようなことは起こらない．よって $\chi'_\lambda(c(q)) \neq \chi''_\lambda(c(q))$ となる．そこで Step 1 を利用することができ，$r = 1$ となる自己共役分割 λ に対しても命題が成立する．

8　Weyl構成

G を群（有限とは限らない）として，G の表現空間を V とする．V の d 次テンソル積表現 $V^{\otimes d}$ を考える．これは G の表現空間であり，さらに対称群も作用する．そこで，ヤング対称化作用素 c_λ を使って，$\mathbb{S}_\lambda V \subset V^{\otimes d}$ という G の新しい表現空間を作ることができる．特に，G がリー群の場合には，このアイデアは重要である．例えば，自然表現から $SL_n(\mathbb{C})$ のすべての表現を構成することが可能である．

8.1　シューア Functor

V を有限次元複素ベクトル空間とする．このとき

$$V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$$

となる．V を $\mathrm{GL}(V)$ の表現空間とみれば，これは既約分解になっている．さらに，

$$V \otimes V \otimes V = S^3V \oplus \Lambda^3 V \oplus \text{(another space)}$$

となる．この残りの空間はなんであろうか？また，$V^{\otimes d}$ の場合にはどうなるであろうか？

$V^{\otimes d}$ へ $\mathfrak{S}_d$ を右作用で

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d)\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}$$

として作用させる．この作用は $\mathrm{GL}(V)$ の左作用と可換である．

Proof. g の作用は $gv_i = w_i$ とすれば，

$$\begin{aligned}(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d))\sigma =& (w_1 \otimes \cdots \otimes w_d)\sigma = w_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(d)} = gv_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma(d)} \\ =& g((v_1 \otimes \cdots v_d)\sigma)\end{aligned}$$

となる（注意：$\mathfrak{S}_d$ を左作用で作用させても可換）． □

そこで群環 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ の元であるヤング対称化作用素 c_λ を使って，

$$\mathbb{S}_\lambda V := \mathrm{im}(c_\lambda|_{V^{\otimes d}})$$

とすれば，これは $\mathrm{GL}(V)$ の表現空間である．ここで c_λ の定義を思い出しておこう．分割 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$ に対するあるヤング盤 T を考える．このとき次の二つの部分群が定義できる．

$$\begin{aligned}P =& P_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d \mid \ g \text{ は } T \text{ の各行を保存する }\} \cong \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \mathfrak{S}_{\lambda_k}, \\ Q =& Q_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d \mid \ g \text{ は } T \text{ の各列を保存する }\} \cong \mathfrak{S}_{\lambda'_1} \times \cdots \mathfrak{S}_{\lambda'_l}.\end{aligned}$$

ここで λ' は共役なヤング盤に対する分割である．これらの部分群を使って，群環 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ に二つの元を定義する:

$$a_\lambda = \sum_{g\in P} g, \quad b_\lambda = \sum_{g\in Q} \operatorname{sgn}(g)g.$$

そして，$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$ とするのであった．

定義 8.1 (シューア functor). λ に対するシューア functor とは，functor $V \to \mathbb{S}_\lambda V$ のことである．これは Weyl 加群とか Weyl の構成などとも呼ばれる．

補足 8.1. ここでの functor という言葉は，$\phi: V \to W$ という線形写像があったときに，$\mathbb{S}_\lambda(\phi): \mathbb{S}_\lambda V \to \mathbb{S}_\lambda W$ という写像が自然に定義され，$\mathbb{S}_\lambda(\phi\circ\psi) = \mathbb{S}_\lambda(\phi)\circ\mathbb{S}_\lambda(\psi)$, $\mathbb{S}_\lambda(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathbb{S}_\lambda W}$ となるという意味で使っている．

例 8.2. $\lambda = d$ という分割を考える．このとき $c_\lambda = a_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\sigma$ となる．そして，

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_d)c_\lambda = v_1\odot\cdots\odot v_d$$

となる．つまり $\mathbb{S}_\lambda V = S^d V$ となる．

次に，$\lambda = 1+\cdots+1$ となる．$c_\lambda = b_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_d}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$ であるので，

$$(v_1\otimes\cdots\otimes v_d)c_\lambda = v_1\wedge\cdots\wedge v_d$$

となる．つまり $\mathbb{S}_\lambda V = \Lambda^d V$ となる．

例 8.3. 分割 $3 = 2+1$ を考える．このとき，例 4.4 で見たように，

$$c_{(2,1)} = 1 + (1,2) - (1,3) - (1,3,2)$$

となる．そこで，

$$\begin{aligned}(v_1\otimes v_2\otimes v_3)c_{(1,2)} =& v_1\otimes v_2\otimes v_3 + v_2\otimes v_1\otimes v_3 - v_3\otimes v_2\otimes v_1 - v_3\otimes v_1\otimes v_2\\ =&(v_1\otimes v_2\otimes v_3 - v_3\otimes v_2\otimes v_1) + (v_2\otimes v_1\otimes v_3 - v_3\otimes v_1\otimes v_2)\end{aligned}$$

となる．つまり，これらで張られる部分空間が $\mathbb{S}_{(2,1)}V$ となる．

これは次のように考えることができる．まず，埋め込み写像 $\iota: \Lambda^2 V\otimes V \to V^{\otimes 3}$ を次で定義

$$(v_1\wedge v_3)\otimes v_2 \mapsto v_1\otimes v_2\otimes v_3 - v_3\otimes v_2\otimes v_1$$

（ここで，添え字をずらしていることに注意．添え字のずらしは $GL(V)$ の作用と可換．つまり $\exists\sigma\in\mathfrak{S}_d$ を作用させてる）．このとき，$\mathbb{S}_{(2,1)}V$ は

$$(v_1\wedge v_3)\otimes v_2 + (v_2\wedge v_3)\otimes v_1$$

により span される $\Lambda^2 V\otimes V$ の部分空間である．そして，

$$\mathbb{S}_{(2,1)}V = \ker(\Lambda^2 V\otimes V \to \Lambda^3 V)$$

となることがわかる．

Proof. 例 4.4 のように $c_{(2,1)}$ として，別のヤング盤に対するものをとる．つまり

$$c'_{(2,1)} = 1 - (1,2) + (1,3) - (1,2,3)$$

とする．このとき，

$$P_{(1,1,1)} = \frac{1}{6}c_{(1,1,1)}, \quad P_{(3)} = \frac{1}{6}c_{(3)}, \quad P_{(2,1)} = \frac{1}{3}c_{(2,1)}, \quad P'_{(2,1)} = \frac{1}{3}c'_{(2,1)}$$

とすれば，これは射影因子である．つまり $P_i^2 = P_i$, $\sum P_i = \mathrm{id}$, $P_iP_j = 0$（$i \neq j$）を満たす．これを $V^{\otimes 3}$ に作用させる．$\mathrm{GL}(V)$ との作用とは可換であるので，$V^{\otimes 3}P_i$ は $\mathrm{GL}(V)$ の表現空間であり，$V^{\otimes 3}$ は直和分解される．そこで，

$$S^3V = \binom{n+2}{3}, \quad \Lambda^3 V = \binom{n}{3}, \quad \dim V^{\otimes 3}c_{(2,1)} = \dim V^{\otimes}c'_{(2,1)}$$

であることから，

$$\dim V^{\otimes 3}c_{(2,1)} = \dim V^{\otimes}c'_{(2,1)} = \frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

となる．さて，$\Lambda^2V \otimes V \to \Lambda^3 V$ の $(v_1 \wedge v_3) \otimes v_2 + (v_2 \wedge v_3) \otimes v_1$ の像は $v_1 \wedge v_3 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 \wedge v_1 = 0$ となるので，$\mathbb{S}_{(2,1)}V \subset \ker(\Lambda^2 V \otimes V \to \Lambda^3 V)$ となる．$\Lambda^2 V \otimes V \to \Lambda^3 V$ は全射であるので，

$$\dim \ker(\Lambda^2 V \otimes V \to \Lambda^3 V) = \binom{n}{2}n - \binom{n}{3} = \frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

となる．よって $\mathbb{S}_{(2,1)}V = \ker(\Lambda^2 V \otimes V \to \Lambda^3 V)$ である． □

上の証明における $\mathbb{S}'_\lambda V = V^{\otimes 3}c'_{(2,1)}$ は

$$\begin{aligned} &v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_2 \otimes v_3 \otimes v_1 \\ =&(v_1 \wedge v_2) \otimes v_3 + (v_3 \wedge v_2) \otimes v_1 \end{aligned}$$

で span される部分空間である．$\Lambda^2 V \otimes V \to V^{\otimes 3}$ への埋め込みを

$$(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 - v_2 \otimes v_1 \otimes v_3$$

で定義すれば，この場合も $\mathbb{S}'_\lambda V = \ker(\Lambda^2 V \otimes V \to \Lambda^3 V)$ とかける．

V の次元が低い場合には，$\mathbb{S}_\lambda V$ はゼロになることがある．実は，これは λ の長さ（行の数）が V の次元より大きいとに起こる.（下の定理をみよ）.

さて，$g \in \mathrm{GL}(V)$ は $\mathbb{S}_\lambda V$ へ作用するが，このトレースを計算しよう．つまり $\mathrm{GL}(V)$ の表現としての指標 $\chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g)$ である．$\dim V = k$ として，$x_1, \cdots, x_k$ を g の V での固有値とする．

まず，$\lambda = (d)$ の場合には，

$$\mathbb{S}_{(d)}V = S^d V. \quad \chi_{\mathbb{S}_{(d)}V}(g) = h_d(x_1, \cdots, x_k)$$

となる．ここで h_d は d 次の完全対称式であり，

$$h_d(x) = \sum_{i_1+\cdots+i_k=d} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}.$$

Proof. g を対角化可能として，$ge_i = x_i e_i$ とする．このとき，$S^d V$ の基底は，

$$e_1^{i_1} \odot \cdots \odot e_k^{i_k}, \quad i_1 + \cdots + i_k = d$$

となり，この基底には g は $x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$ として作用する．よってトレースは $h_d(x_1, \cdots, x_k)$ となる．次に，$\mathrm{GL}(V)$ において，対角化可能な行列は稠密であることを証明しよう．$g \in \mathrm{GL}(V)$ に対して，すべての固有値が重複度 1 となる場合は対角化可能である．対角化できない場合は，g の固有値に重複度がある（逆は不成立だが）．しかし，すこしずらせば重複度なしにすることができる（つまり重複がある場合に，その点の開近傍をとれば，重複度 free にできる）．例えば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\epsilon \end{pmatrix}$$

とすれば，左辺の行列は対角化可能でないが，右辺の行列は対角化可能である．このように，対角化可能な行列は稠密である．そこで，対角化可能な行列 g に対して $\chi_{\mathbb{S}_{(d)}V}(g) = h_d(x_1, \cdots, x_k)$ がいえるので，連続性から対角化不可能な行列に対しても $\chi_{\mathbb{S}_{(d)}V}(g) = h_d(x_1, \cdots, x_k)$ が成立する． □

同様にして，$\lambda = (1, \cdots, 1)$ に対して，

$$\mathbb{S}_{(1,\cdots,1)}V = \Lambda^d V, \quad \chi_{\mathbb{S}_{(1,\cdots,1)}V}(g) = e_d(x_1, \cdots, x_k)$$

となる．ここで e_d は d 次基本対称式であり，

$$e_d = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

そこで一般の場合を考えよう．実は次が成立する．

定理 8.4. *1.* $k = \dim V$ とする．このとき $\lambda_{k+1} \neq 0$（長さが k 以上なら）$\mathbb{S}_\lambda V = 0$ である．また $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ の場合には，

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = S_\lambda(\underbrace{1, \cdots, 1}_{k}) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$

となる．

2. $\mathfrak{S}_d$ の λ に対する既約表現 V_λ の次元を m_λ とすれば，

$$V^{\otimes d} \cong \bigoplus_\lambda (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus m_\lambda}.$$

より詳しく言えば，$V^{\otimes d}$ を左 $GL(V)$，右 $\mathfrak{S}_d$ 加群とみなせば，

$$V^{\otimes d} = \bigoplus_\lambda \mathbb{S}_\lambda V \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda$$

という標準的な同型がある．

3. $g \in \mathrm{GL}(V)$ とする．g の固有値を $x_1, \cdots, x_k$ とすれば，

$$\chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g) = S_\lambda(x_1, \cdots, x_k)$$

4. 各 $\mathbb{S}_\lambda V$ は $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現である．

定理の証明は次の subsection で与える．

系 8.5. 次元は次のように書くこともできる．

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = \frac{m_\lambda}{d!} \prod_{(i,j)} (k - i + j) = \prod_{(i,j)} \frac{k - i + j}{h_{ij}}$$

ここで積は λ の箱の座標を (i, j) としてすべての箱に対して積をとっている（箱は d 個なので，d 個の積）．また h_{ij} は各 (i, j) で *hook* の数である．さらに (5.7) より，$\dim \mathbb{S}_\lambda V$ は λ に対する半標準盤の数に一致する．

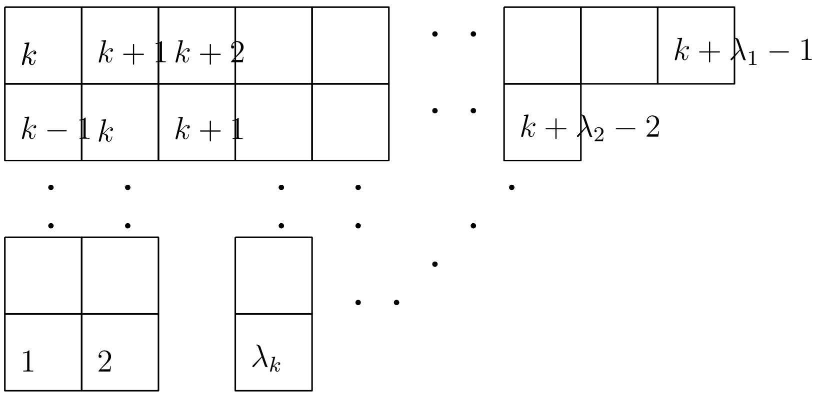
Proof. まず，命題 4.22 により，

$$m_\lambda = \dim V_\lambda = \frac{d!}{(\lambda_1 + k - 1)!(\lambda_2 + k - 2)! \cdots \lambda_k!} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)$$

となる．そこで，

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = \prod_{1\le i<j\le k} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i} = m_\lambda \frac{(\lambda_1+k-1)!(\lambda_2+k-2)!\cdots\lambda_k!}{d!} \prod_{i<j} \frac{1}{j-i}$$
$$= \frac{m_\lambda}{d!} \frac{(\lambda_1+k-1)!(\lambda_2+k-2)!\cdots\lambda_k!}{(k-1)!(k-2)!\cdots 1!}$$

となる．さて，各箱の座標を (i,j) として，$k-i+j$ を書いていくと，



となるので，

$$\prod (k-i+j) = \frac{(\lambda_1+k-1)!}{(k-1)!} \frac{(\lambda_2+k-2)!}{(k-2)!} \cdots \frac{\lambda_k!}{1!}$$

となる．よって，

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = \frac{m_\lambda}{d!} \prod (k-i+j)$$

となる．もう一つの式は命題 4.23 を使えばよい． □

例 8.6. $m_\lambda = V_\lambda$ は標準盤の数を数えればよいので，

$$V^{\otimes 3} \cong S^3V \oplus \Lambda^3 V \oplus (\mathbb{S}_{(2,1)}V)^{\oplus 2},$$
$$V^{\otimes 4} \cong S^4V \oplus \Lambda^4 V \oplus (\mathbb{S}_{(3,1)}V)^{\oplus 3} \oplus (\mathbb{S}_{(2,2)}V)^{\oplus 2} \oplus (\mathbb{S}_{(2,1,1)}V)^{\oplus 3}.$$

となる．

次の系は．次の subsection での定理の証明を読めばすぐにわかる．

系 8.7. $c \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ として，$\mathfrak{S}_d$ の表現として，$(\mathbb{C}\mathfrak{S}_d)c = \oplus_\lambda V_\lambda^{\oplus r_\lambda}$ となったとする．このとき $\mathrm{GL}(V)$ の表現空間として次の分解を得る：

$$V^{\otimes d}c = \oplus_\lambda (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus r_\lambda}$$

また $g \in \mathrm{GL}(V)$ の V での固有値を $x_1, \cdots, x_k$ とすれば，

$$\chi_{V^{\otimes d}c}(g) = \sum r_\lambda S_\lambda(x_1, \cdots, x_k)$$

となる．

補足 8.8. 上の方法で，$\mathrm{GL}(V)$ のすべての表現が構成できるわけではない．実際，上で作った表現の双対表現は，上の構成には含まれない．しかし，残りの既約表現は次のように構成できる．$\dim V = k$ として，$\Lambda^k V^* \cong (\Lambda^k V)^*$ という表現を考える．これは 1 次元表現である．このとき，

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes (\Lambda^k V^*)^{\otimes a}, \quad a \in \mathbb{N}$$

を考えると，残りの表現を構成することができる．逆にいえば，すべての既約表現は $\Lambda^k V$ を何回かテンソル積することにより $\mathbb{S}_\lambda V$（$\exists\lambda$）と同値にできるのである．また，後で述べる例 8.18 で見るように，

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \Lambda^k V \cong \mathbb{S}_{(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_k+1)} V$$

となる．

そこで，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ を $\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^k$ から $\mathbb{Z}^k$ へと拡張する．つまり，λ は

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^k, \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \tag{8.1}$$

を満たすものとする．$\lambda_k \geq 0$ なら，この λ に対して既約表現 $\mathbb{S}_\lambda V$ を対応させる．また $\lambda_k < 0$ の場合には，既約表現

$$\mathbb{S}_{(\lambda_1-\lambda_k,\lambda_2-\lambda_k,\cdots,\lambda_{k-1}-\lambda_k,0)}(V) \otimes (\Lambda^k V^*)^{\otimes(-\lambda_k)}$$

を対応させる．

このようにして，$GL(V)$ の既約表現は (8.1) によってパラメタライズできる．(実は，λ が highest weight に対応している）．

また $SL(V)$ の既約表現を分類する場合には，$\Lambda^k V$ が自明表現と同値なので，$(\Lambda^k V)^{\otimes a}$ を無視すればよい．つまり，次のようにしてパラメタライズできる．

$$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^k \mod (1, \cdots, 1), \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$$

この λ に対応した既約表現を構成するには，$GL(V)$ での λ に対応した既約表現を作って $SL(V)$ へ制限すればよい．

補足 8.9. 命題 5.33 において，

$$S_\lambda(x_1, \cdots, x_k) = M_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K_{\lambda\mu} M_\mu$$

となり，$K_{\lambda\mu}$ は S_λ における，$X^\mu = x_1^{\mu_1} \cdots x_k^{\mu_k}$ の係数である．この係数は $GL(V)$ の表現空間 $\mathbb{S}_\lambda V$ を weight 分解したときの weight μ の重複度である．つまり，$\mathbb{S}_\lambda V$ **における weight μ の重複度は，Kostka 数 $K_{\lambda\mu}$ である．**つまり，ヤング図形 λ に μ_1 個の 1，μ_2 個の 2，$\cdots$ μ_k 個の k を各行で非減少，各列で増加になるように埋めていく方法がいくつあるかかぞえればよい．特に，$\mathbb{S}_\lambda V$ において，λ が highest weight になるが，この重複度は 1 である．

8.2 証明

まず一般論からはじめる．G を有限群とし，$A = \mathbb{C}G$ と書く．U を $A = \mathbb{C}G$ 右加群として，

$$B = \mathrm{Hom}_G(U, U) = \{\phi : U \to U \mid \phi(vg) = \phi(v)g,\ \forall v \in U, g \in G\}$$

とする．これは U へ左から作用してるとして，A の右作用と可換である．これを**交換子代数**とよぶ．G に関して U の既約分解を $U = \oplus U_i^{\oplus n_i}$ とすれば，シューアの補題から，

$$B = \oplus_i \mathrm{Hom}_G(U_i^{\oplus n_i}, U_i^{\oplus n_i}) = \oplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$$

と，行列代数の直和になる．

補足 8.10. ちょっと具体的に書いてみよう．$\mathbb{C}G$ の既約表現を W として，$W \oplus W$ を考える．ここには $\mathbb{C}G \ni X \to (\rho_W(X), \rho_W(X)) \in \mathrm{End}(W \oplus W)$ として作用する．つまり

$$\begin{pmatrix} \rho_W(X) & 0 \\ 0 & \rho_W(X) \end{pmatrix}$$

となる．W が既約であることから定理 3.49 より，代数準同型 $\mathbb{C}G \to \mathrm{End}(W)$ は全射である．つまり $\mathrm{End}(W) = \{\rho(X) \mid X \in \mathbb{C}G\}$ となる．また $\forall A \in \mathrm{End}(W)$ と可換なものは $\mathbb{C}I$ である．そこで，交換子代数 B は，

$$B = \{\begin{pmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\} = M_2(\mathbb{C})$$

である．実際，

$$\begin{pmatrix} \rho_W(X) & 0 \\ 0 & \rho_W(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho(W) & b\rho(W) \\ c\rho(W) & d\rho(W) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aI & bI \\ cI & dI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_W(X) & 0 \\ 0 & \rho_W(X) \end{pmatrix}$$

となる．また，この B に対する交換子代数は，

$$\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{End}(W)\}$$

となる．一方，$W \ncong W'$ なら $W \oplus W'$ という空間では，うまく基底をとっても $\rho_W(X) \neq \rho_{W'}(X)$ となる X が存在する（存在しなかったら同値になってしまう）．よって，この場合に交換子代数 B は

$$B = \{\begin{pmatrix} aI & 0 \\ 0 & bI \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

となる．また B に対する交換子環は，

$$\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{End}(W), B \in \mathrm{End}(W')\}$$

となる．

さて，W を任意の左 A 加群として，

$$U \otimes_A W = U \otimes_{\mathbb{C}} W/\{ua \otimes w - u \otimes aw\}$$

を考える．これは $b(u \otimes w) = (bu) \otimes w$ により，左 B 加群である．

補題 8.11. U を有限次元右 A 加群とする．

1. 任意の $c \in A$ に対して，標準写像 $U \otimes_A Ac \to Uc$ は左 B 加群として同型．
2. $W = Ac$ が左 A 加群として既約とすると，$U \otimes_A W = Uc$ は B 加群として既約．
3. すべての既約左 A 加群を $\{W_i = Ac_i\}_i$ として，$\dim W_i = m_i$ とする．つまり $A \cong W_i^{\oplus m_i}$．このとき，

$$U \cong \oplus_i (U \otimes_A W_i)^{\oplus m_i} \cong \oplus_i (Uc_i)^{\oplus m_i}$$

となる．さらに，詳しくいうと，U を左 B-右 A 加群としてみれば，

$$U = \bigoplus_i (U \otimes_A W_i) \otimes W_i$$

という標準的な既約分解を得る．

Proof. 1. まず，G が有限群なので完全可約であった．そこで Ac に対して $Ac \oplus W' = A$ となる W' が存在する．つまり Ac は直和因子である．

次の左 B 加群としての可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccc} U \otimes_A A & \xrightarrow{\cdot c} & U \otimes_A Ac & \xrightarrow{\iota} & U \otimes_A A \\ \cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong \\ U & \xrightarrow{\cdot c} & U \cdot c & \xrightarrow{\iota} & U \end{array}$$

ここで垂直方向の写像は $v \otimes a \mapsto v \cdot a$ としたものである．左側の水平方向は全射であり，右側の水平方向は単射である．また，外側の垂直方向は同型である．よって，真ん中の垂直方向は同型となる．以上から，$U \otimes_A Ac \to Uc$ は左 B 加群として同型．

2. まず U が A 加群として既約の場合を考える．このとき $B=\mathbb{C}$ である．B は可換となるので，Uc が既約を証明するには，$\dim Uc \leq 1$ を証明すればよい．定理 3.49 から，環として，

$$A=\mathbb{C}G=\oplus_{i=1}^{r}\mathrm{End}(W_i),\quad \dim W_i=m_i$$

とみなす．ここで右辺は A のすべての既約表現で和をとっている．つまり $A=\oplus_{i=1}^{r}M(m_i,\mathbb{C})$ となる．$W=Ac$ は既約なので，section 3.10.3 で見たように，A の最小左イデアルである．**行列環 $M(n,\mathbb{C})$ の左イデアルは，ある列のみがゼロでないような行列の空間またはそれらの直和**である．また，**ある列のみがゼロでない空間，つまり各列は最小イデアルである．このように各列は既約表現を与え，互いに同値**である．そこで，A の左イデアルもそれらを組み合わせたものである．よって A の最小左イデアルは，ある i に対する $M(m_i,\mathbb{C})$ の k_i 列目のみゼロでない空間のことである．同様に，U は A の最小右イデアルとみなせるので，ある j に対する $M(m_j,\mathbb{C})$ の l_j 行目のみゼロでない空間である．そこで，$U\otimes_A W$ は U と W に対する i と j が一致するときは，$M(m_i,\mathbb{C})$ の第 (l_i,k_i) 成分のみゼロでない行列となる（1 次元）．一致しないときはゼロである．よって $\dim Uc=\dim U\otimes_A W\leq 1$ となる．

補足 8.12. もう少し具体的に書いてみれば次のよう．$i=j$ として，$M(m_i,\mathbb{C})$ の l_i 行目と k_i 列目のも取り出し書いている．

$$\begin{aligned}
&(a_1,\cdots,a_n)\otimes_{M(n,\mathbb{C})}{}^t(b_1,\cdots b_n)\\
=&(1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_n\\0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}\otimes_{M(n,\mathbb{C})}\begin{pmatrix}b_1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\
=&(1,0,\cdots,0)\otimes_{M(n,\mathbb{C})}\begin{pmatrix}a_1&\cdots&a_n\\0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_n&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\\
=&(\sum a_ib_i)(1,0,\cdots,0)\otimes_{M(n,\mathbb{C})}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

次に，U が既約でないときを考えよう．$U=\oplus_\alpha U_\alpha^{\oplus n_\alpha}$ と既約分解する．上の議論から $U\otimes_A W=\oplus_\alpha(U_\alpha\otimes_A W)^{\oplus n_\alpha}=\mathbb{C}^{\oplus n_\beta}$（$\exists\beta$）となる．これは $B=\oplus_\alpha M(n_\alpha,\mathbb{C})$ の作用に関して既約である．

3. 三番目の主張を証明しよう．$A \cong \oplus W_i^{\oplus m_i}$ とする．このとき

$$U \cong U \otimes_A A \cong U \otimes_A (\oplus_i W_i^{\oplus m_i}) = \oplus_i (U \otimes_A W_i)^{\oplus m_i} \cong \oplus_i (U c_i)^{\oplus m_i}$$

となる．さらに，定理 3.49 の証明にあるように，$A = \mathbb{C}G$ を $G \times G$ 加群とみなす．つまり，$(g, g') \in G \times G$ に対して，

$$A \ni h \mapsto (g, g')h = g h g'^{-1} \in A$$

とみなせば，左 $G \times G$ 加群として，$A = \oplus_i \mathrm{End}(W_i) = \oplus W_i \otimes W_i^*$ と既約分解されるのであった．これは $G \times G$ 加群として，標準的な同型である．(G 加群としては $A \cong \oplus W_i^{\dim W_i}$ という同型しかいえない)．そこで，

$$U = U \otimes_A (\oplus_i W_i \otimes_{\mathbb{C}} W_i^*) = \bigoplus (U \otimes_A W_i) \otimes_{\mathbb{C}} W_i^*$$

となる．左 G 加群 W_i^* は右 G 加群としては W_i になるので，$U = \bigoplus (U \otimes_A W_i) \otimes_{\mathbb{C}} W_i$ となる．

□

さて，定理を証明するために，上の補題を $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 加群 $U = V^{\otimes d}$ へ適用する．まず，$B = \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}(U)$ である．また $\mathrm{End}(V)$ から引き起こされる $\mathrm{End}(U)$ への写像を考える．

$$\iota : \mathrm{End}(V) \ni A \mapsto A \otimes \cdots \otimes A \in \mathrm{End}(U)$$

これは線形写像ではない（$A{+}B$ の像を考えてみよ)．よって，線形空間ではない．この部分集合 $\iota(\mathrm{End}(V))$ は $\mathfrak{S}_d$ の作用と可換であるので，$\iota(\mathrm{End}(V)) \subset B \subset \mathrm{End}(U)$ となる．実は，対称群に場合には次が成立する．

補題 8.13. $B = \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}(U) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\iota(\mathrm{End}(V))\}$ となる．また $V^{\otimes d}$ の部分空間が B 加群となるための必要十分条件は，その部分空間が $\mathrm{GL}(V)$ により不変部分空間であること．

Proof. まず，

$$\mathrm{End}(V^{\otimes d}) = (V^*)^{\otimes d} \otimes V^{\otimes d} = (\mathrm{End}(V))^{\otimes d}$$

となるが，この同型は $\mathfrak{S}_d$ の作用と可換である．そこで，

$$B = \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d}) = \mathrm{End}(V^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d} = (\mathrm{End}(V)^{\otimes d})^{\mathfrak{S}_d} = S^d(\mathrm{End}(V))$$

となる．一般に，W を有限次元ベクトル空間とすれば，

$$S^d(W) = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{w^d = w \otimes \cdots \otimes w \mid w \in W\} \subset W^{\otimes d}$$

となる．そこで，$W = \mathrm{End}(V)$ とすれば，

$$B = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{A \otimes \cdots \otimes A \mid A \in \mathrm{End}(V)\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\iota(\mathrm{End}(V))\}$$

となる．これで，第一の主張がいえた．

また，$V^{\otimes d}$ の部分空間 X が B 加群とする．$g \in \mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ に対して，$g \otimes \cdots \otimes g \in S^d(\mathrm{End}(V)) = B$ であるので，X は $\mathrm{GL}(V)$ の作用で不変部分空間である．逆に $\mathrm{GL}(V)$ の作用で $X \subset V^{\otimes d}$ が不変部分空間であるとする．$\mathrm{GL}(V)$ は $\mathrm{End}(V)$ は稠密であるので，$\mathrm{End}(V)$ でも不変部分空間である．つまり $A \in \mathrm{End}(V)$ に対して，$A \otimes \cdots \otimes A$ で $V^{\otimes d}$ へ作用させたものに対して，不変部分空間である．よって B 加群となる． □

Proof of Theorem 8.4. まず，上の補題から $V^{\otimes d}$ 内で左 B 加群であること，左 $\mathrm{GL}(V)$ 加群であることは同値である（既約などの条件も同値）．そこで，補題 8.11 を $U = V^{\otimes d}$, $G = \mathfrak{S}_d$, $A = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ として適用する．このとき B 加群というところは $\mathrm{GL}(V)$ 加群としてもかまわない．

まず，λ に対するヤング対称化作用素を c_λ とすれば，$V_\lambda = (\mathbb{C}\mathfrak{S}_d)c_\lambda$ は $\mathfrak{S}_d$ の（左）既約表現である．よって，$V^{\otimes d}c_\lambda = \mathbb{S}_\lambda V$ は既約 $\mathrm{GL}(V)$ 表現である．また，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_d = \oplus V_\lambda^{\oplus m_\lambda}$ であるので，

$$V^{\otimes d} \cong (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus m_\lambda}$$

となる．さらに $V^{\otimes d}$ を左 $\mathrm{GL}(V)$-右 $\mathfrak{S}_d$ 加群とみれば，

$$V^{\otimes d} = \bigoplus \mathbb{S}_\lambda V \otimes_{\mathbb{C}} V_\lambda$$

となる．

次に指標を見ていこう．まず，

$$\mathbb{S}_\lambda V \cong V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d} V_\lambda$$

である．同様に，$U_\lambda = (\mathbb{C}\mathfrak{S}_d)a_\lambda$ に対して考えると，

$$V^{\otimes d}a_\lambda = S^{\lambda_1}V \otimes S^{\lambda_2}V \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_k}V \cong V^{\otimes d} \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d} U_\lambda$$

となる．また系 6.3 から

$$U_\lambda = V_\lambda \oplus_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$$

であるので，

$$S^{\lambda_1}V \otimes S^{\lambda_2}V \otimes \cdots \otimes S^{\lambda_k}V \cong \mathbb{S}_\lambda V \oplus_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} \mathbb{S}_\mu V$$

となる．この両辺で指標を考えると，$S^{\lambda_i}V$ の指標は h_{λ_i} であることはわかっているので，

$$H_\lambda(x_1, \cdots, x_k) = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_k} = \sum_{\mu \geq \lambda} K_{\mu\lambda} \chi_{\mathbb{S}_\mu V}(g)$$

となる．また，補題 5.27 から H_λ とシューア多項式の関係がわかる．そこで，すべての分割を考えていけば $K_{\mu\lambda}$ は逆行列をもつので，上の $\chi_{\mathbb{S}_\mu V}(g)$ はシューア多項式 $S_\mu(x)$ となる．よって，

$$\chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g) = S_\lambda(x_1, \cdots, x_k)$$

となる．

また $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ で $d > k$ かつ $\lambda_{k+1} \neq 0$ の場合を考えると，指標は

$$S_\lambda(x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0) = 0$$

となる（命題 5.9 を使えばよい）．また，そうでない場合は，例 5.36 から，

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = \chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(e) = S_\lambda(1, \cdots, 1) = \prod_{i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$

となる． □

この証明から系 8.7 が成立することは明らかであろう．

また，次の系がわかる．

系 8.14. $\mathbb{C}$ 上代数 $\mathrm{Hom}_{GL(V)}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d})$ は $\mathfrak{S}_d$ により張られる．

補題 8.15. 補題 *8.11* において，U が A の忠実な表現であるとする．また A の交換子代数を B とする．このとき B の交換子代数は A となる．また U が忠実でない場合には，A から B の交換子代数への標準的な写像は全射である．

Proof. U が右 A 加群であることから代数準同形 $A \to \mathrm{End}(U)$ を得る．さらに B の作用と可換であるので，$A \to \mathrm{End}_B(U)$ という写像を得る．また，$U = \oplus_i U_i^{\otimes n_i}$ と A に関して既約分解すれば，$B \cong \oplus M(n_i, \mathbb{C})$ という行列代数である．この章の始めにみたように，B と可換な $\mathrm{End}(U)$ は，$\bigoplus_i \mathrm{End}(U_i)$ である．よって，$A = \bigoplus_i \mathrm{End}(W_i)$ とあらわせば，U_i に対して，ある W_{k_i} があって，A 加群として $U_i = W_{k_i}$ となるので，$A \to \mathrm{End}_B(U)$ は全射である．また U が忠実な表現なら $A \to \mathrm{End}_B(U) \subset \mathrm{End}(U)$ は単射であるので，全単射となり，$\mathrm{End}_B(U, U) = A$ となる． □

この補題を適用する．$B = \mathrm{End}_{\mathfrak{S}_d}(V^{\otimes d})$ に対する交換子環は $\mathrm{GL}(V)$ と可換なものである．よって，$\mathrm{Hom}_{GL(V)}(V^{\otimes d}, V^{\otimes d}) = \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ となり，$\mathfrak{S}_d$ により張られる．

8.3 応用

まず，$GL(V)$ の表現のテンソル積分解の公式を考えよう．

命題 8.16. λ を d の分割．μ を m の分割とする．このとき，

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V = \oplus_\nu N_{\lambda\mu\nu} \mathbb{S}_\nu V$$

となる．ここで ν は $d+m$ に対する分割であり，$N_{\lambda\mu\nu}$ は *Littlewood-Richardson rule* による．

次の二つは特別な場合であり，Pieri の公式から従う．

系 8.17. $\mu = (m)$ の場合を考えると，

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes S^m V \cong \oplus_\nu \mathbb{S}_\nu V$$

となる．ここで，ν は，λ の後ろに m 個の箱を加えたもので，各列には二つ以上の箱をつけないようなヤング図形である．
また，$m = (1, \cdots, 1)$ の場合には，

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \Lambda^m V = \oplus_\pi \mathbb{S}_\pi V$$

となる．ここで π は，λ に m 個の箱を加えたもので，各行には二つ以上の箱をつけないようなヤング図形である．

例 8.18. $\dim V = m$ の場合を考える．$\Lambda^m V$ は一次元である．$GL(V)$ の表現としては，

$$GL(V) \ni g \mapsto \det(g) \in GL(\Lambda^m(V))$$

という determinant 表現である．そして，

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \Lambda^m V = \mathbb{S}_{(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_m+1)} V$$

となる．つまり，各行に箱を一つずつ足したものになる．さらに $SL(V)$ の表現としてみれば，$\Lambda^m V$ は自明表現と同型であるので，$SL(V)$ 加群として $\mathbb{S}_\lambda V \cong \mathbb{S}_{(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_m+1)} V$ となる．

Proof of Proposition. $c_\lambda \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$, $c_\mu \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_m$ をとり，$\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes d} c_\lambda$, $\mathbb{S}_\mu V = V^{\otimes m} c_\mu$ とする．群環の環としてのテンソル積 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_m$ を考えると，これは $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m)$ と同型であり，さらに $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_m) \subset \mathbb{C}\mathfrak{S}_{d+m}$ と見なせる．そこで，$c := c_\lambda \otimes c_\mu \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_{d+m}$ と見なして，$V^{\otimes d+m}$ へ作用させることができる．つまり，

$$V^{\otimes d} c_\lambda \otimes V^{\otimes m} c_\mu = (V^{\otimes d} \otimes V^{\otimes m})(c_\lambda \otimes c_\mu) = V^{\otimes d+m} c$$

となる．系 8.7 より，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_{d+m} c = \oplus_\nu V_\nu^{\oplus r_\nu}$ とすれば，

$$V^{\otimes d+m} c = \oplus_\nu (\mathbb{S}_\nu V)^{\oplus r_\nu}$$

となり，さらに指標が $\sum r_\nu S_\nu(x_1,\cdots,x_k)$ となる．そこで，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_{d+m}c$ の意味を考えると，$\mathbb{C}\mathfrak{S}_{d+m}\otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\otimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_m}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_d c_\lambda\boxtimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_m c_\mu)$ であるので，これは $\mathrm{Ind}(V_\lambda\boxtimes V_\mu)$ を意味する．命題 6.10 より，

$$V_\lambda\circ V_\mu=\mathrm{Ind}(V_\lambda\boxtimes V_\mu)=\sum_\nu N_{\lambda\mu\nu}V_\nu$$

となる．よって，

$$\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu V=\oplus_\nu N_{\lambda\mu\nu}\mathbb{S}_\nu V$$

を得る．

別証明 : すでに $\mathrm{GL}(V)$ の表現空間としての $\mathbb{S}_\lambda V$, $\mathbb{S}_\mu V$ の指標はわかっている．つまり S_λ, S_μ である．テンソル積表現の指標は積になるので，Littlewood-Ricardson rule から

$$S_\lambda S_\mu=\sum N_{\lambda\mu\nu}S_\nu$$

となる．よって，

$$\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu V=\oplus_\nu N_{\lambda\mu\nu}\mathbb{S}_\nu V$$

となる． □

例 8.19. $S^dV\otimes V=S^{d+1}V\oplus\mathbb{S}_{(d,1)}V$ となる．よって，

$$\mathbb{S}_{(d,1)}V=\ker(S^dV\otimes V\to S^{d+1}V)$$

となる．また $\Lambda^dV\otimes V=\Lambda^{d+1}V\oplus\mathbb{S}_{(2,1,\cdots,1)}V$ となるので，

$$\mathbb{S}_{(2,1,\cdots,1)}V=\ker(\Lambda^dV\otimes V\to\Lambda^{d+1}V)$$

となる．

例 8.20. $\mathbb{S}_\lambda V\oplus\mathbb{S}_\mu V$ を既約分解したときに，$\nu=\lambda+\mu$ とすれば，$\mathbb{S}_\nu V$ は重複度 1 で必ず現れる．これは $N_{\lambda\mu\nu}=1$ となることを確かめればよい．

命題 8.21. *1.* まずは，よく知られた分解．$\mathrm{GL}(V)\times\mathrm{GL}(W)$ の表現として，

$$S^n(V\oplus W)=\bigoplus_{a+b=n}S^aV\otimes S^bW,\quad \Lambda^n(V\oplus W)=\bigoplus_{a+b=n}\Lambda^aV\otimes\Lambda^bW$$

2. 上を一般化する．$|\nu|=n$ とすると，

$$\mathbb{S}_\nu(V\oplus W)=\bigoplus_{|\lambda|+|\mu|=n}N_{\lambda\mu\nu}(\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu W)$$

ここで，和は $|\lambda|+|\mu|=n$ なるすべての λ,μ に対して和をとっている．つまり，

$$\bigoplus_{a+b=n}\bigoplus_{|\lambda|=a,|\mu|=b}N_{\lambda\mu\nu}(\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu W)$$

である．

3. 次にテンソル積空間に対して考える．$|\nu|=d$ とする．$\mathrm{GL}(V)\times\mathrm{GL}(W)$ の表現として，

$$\mathbb{S}_\nu(V\otimes W)=\bigoplus_{|\lambda|=d,|\mu|=d}C_{\lambda\mu\nu}(\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu W).$$

となる.（正確には，記号として「$\otimes$」ではなく,「$\boxtimes$」を使うべき）.

4. 上の分解の特別な場合を考えると，

$$S^d(V\otimes W)=\bigoplus_\lambda\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\lambda W$$

ここで λ は d の分割で，行の長さ $l(\lambda)$ が $l(\lambda)\leq\min\{\dim V,\dim W\}$ となるもの．また W を W^* に変えれば，上の分解は，$\mathrm{Hom}(V,W)$ 上の次数 d の多項式の空間を $\mathrm{GL}(V)\times\mathrm{GL}(W)$ に対して既約分解したものになっている．

5. 同様に，

$$\Lambda^d(V\otimes W)=\bigoplus_\lambda\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_{\lambda'}W$$

となる．ここで λ は d の分割で，行の長さが $\dim V$ 以下であり列の長さが $\dim W$ 以下のものである．

Proof. まず $S^n(V\oplus W)=\oplus_{a+b=n}S^aV\otimes S^bW$ は

$$v_1\odot\cdots\odot v_a\otimes w_1\odot\cdots\odot w_b\mapsto v_1\odot\cdots\odot v_a\odot w_1\odot\cdots\odot w_b$$

を使えばよい．$\Lambda^n(V\oplus W)=\oplus_{a+b=n}\Lambda^aV\otimes\Lambda^bW$ も同様．

次に，$\mathbb{S}_\nu(V\oplus W)=\oplus_{\lambda,\mu}N_{\lambda\mu\nu}(\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu W)$ を証明する．まず練習として $d=3$ の場合を考えよう．

$$\begin{aligned}
&(V\otimes W)^{\otimes 3}\\
=&V^{\otimes 3}+V\otimes V\otimes W+V\otimes W\otimes V+W\otimes V\otimes V\\
&\quad+V\otimes W\otimes W+W\otimes V\otimes W+W\otimes W\otimes V+W^{\otimes 3}\\
=&V^{\otimes 3}\otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_3}\mathbb{C}\mathfrak{S}_3+(V^{\otimes 2}\otimes W)\otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_1)}\mathbb{C}\mathfrak{S}_3\\
&\quad+(V\otimes W^{\otimes 2})\otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{S}_1\times\mathfrak{S}_2)}\mathbb{C}\mathfrak{S}_3+W^{\otimes 3}\otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_3}\mathbb{C}\mathfrak{S}_3
\end{aligned}$$

となる．そこで，一般の場合は，

$$(V\oplus W)^{\otimes d}=\oplus_{a+b=d}(V^{\otimes a}\otimes W^{\otimes b})\otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b)}\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$$

となる．この両辺に $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 左加群 $V_\nu=\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\nu$ をテンソルすると，

$$\mathbb{S}_\nu(V\oplus W)=(V\oplus W)^{\otimes d}c_\nu=\oplus_{a+b=d}(V^{\otimes a}\otimes W^{\otimes b})\otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b)}\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b}V_\nu$$

となる．$\mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b}V_\nu$ において，命題 6.14 から，$V_\lambda\boxtimes V_\mu$ の重複度は $N_{\lambda\mu\nu}$ である．よって，

$$\oplus_{a+b=d}\,(V^{\otimes a}\otimes W^{\otimes b})\otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{S}_a\times\mathfrak{S}_b)}\mathrm{Res}V_\nu=\sum_{\lambda\mu}N_{\lambda\mu\nu}\oplus_{a+b=d}(V^{\otimes a}\otimes W^{\otimes b})c_\lambda\otimes c_\mu$$

$$=\bigoplus_{|\lambda|+|\mu|=|\nu|}N_{\lambda\mu\nu}(\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu W)$$

となる．

次に，$\mathbb{S}_\nu(V\otimes W)=\oplus C_{\lambda\mu\nu}(\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu W)$ を証明しよう．まず $\mathfrak{S}_d$ を $\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_d$ へ対角に埋め込む．このときの誘導表現 $\mathrm{Ind}V_\nu$ を考える．$\mathfrak{S}_d\times\mathfrak{S}_d$ の既約表現は $V_\lambda\boxtimes V_\nu$ の形であり，$\mathrm{Res}V_\lambda\boxtimes V_\nu=V_\lambda\otimes V_\nu$ であるので，フロベニウスの相互律より，

$$(\chi_{\mathrm{Ind}V_\nu},\chi_{\lambda\boxtimes\nu})=(\chi_\nu,\chi_{\mathrm{Res}V_\lambda\boxtimes V_\mu})=(\chi_\nu,\chi_\lambda\chi_\mu)$$

となる．よって，命題 6.26 より，

$$(\chi_{\mathrm{Ind}V_\nu},\chi_{\lambda\boxtimes\nu})=C_{\lambda\mu\nu},\quad \mathrm{Ind}V_\nu=\bigoplus C_{\lambda\mu\nu}V_\lambda\boxtimes V_\nu$$

となる．そこで，左 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\otimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 加群として，

$$(\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\otimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_d)\otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d}\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\nu=\bigoplus C_{\lambda\mu\nu}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\lambda\otimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\mu)$$

をえる．一方，$(V\otimes W)^{\otimes d}=V^{\otimes d}\otimes W^{\otimes d}$ として右 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\otimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ 加群みれば，

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}_\nu(V\otimes W)=(V\otimes W)^{\otimes d}\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\nu\\
=&(V^{\otimes d}\otimes W^{\otimes d})(\mathbb{C}\mathfrak{S}_d\otimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_d)\otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_d}\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\nu\\
=&\bigoplus C_{\lambda\mu\nu}(V^{\otimes d}\otimes W^{\otimes d})(\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\lambda\otimes\mathbb{C}\mathfrak{S}_dc_\mu)\\
=&\bigoplus C_{\lambda\mu\nu}\mathbb{S}_\lambda V\otimes\mathbb{S}_\mu V
\end{aligned}$$

となる．

　残りは系 6.27 から従う． □

例 8.22. $V = \mathbb{C}^n$, $W = \mathbb{C}^2$ として，$\Lambda^d(V \otimes W)$ の分解を考える．λ としては，d の分割で，行の長さが $\dim V$ 以下，列の長さが $\dim W = 2$ 以下のものを考えればよいので，ヤング図形としては，

$$\lambda = (\underbrace{2, \cdots, 2}_{a}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{d-2a}), \quad (\lambda' = (d-a, a))$$

となる．上の λ を $(2_a, 1_{d-2a})$ と書けば，

$$\Lambda^d(V \otimes W) = \oplus_{0 \leq a \leq [d/2]} \mathbb{S}_{(2_a, 1_{d-2a})} V \otimes \mathbb{S}_{(d-a,a)} W$$

を得る．また，$\Lambda^2 W = \mathbb{S}_{(1,1)} W$ であるので，

$$\mathbb{S}_{(d-a,a)} W \cong (\Lambda^2 W)^a \otimes \mathbb{S}_{(d-2a)} W \cong (\Lambda^2 W)^a \otimes S^{d-2a} W$$

となる．よって，$GL(V) \times SL(W)$ 加群として，

$$\Lambda^d(V \otimes W) = \oplus_{0 \leq a \leq [d/2]} \mathbb{S}_{(2_a, 1_{d-2a})} V \otimes S^{d-2a} W$$

となる．

　次に，$\mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{C})$ の表現を部分群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ へ制限したときに，どのように分解されるかを見てみる．

系 8.23. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \{1\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{C})$$

とみなす．$\mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{C})$ の既約表現 $\mathbb{S}_\nu(\mathbb{C}^{n+m})$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ へ制限すると，

$$\mathrm{Res}(\mathbb{S}_\nu(\mathbb{C}^{n+m})) = \sum (N_{\lambda\mu\nu} \dim S_\mu(\mathbb{C}^m)) \mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n)$$

となる．特に，$m = 1$ の場合を考えると，*Pieri* の公式から，

$$\mathrm{Res}(\mathbb{S}_\nu(\mathbb{C}^{n+1})) = \bigoplus \mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n)$$

となる．ここで λ は ν から任意の個数の箱を同じ列から二つ以上とらないように抜いたヤング図形である．つまり，$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ の既約表現 $\mathbb{S}_\nu(\mathbb{C}^{n+1})$ を

$$\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_{n+1} \geq 0, \quad (\nu_{n+2} = \nu_{n+3} = \cdots = 0)$$

と表したとき，

$$\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \nu_{n+1}$$

となるものである．これを**分岐則**という．

Proof. 前命題より，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の表現として，

$$\mathbb{S}_\nu(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m) = \bigoplus N_{\lambda\mu\nu} \mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{S}_\nu(\mathbb{C}^m)$$

となる．これを $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \{1\}$ へ制限すればよい． □

例 8.24. $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_r)$ を d の分割とする．このとき

$$\Lambda^{\mu_1} V \otimes \Lambda^{\mu_2} V \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\mu_r} V \cong \bigoplus K_{\lambda\mu} \mathbb{S}_{\lambda'} V$$

となる．ここで $K_{\lambda\mu}$ は Kostka 数であり，λ' は λ の共役．

Proof. 証明１：指標を計算する．$\Lambda^{\mu_i} V$ の指標は，$e_{\mu_i}(x_1, \cdots, x_k)$ である．よって，左辺の指標は，

$$E_\mu = e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_r}$$

である．これをシューア多項式であらわせばよい．そこで，例 5.48 を使えば，

$$E_\mu = \sum K_{\lambda\mu} S_{\lambda'}$$

となる．よって，証明された．

証明２：ヤング対称化作用素 $c_\mu = a_\mu b_\mu$ の b_μ の定義を思い出すと，

$$b_\mu = \sum_{g \in Q} \mathrm{sgn}(g) g$$

であった．ここで Q は μ に対するヤング盤の各列を保存する部分群であった．そこで，$b_{\mu'}$ を考えれば，

$$\Lambda^{\mu_1} V \otimes \Lambda^{\mu_2} V \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\mu_r} V = V^{\otimes d} b_{\mu'}$$

となる．また，Section 6.2.4 から，

$$\mathbb{C}\mathfrak{S}_d b_{\mu'} = \sum K_{\lambda\mu} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d c_{\lambda'}$$

が成立していた．よって，

$$V^{\otimes d} b_{\mu'} = \sum K_{\lambda\mu} V^{\otimes d} c_{\lambda'} = \bigoplus K_{\lambda\mu} \mathbb{S}_{\lambda'} V$$

を得る． □

例 8.25. λ' を λ の共役とする．このとき次の写像を考える．

$$\bigotimes_i (\Lambda^{\lambda'_i} V) \to \bigotimes_i (\otimes^{\lambda'_i} V) \to V^{\otimes d} \to \bigotimes_j (\otimes^{\lambda_j} V) \to \bigotimes_j (S^{\lambda_j} V).$$

この合成写像の像は $\mathbb{S}_\lambda V$ となる．同様に，

$$\bigotimes_i (S^{\lambda_i} V) \to \bigotimes_i (\otimes^{\lambda_i} V) \to V^{\otimes d} \to \bigotimes_j (\otimes^{\lambda'_j} V) \to \bigotimes_j (\Lambda^{\lambda'_j} V).$$

の像も $\mathbb{S}_\lambda V$ となる．

Proof. $\mathbb{C}G = A$ とする．$V_\lambda = Ac_\lambda = Aa_\lambda b_\lambda$ となるのであった．また $U_\lambda = Aa_\lambda$ とする．このとき V_λ は

$$U_\lambda = Aa_\lambda \xrightarrow{\times b_\lambda} Ab_\lambda$$

の像である．そこで，

$$\bigotimes_i (S^{\lambda_i}V) = V^{\otimes d}a_\lambda \xrightarrow{\times b_\lambda} \bigotimes_j (\Lambda^{\lambda'_j}V) = V^{\otimes d}b_\lambda$$

の像は $\mathbb{S}_\lambda V$ となる．

もう一つの式も例 4.12 で述べた $V_\lambda \cong Ab_\lambda a_\lambda$ からしたがう．

□

例 8.26. まず Pieri の公式（または Littlewood-Ricardson rule）から，

$$S^d(V) \otimes S^d(V) = \bigoplus_{0\le a\le d} \mathbb{S}_{(d+a,d-a)}V$$

となることがわかる．実は，

$$\begin{aligned} S^2(S^d(V)) &= \mathbb{S}_{(2d,0)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-2,2)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-4,4)}V \oplus \cdots \\ \Lambda^2(S^d(V)) &= \mathbb{S}_{(2d-1,1)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-3,3)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-5,5)}V \oplus \cdots \end{aligned}$$

となる．同様に，

$$\Lambda^d(V) \otimes \Lambda^d(V) = \bigoplus \mathbb{S}_{(\underbrace{2,\cdots,2}_{d-a},\underbrace{1,\cdots,1}_{2a})}V$$

となる．これも実は，

$$S^2(\Lambda^d(V)) = \bigoplus_{a \text{ even}} \mathbb{S}_{(\underbrace{2,\cdots,2}_{d-a},\underbrace{1,\cdots,1}_{2a})}V, \quad \Lambda^2(\Lambda^d(V)) = \bigoplus_{a \text{ odd}} \mathbb{S}_{(\underbrace{2,\cdots,2}_{d-a},\underbrace{1,\cdots,1}_{2a})}V$$

となる．

Proof. これは，Fulton-Harris [1] の演習問題になっていて，ヒントしか書いてない．(難しくないはずなんだけど，自分にはわからない．$\mathbb{S}_{(2d-2a,2a)}V$ が $\mathbb{S}_{(2d-2a,2a)}V \subset S^2(V^{\otimes d})$ と実現できることはわかるのだけど，そこから $\mathbb{S}_{(2d-2a,2a)}V \subset S^2(S^d(V))$ となることがわからない．わかる人がいたら教えてください）．そこで，[2] に載ってる，全く別の方法で証明する．

$S^d(V)$ の指標は h_d である．よって，$S^2(S^d(V))$, $\Lambda^2(S^2(V))$ の指標はそれぞれ，

$$\frac{1}{2}(h_d(x_1,\cdots,x_k)^2 + h_d(x_1^2,\cdots,x_k^2)), \quad \frac{1}{2}(h_d(x_1,\cdots,x_k)^2 - h_d(x_1^2,\cdots,x_k^2))$$

となる．これらをシューア関数を使って分解する．

$h_d(x_1,\cdots,x_k)$ の定義は，

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-x_it}=\sum h_jt^j$$

における t^d の係数であった．そこで，$h_d^{(r)}:=h_d(x_1^r,x_2^r,\cdots)$ は，

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-x_i^rt^r}=\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{r}(1-x_i\omega^jt)^{-1}$$

における t^{rd} の係数である．ここで $\omega=e^{2\pi i/r}$ となる．

一方，コーシーの恒等式を思い出す．

$$\prod_{i,j}\frac{1}{(1-x_iy_j)}=\sum_{\lambda}S_\lambda(x)S_\lambda(y)$$

であった．これに代入すれば，に代入すれば，

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-x_i^rt^r}=\sum_{\lambda}S_\lambda(x)S_\lambda(1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{r-1})t^{|\lambda|}$$

となる．ただし，変数の数が異なるので，$\max\{r,k\}$ 変数で考えて，余りの変数をゼロにすればよい．また，例 5.36 より，

$$S_\lambda(1,\omega,\cdots,\omega^{r-1})=\prod_{1\le i<j\le r}\frac{\omega^{\lambda_i+r-i}-\omega^{\lambda_j+r-j}}{\omega^{j-1}-\omega^{i-1}}=\prod_{i<j}\frac{\omega^{\lambda_i+r-i}-\omega^{\lambda_j+r-j}}{\omega^{r-i}-\omega^{r-j}}.$$

この値は計算可能である．$\lambda_1+r-1>\cdots>\lambda_r$ であることを考慮すれば，$l(\lambda)\le r$ かつ，

$$(\lambda_1+r-1,\lambda_2+r-2,\cdots,\lambda_r)=\sigma(r-1,r-2,\cdots,0)\mod (r\mathbb{Z})^r,\quad \text{for }\exists\sigma_\lambda\in\mathfrak{S}_r$$

のとき，符号を除いて，分子，分母が一致することがわかる（つまり $\lambda_1+r-1,\cdots,\lambda_r$ が $\mod p$ として，すべて異なる場合である）．そして，符号は $\mathrm{sgn}(\sigma_\lambda)$ となる．つまり，$S_\lambda(1,\cdots,\omega^{r-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$ となることがわかる．それ以外では $\mod r$ で，$\lambda_i+r-i\equiv\lambda_j+r-j$（$\exists i,j$）となるのでゼロとなる．よって，

$$h_d^{(r)}=\sum_{|\lambda|=dr,\, l(\lambda)\le r}\mathrm{sgn}(\sigma_\lambda)S_\lambda$$

となる．これを $r=2$ の場合について考えると，$|\lambda|=2d,\ l(\lambda)\le 2$ となるのは，$\lambda=(2d-j,j)$ の場合である．そして符号は

$$(2d-j+1,j)\equiv(-j+1,j)\equiv(j+1,j)\equiv\begin{cases}(0,1) & j=odd\\(1,0) & j=even\end{cases}\mod (2\mathbb{Z})^2$$

となるので，$\mathrm{sgn}(\sigma_{(2d-j,j)}) = (-1)^j$ となる．よって，

$$h_d^{(2)} = h_d(x_1^2, \cdots, x_k^2) = \sum_{j=0}^{d} (-1)^j S_{(2d-j,j)}(x_1, \cdots, x_k)$$

を得る．

次に，h_d^2 を計算する．これは Kostka 数を計算すればよい．つまり，

$$H_{(d,d)} = h_d h_d = \sum_{\mu} K_{\mu(d,d)} S_\mu = \sum_{j=0}^{d} S_{(2d-j,j)}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(h_d(x_1, \cdots, x_k)^2 + h_d(x_1^2, \cdots, x_k^2)) &= \sum_{a\ even} S_{(2d-a,a)}, \\ \frac{1}{2}(h_d(x_1, \cdots, x_k)^2 - h_d(x_1^2, \cdots, x_k^2)) &= \sum_{a\ odd} S_{(2d-a,a)} \end{aligned}$$

となる．以上から

$$\begin{aligned} S^2(S^d(V)) &= \mathbb{S}_{(2d,0)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-2,2)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-4,4)}V \oplus \cdots \\ \Lambda^2(S^d(V)) &= \mathbb{S}_{(2d-1,1)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-3,3)}V \oplus \mathbb{S}_{(2d-5,5)}V \oplus \cdots \end{aligned}$$

となることがわかる．

さて，次に $S^2(\Lambda^d(V)), \Lambda^2(\Lambda^d(V))$ の場合について，簡単に述べる．Ω を対称式空間上の involution とすれば，

$$e_d e_d = \omega(h_d h_d) = \sum_{j=0}^{d} S_{(2d-j,j)'} = \sum_{j=0}^{d} S_{(\underbrace{2, \cdots, 2}_{j}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{2d-2j})}$$

となる．一方，$h_d^{(2)} = h_d(x_1^2, \cdots, x_k^2)$ に対しては，Ω をそのまま作用させることはできない．しかし，例 5.51 を使えばよい．

$\square$

補足 8.27. 上は $S^2(S^d(V))$ の既約分解であったが，より一般に $\mathbb{S}_\mu(\mathbb{S}_\lambda V))$ がどのように既約分解されるかという問題があるが，これは非常に難しい問題で，**plethysm 問題**とよばれる．特別な場合には，上のような公式があるが，一般の場合の公式はないみたい（see [2]）．

元本は [1] の第一章です．もう少し詳しくしりたいなら [2] の第一章や [1] に載ってる参考文献を参照．他の日本語の参考書は，たまに参考にしました．

参考文献

[1] W. Fulton and J. Harris *Representation theory, a first course* GTM 129, springer.

[2] I. G. Macdonald, *Symmetric Fuctions and Hall Polynomials, second edition* Oxford Math, Mono. Oxford.

[3] 西山　亨, 和歌山大学集中講義のためのノート

[4] 西山　亨, 多項式のラプソディー　日本評論社.

[5] 寺田　至, ヤング図形の話, 日本評論社.

[6] 堀田　良之, 加群十話, 朝倉書店.

[7] 河添　健, 群上の調和解析, 朝倉書店.

[8] 小林俊行・大島利雄, *Lie* 群と *Lie* 環, 岩波書店.

[9] 佐竹一郎, 線形代数学.　裳華房.

索 引