解析力学、対称性
(局所 Symplectic 幾何学)

郡　敏昭

微分幾何学A・B講義

(2002年9月～2003年6月)

目次

第1章　相空間

1.1　シンプレクティック多様体, Symplectic manifold

解析力学を Lagrange 形式から変分原理により導かれる Euler 運動方程式により記述するのが物理の教科書の方法であるのに対して、数学では Symplectic structure により記述する。

数学では、運動が行われる相空間 (phase space) の持つ性質として、運動を記述する。　物理では運動をしている点の持つ性質（位置と運動量）として、運動を記述する。

1.1.1　シンプレクティック構造

symplectic structure

(X,ω); 2n-次元 $C^\infty-$ 多様体 X とその上の **closed nondegenrate differential 2-form** ω の組を **symplectic manifold** という。ω を symplectic form という。

$$
\begin{aligned}
\omega_x \quad &: \quad T_xX \times T_xX \longrightarrow \mathrm{R}, \qquad \forall x \in X \\
\omega_x(\xi,\eta) \quad &= \quad -\omega(\eta,\xi), \qquad \forall \xi,\eta \in T_xX \\
d\omega(X,Y,Z) \quad &= \quad X\omega(Y,Z) + Y\omega(Z,X) + Z\omega(X,Y) \\
&\quad\quad -\omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y) = 0
\end{aligned}
$$

symplectomorphism, 正準変換

２つの symplectic 多様体の間の微分同相 (diffeomorphism)

$$f:\ (X,\omega) \longrightarrow (X',\omega')$$

で

$$f^*\omega' = \omega$$

. を満たすものを正準変換という。

例.1 R^4

$$\begin{aligned} (X &= \mathrm{R}^4, \omega), \\ \omega &= dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2, \qquad (q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathrm{R}^4 \end{aligned}$$

は代表的な symplectic manifold である。

$$f : \mathrm{R}^4 \ni \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Q_1 = p_2 \\ Q_2 = p_1 \\ P_1 = -q_2 \\ P_2 = -q_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^4$$

は R^4 上の正準変換である。 実際

$$dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2 = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2.$$

例.2 S^2

球面

$$S^2 = \{(p, q, r) \in \mathrm{R}^3;\, p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{4}\}$$

の局所座標は

$$U_0 = \{(p, q, r) \in M;\, r \neq \frac{1}{2}\} \text{ 北極以外} \tag{1.1}$$

$$U_\infty = \{(p, q, r) \in M;\, r \neq -\frac{1}{2}\} \text{ 南極以外} \tag{1.2}$$

で, それぞれ R^2 に同相である。同相写像はそれぞれ

$$U_0 \xrightarrow{\simeq} \mathrm{R}^2_{x,y}; \qquad (p, q, r) \longrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{2}{1-2r} p \\ \\ y = \frac{2}{1-2r} q \end{array}$$

と

$$U_\infty \xrightarrow{\simeq} \mathrm{R}^2_{u,v}; \qquad (p, q, r) \longrightarrow \begin{array}{l} u = \frac{2}{1+2r} q \\ \\ v = \frac{2}{1+2r} p \end{array}$$

で与えられる。

いま、$\mathrm{R}^2_{x,y}$ 上では

$$\frac{1}{x^2+y^2}dx \wedge dy,$$

により、$\mathrm{R}^2_{u,v}$ 上では

$$\frac{1}{u^2+v^2}du \wedge dv$$

により与えられる 2-form を考えると、それらははは、S^2 上のひとつの closed 2-form ω を定めることがわかる:

$$\frac{1}{x^2+y^2}dx \wedge dy = \frac{1}{u^2+v^2}du \wedge dv.$$

しかし、これは $x=y=0$ 等で定義されてないので、係数を加減して、$\mathrm{R}^2_{x,y}$ 上では

$$\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2 dx \wedge dy,$$

により、$\mathrm{R}^2_{u,v}$ 上では

$$\left(\frac{2}{1+u^2+v^2}\right)^2 du \wedge dv$$

により与えられる 2-form にすると、

$$\left(\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)^2 dx \wedge dy = \left(\frac{2}{1+u^2+v^2}\right)^2 du \wedge dv$$

も満たされ、S^2 上の 2-form が得られる。したがって球面 S^2 は symplectic 多様体である。

Cotangent bundle

M を n 次元多様体とする。　M の cotangent bundle

$$\pi : X = T^*M \longrightarrow M$$

は symplectic manifold になる；

このsymplectic form ω は次のように canonical に (正準的に) 与えられる：

T^*M 上の canonical 1-form (正準 1 次形式) θ を式

$$\theta_p(\xi) = p(d\pi_p(\xi)), \quad p \in T^*M$$

で定義する。 ここに

$$\xi \in T_p(T^*M),$$
$$d\pi_p\,;\,T_p(T^*M) \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$

このとき

$$\omega = d\theta. \tag{1.3}$$

$d\circ d=0$ よりあきらかに ω は closed form である。ω は $2n$ 次元多様体 $X=T^*M$ 上の symplectic form になる。

$M=\mathrm{R}^n$、$X=T^*\mathrm{R}^n=\mathrm{R}^{2n}$ の場合
に canonical 1-form と symplectic form を計算してみよう。

$(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ を R^n の座標として、$dq_1,dq_2,\cdots,dq_n$ が $T_q^*\mathrm{R}^n$ の基底となるので $\forall p\in T_q^*\mathrm{R}^n$ は

$$p=\sum p_i dq_i \in T_q^*\mathrm{R}^n$$

と書けて $(p_1,\cdots,p_n)$ が $T_q^*\mathrm{R}^n$ の上の座標として取れる。したがって $(q_1,\cdots,q_n,p_1,\cdots,p_n)$ が T^*M の座標になる。

$T^*\mathrm{R}^n$ の接ベクトル $\xi\in T^*\mathrm{R}^n$ は

$$\xi=\sum a_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\sum b_i\frac{\partial}{\partial p_i}$$

と書ける。

正準形式 θ_p を計算しょう。

$$\begin{aligned}
p &= \sum p_i dq_i \in T_q^*\mathrm{R}^n, \qquad \xi=\sum a_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\sum b_i\frac{\partial}{\partial p_i}\in T_{(q,p)}(T^*\mathrm{R}^n)\\
d\pi_p(\xi) &= \sum a_i\frac{\partial}{\partial q_i}\in T_q\mathrm{R}^n \qquad q=\pi((q,p))\\
\theta_p(\xi) &= p(d\pi_p(\xi))=\sum p_i dq_i(\sum a_i\frac{\partial}{\partial q_i})=\sum p_i a_i
\end{aligned}$$

ゆえに $\theta_p=\sum p_i dq_i$ で、

$$\omega_p=d\theta_p=\sum dp_i\wedge dq_i.$$

が symplectic form になる。

1.1.2　ハミルトンベクトル場、Hamilton vector field

(X, ω) を symplectic manifold とする。

Hamiltonian vector 場

symplectic form ω により T^*X と TX の線形同型が次のように得られる。
X 上の 1-form λ に対して式

$$\omega(\cdot, \Lambda) = \lambda(\cdot)$$

によりベクトル場 Λ が定まる。　この対応 $\lambda \longrightarrow \Lambda$ を

$$I \quad : \quad T^*X \longrightarrow TX \tag{1.4}$$
$$\omega(\cdot, I\lambda) \quad = \quad \lambda(\cdot) \tag{1.5}$$

と書く。

X 上の smooth function H に対して、

$$Y_H = IdH$$

を H の **Hamiltonian vector 場**という。

$$\omega(\xi, Y_H) = dH(\xi) = \xi(H) \qquad \forall \xi \in TX$$

$X = T^*\mathrm{R}^n$ の場合に見よう。 H を $X = T^*\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^{2n}$ 上の smooth function とする。

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j$$

$$Y_H = IdH = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial q_i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

の係数 a_i,b_i を $\omega(\cdot, Y_H) = dH(\cdot)$ の両辺を較べて求める。

任意の

$$\xi = \sum_i c_i \frac{\partial}{\partial q_i} + d_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

に対して

$$dp_k \wedge dq_k(\xi, Y_H) \quad = \quad d_k a_k - b_k c_k, \tag{1.6}$$
$$\omega(\xi, Y_H) \quad = \quad \sum (d_k a_k - b_k c_k). \tag{1.7}$$
$$dH(\xi) \quad = \quad \xi(H) = \sum_i c_i \frac{\partial H}{\partial q_j} + d_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.8}$$

が順にわかる。ゆえに条件 $\omega(\cdot, Y_H) = dH(\cdot)$ より

$$b_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad a_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$Y_H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k} \right) \tag{1.9}$$

となる。

(X, ω); symplectic manifold
H; hamiltonian(smooth functon),
Y_H; Hamiltonian vector field
としょう。
ハミルトンベクトル場 Y_H の積分曲線を**ハミルトン流れ**という。

$$\varphi^H(\,\cdot\,, z); (a, b) \ni t \longrightarrow \varphi^H(\,t\,, z) \in X$$

が微分方程式

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) \;=\; Y_H(\varphi(t)) \tag{1.10}$$

$$\varphi(0) \;=\; z \tag{1.11}$$

を満たすとき、$\varphi^H(\,\cdot\,, z)$ を点 $z \in X$ を通る ハミルトン流れという。

$$X = T^*\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^{2n}, \qquad \omega = \sum dp_i \wedge dq_i$$

のとき

$$Y_H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k} \right) \quad \text{Hamilton vector field}$$

に対応するハミルトン流れ

$$\varphi^H(t) = (q_1(t), \cdots, q_n(t), p_1(t), \cdots, p_n(t))$$

は Hamilton の運動方程式;

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}q_i(t) = & \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \\ \\ \frac{d}{dt}p_i(t) = & -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \end{cases} \qquad 1 \le i \le n$$

の解である。

1.1.3 symplectomorphism, 正準変換

$\varphi_{t_o}^{t_1}: X \longrightarrow X$ で, 時刻 $t = t_0$ での初期状態 (q^0, p^0) を時刻 $t = t_1$ での終期状態 $(q^1, p^1) = \varphi^H(t_1 - t_0, (q^0, p^0))$ にハミルトン流れ φ^H により移す変換としょう。　すなわち

$$\varphi_{t_0}^{t_1}(x) = \varphi^H(t_1 - t_0, x))$$

により変換

$$\varphi_{t_0}^{t_1}: X \longrightarrow X.$$

を定義する。　これは正準変換となる；

$$(\varphi_{t_0}^{t_1})^*\omega = \omega.$$

さらに

$$\int_\gamma \theta = \int_{\varphi_{to}^{t_1}\gamma} \theta \qquad \textbf{Poincaré} \tag{1.12}$$

このことは次のように説明される。

相空間 $\mathrm{R}_{(q,p)}^{2n}$ と時空相空間 $\mathrm{R}^{2n+1} = \mathrm{R}_{(q,p)}^{2n} \times \mathrm{R}_t$ を考え、その座標を $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, t)$ とする。ハミルトン関数 $H = H(q, p)$ を考え、1-form

$$\theta' = \theta - Hdt = p_1 dq_1 + \cdots + p_n dq_n - Hdt$$

を作る。

$$d\theta' = \sum_i \left(dp_i \wedge dq_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} dq_i \wedge dt \right)$$

となる。

また　すぐわかるように $t =$ 一定な相空間に制限すると

$$d\theta' | \{t = \mathrm{constant}\} = \omega$$

である。

$\mathbf{R}^{2n+1}$ のベクトル場

$$Z_H = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \tag{1.13}$$

は、

$$\begin{aligned} d\theta'(Z_H) &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} dt + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} dt + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。したがって、ベクトル場 Z_H の積分曲線に沿って $d\theta' = 0$ が成り立つことがわかった。

一方この積分曲線は

$$\dot{q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

で与えられる。　すなわち、ハミルトン関数 H のハミルトン流れ $\varphi^H((q,p),t)$（を $\mathbf{R}^{2n+1}$ 内で見たもの）に他ならない。ゆえにハミルトン流れに沿って $d\theta' = 0$ となる。

さて、番号 i に対して、時刻 $t = t_0$ における時空相空間 R^{2n+1} の部分空間である $(q_i, p_i)-$ 座標空間を考え、そこにおいて独立な 2 つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が張る平行四辺形と、ハミルトン流れにより（時空相空間 R^{2n+1} の中を）時刻 $t = t_1$ までこの平行四辺形が移動して行くときにできる時空相空間 の中の管を考えよう。

ベクトル $Z_H(\varphi^H((q,p),t))$ は、点 $\varphi^H((q,p),t)$ において　この管に接している。　　はじめの平行四辺形 α が $\varphi_{t_0}^{t_1}$ で移った時刻 $t = t_1$ での像を $\varphi_{t_0}^{t_1}\alpha$ とし、時刻 $t = t_0$ から時刻 $t = t_1$ までのハミルトン流れの作る管の側面（ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が流れてできる面）を σ とすると、α、σ 、$\varphi_{t_0}^{t_1}\alpha$ は, (q_i, p_i) 空間の、したがって R^{2n+1} の中の閉曲面 Σ をつくる。Stokes の定理より閉形式 $d\theta'$ の Σ 上の積分は 0;

$$\int_\Sigma d\theta' = 0$$

一方側面σはハミルトン流れ$\varphi^H((q,p),t))$のつくる面であり、上に見たようにそこでは$d\theta'=0$となっている。ゆえに残る積分を見て、

$$\int_{\varphi_{t_0}^{t_1}\alpha} d\theta' - \int_\alpha d\theta' = 0.$$

各面$\varphi_{t_0}^{t_1}\alpha$, α上でt =constant だから

$$\int_{\varphi_{t_0}^{t_1}\alpha} \omega - \int_\alpha \omega = 0. \tag{1.14}$$

$\omega(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\alpha \omega$は平行四辺形$\alpha$の面積である。これがハミルトン流れで不変であることが示された。番号$1\le i\le n$と微小ベクトル$\mathbf{u},\mathbf{v}$は任意であるから

$$(\varphi_{t_0}^{t_1})^*\omega = \omega$$

がわかる。

命題 1 次の主張は同値である*;*

1.

$$\varphi : T^*M \longrightarrow T^*M$$

が *symplectomorphism.*

2.

$$\varphi^*\omega = \omega$$

3.

$$\int_\sigma \omega = \int_{\varphi\sigma} \omega$$

4.

$$\int_\gamma \theta = \int_{\varphi\gamma} \theta$$

上の説明の平行四辺形とその周の代わりに、R^{2n}内の曲面σとその周$\gamma=\partial\sigma$を考え, またハミルトン流れ$\varphi_{t_0}^{t_1}$によるσの像$\varphi_{t_0}^{t_1}\sigma$と$\gamma$が流れてできる管が囲む曲面を考えて、上と同じように$1\sim 3$の同値がわかる。σと$\varphi_{t_0}^{t_1}\sigma$にStokesの定理を適用して

$$\int_\sigma \omega = \int_\gamma \theta, \qquad \int_{\varphi_{t_0}^{t_1}\sigma} \omega = \int_{\varphi_{t_0}^{t_1}\gamma} \theta$$

より$3\sim 4$がわかる。

(1)-(4) と Poincaré の lemma より、

命題 2 *Hamiltonian* 流れの全体は *symplectomorphism* の合成により *one parameter group* になる：

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}.$$

1.2 Poisson 多様体上の運動

剛体の運動や、対称性の強い（拘束された）運動に対しては、相空間 T^*M でのハミルトン系で扱うより、**対称性**を考慮して、自由度の少ない取り扱いをした方がよい。

1.2.1 Poisson 多様体

多様体 P 上の関数 $C^\infty(P)$ に対して、次の条件を満たす双一次形式 $\{,\}$ が定義されているとき、 P を Poisson 多様体という。

1. $(C^\infty(P),\{,\})$ はリー環である;

$$\{aF+bG,H\}=a\{F,H\}+b\{G,H\},\quad \{H,aF+bG\}=a\{H,F\}+b\{H,G\}.$$

$$\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}+\{\{H,F\},G\}=0$$

2. $\{,\}$ は Leipnitz の式を満たす；

$$\{FG,H\}=\{F,H\}G+F\{G,H\}$$

例．1
$X=T^*M,\,\omega$ は symplectic 多様体として、

$$\{F,H\}=\omega(Y_F,Y_H)$$

と定義すると、 X は poisson 多様体。
局所座標で書くと、

$$(\mathrm{R}^n,\omega=\sum dp_i\wedge dq_i)$$

においては、

$$Y_H=\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}-\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\right).$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}\{F,H\} &= \omega(Y_F,Y_H)\\ &= \left(\sum_i dp_i\wedge dq_i\right)\left(\sum(\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}-\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}),\sum(\frac{\partial H}{\partial p_l}\frac{\partial}{\partial q_l}-\frac{\partial H}{\partial q_l}\frac{\partial}{\partial p_l})\right)\\ &= \sum_i\left(-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}+\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\end{aligned}$$

これは良く知られた Poisson 括弧式で、定義で述べた性質 1,2 は計算でわかる。

したがって **Symplectic 多様体は poisson 多様体である。**

例．2
（Lie 群、 Lie 環のかんたんな復習を後の節で行う。）

$\mathcal{G}$ リー環。
t_j; $j=1,2,\cdots,r$; $\mathcal{G}$ の generator, すなわちベクトル空間 $\mathcal{G}$ の基底.
C_{ij}^k は構造常数；

$$[t_i,t_j]=\sum_k^r C_{ij}^k t_k$$

ヤコビの恒等式は

$$C_{ij}^m C_{mk}^l + C_{jk}^m C_{mi}^l + C_{ki}^m C_{mj}^l = 0.$$

と表される。
$\mathcal{G} \simeq \mathrm{R}^r$ として、$\mathcal{G} \ni x = \sum_k x_k t_k$ の座標を $x_1.\cdots,x_r$ とする。$x_1.\cdots,x_r$ の関数 $F \in C^\infty(\mathcal{G})$ の微分をする。
$F,G \in C^\infty(\mathcal{G})$ に対して

$$\{F,G\}_\pm(x) = \pm\sum_{i,j,k}^r C_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} x_k, \tag{1.15}$$

と定義する。ただし $x=\sum_k x_k t_k$。
$\mathcal{G}$、$\{\,,\}$ は Poisson 多様体となる。
その計算

$$\{x_i,x_j\} = \sum_{l,m,k}^r C_{lm}^k \frac{\partial x_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_j}{\partial x_m} x_k = C_{ij}^k x_k,$$

より

$$\{\{x_i,x_j\},x_k\} = \sum_l^r C_{ij}^m C_{mk}^l x_l$$

$$\begin{aligned}\{\{x_i,x_j\},x_k\} &+ \{\{x_j,x_k\},x_i\} + \{\{x_k,x_i\},x_j\} \\ &= \sum_l^r \left(C_{ij}^m C_{mk}^l + C_{jk}^m C_{mi}^l + C_{ki}^m C_{mj}^l\right) x_l = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\{F,G\},H\} &= \sum C_{lk}^b \frac{\partial\{F,G\}}{\partial x_l}\frac{\partial H}{\partial x_k} x_b \\ &= \sum C_{lk}^b C_{ij}^a \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\right)\frac{\partial H}{\partial x_k} x_a x_b + \sum C_{ak}^b C_{ij}^a \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial x_k}\, x_b\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{\{G,H\},F\} &= \sum C^a_{ji}\frac{\partial\{G,H\}}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial x_i}x_a \\
&= \sum C^b_{lk}C^a_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial G}{\partial x_l}\frac{\partial H}{\partial x_k})\frac{\partial F}{\partial x_i}x_a x_b + \sum C^b_{lk}C^a_{bi}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial x_k}\,x_a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\} &= \sum C^b_{lk}C^a_{ij}\frac{\partial^2 F}{\partial x_l\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial x_k}x_a x_b + \sum C^b_{lk}C^a_{ji}\frac{\partial G}{\partial x_l}\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x_i}x_a x_b \\
&\quad + \sum C^b_{lk}\left\{\sum C^a_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial x_l\partial x_j} + C^a_{ji}\frac{\partial^2 G}{\partial x_j\partial x_l}\right\}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial x_k}x_a x_b \\
&\quad + \sum (C^a_{ck}C^c_{ij} + C^a_{ci}C^c_{jk})\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial x_k}\,x_a
\end{aligned}
$$

第３項の和は０になる。
　こうして、

$$
\begin{aligned}
\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}+\{\{H,F\},G\} &= \sum (C^c_{ij}C^a_{ck} + C^c_{jk}C^a_{ci} + C^c_{ki}C^a_{cj})\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial x_k}\,x_a \\
&= 0
\end{aligned}
$$

　Leibnitz rule の方も確かめよ。

例．3
$\mathcal{G} = (\mathrm{R}^3)^* = \mathrm{R}^3$, $C^k_{ij} = \epsilon_{ijl}$ のとき計算すると次のようになる.

$$
\{F,G\}_{\pm}(\mathbf{x}) = \pm\mathbf{x}\cdot(\nabla F\times\nabla G). \tag{1.16}
$$

例．4
　$\mathcal{G} = so(3) \simeq \mathrm{R}^3$ が剛体のオイラー方程式を与える。以下の節でそれをくわしく見よう。

1.2.2　Poisson 多様体でのハミルトンの運動方程式

$$
(\mathrm{R}^n, \omega = \sum dp_i\wedge dq_i)
$$

でのポワッソンの括弧式

$$
\{H,F\} = \sum_i\left(-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)
$$

は　H をハミルトニアンとするハミルトン流れ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t),p(t)) \\ \frac{d}{dt}p_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t),p(t)) \end{aligned}$$

の上では

$$\begin{aligned} \{H,F\}(q(t),p(t)) &= \sum_i \left(-\frac{\partial F}{\partial q_i}(q(t),p(t))\frac{d}{dt}q_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t),p(t))\frac{d}{dt}p_i(t) \right) \\ &= -\frac{d}{dt}F(q(t),p(t)) \end{aligned}$$

となる。

そこで　Poisson 多様体 $(X,\{\,,\,\})$ において　$H \in C^\infty(X)$ をハミルトニアンとするハミルトン流れを方程式

$$\{F,H\}(x(t)) = \frac{d}{dt}F(x(t)), \qquad \forall F \in C^\infty(X)$$

の解として定義する。省略して

$$\dot{F} = \{F,H\}$$

と書く。こう書くと F が H をハミルトニアンとする運動の常数（積分）であること, すなわち

$$\dot{F} = \frac{d}{dt}F(x(t)) = 0$$

であることと $\{F,H\}=0$ であることの良く知られた同値は一瞬に見えている。

1.2.3　剛体のオイラー方程式 (リー環 $so(3)$ による）

$\mathcal{G} = so(3) \simeq \mathrm{R}^3$ が剛体のオイラー方程式を与える。以下でそれをくわしく見よう。

リー群　$SO(3)$ のリー環は $so(3) \simeq \mathrm{R}^3$ で　2.1 節の例の式 (19) の - 符号の方

$$\{F,G\}_-(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}\cdot(\nabla F(\mathbf{x}) \times \nabla G(\mathbf{x})).$$

を採用して Poisson 多様体になる。- 符号の方を採用するのは習慣による。以下 $\mathbf{x} = \Pi$ と書く。

$F = F(\Pi), G = G(\Pi) \in C^\infty(\mathrm{R}^3)$ に対して

$$\{F,G\}(\Pi) = -\Pi\cdot(\nabla F(\Pi) \times \nabla G(\Pi)).1 \tag{1.17}$$

ハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3}\right)$$

に対する、　ハミルトンの運動方程式

$$\{F, H\}(\Pi) = \dot{F}(\Pi) \tag{1.18}$$

は次の剛体のオイラーの方程式となる。

$$\dot{\Pi}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}\Pi_2\Pi_3, \quad \dot{\Pi}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}\Pi_3\Pi_1, \quad \dot{\Pi}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}\Pi_1\Pi_2. \tag{1.19}$$

証明

$$\{F, H\}(\Pi) = -\Pi \cdot (\nabla F(\Pi) \times \nabla G(\Pi))$$

$(\nabla F(\Pi) \times \nabla G(\Pi))$ の第一成分は

$$\frac{\partial F}{\partial \Pi_2}\frac{\partial H}{\partial \Pi_3} - \frac{\partial F}{\partial \Pi_3}\frac{\partial H}{\partial \Pi_2} = \frac{\partial F}{\partial \Pi_2}\frac{\Pi_3}{I_3} - \frac{\partial F}{\partial \Pi_3}\frac{\Pi_2}{I_2}.$$

より

$$\begin{aligned}
\Pi \cdot (\nabla F(\Pi) \times \nabla G(\Pi)) &= \Pi_1(\frac{\partial F}{\partial \Pi_2}\frac{\Pi_3}{I_3} - \frac{\partial F}{\partial \Pi_3}\frac{\Pi_2}{I_2}) + \Pi_2(\frac{\partial F}{\partial \Pi_3}\frac{\Pi_1}{I_1} - \frac{\partial F}{\partial \Pi_1}\frac{\Pi_3}{I_3}) \\
&\quad + \Pi_3(\frac{\partial F}{\partial \Pi_1}\frac{\Pi_2}{I_2} - \frac{\partial F}{\partial \Pi_2}\frac{\Pi_1}{I_1}) \\
&= \frac{\partial F}{\partial \Pi_1}(\frac{\Pi_2\Pi_3}{I_2} - \frac{\Pi_2\Pi_3}{I_3}) + \frac{\partial F}{\partial \Pi_2}(\frac{\Pi_3\Pi_1}{I_3} - \frac{\Pi_3\Pi_1}{I_1}) + \\
&\quad \frac{\partial F}{\partial \Pi_3}(\frac{\Pi_1\Pi_3}{I_2} - \frac{\Pi_2\Pi_3}{I_3})
\end{aligned}$$

一方

$$\dot{F}(\Pi) = \frac{\partial F}{\partial \Pi_1}\dot{\Pi}_1 + \frac{\partial F}{\partial \Pi_2}\dot{\Pi}_2 + \frac{\partial F}{\partial \Pi_3}\dot{\Pi}_3$$

だから，この２つを較べて、あるいは $F = \Pi_1$, $F = \Pi_2$,$F = \Pi_3$ を代入して、　運動方程式 (1.20) は（1.21）の形になる。（　-　符号はここで合わせるために採用したのだろう。）

1.2.4　剛体のオイラー方程式 (運動学的)

剛体 Γ とは、その上の任意の２点が

$$\forall t,\ \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in \Gamma \text{ に対して } |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| = |\mathbf{x}(0) - \mathbf{y}(0)|$$

を満たすものとして定義される。線形独立な3点をとると　ひとつ正規直交基底　$\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ が定まり、剛体 Γ 上の任意の点は

$$\mathbf{x}(t) = a_1\mathbf{e}_1(t) + a_2\mathbf{e}_2(t) + a_3\mathbf{e}_3(t)$$

と表される。　したがって　状態空間として　R^3 内の基底全体、すなわち6次元の多様体

$$\mathrm{R}^3 \times SO(3)$$

が得られる。　一点が固定された剛体の場合は　状態空間は $SO(3)$ である。

R^3 の座標（静止座標）を一つ決めて　$\mathbf{k}$ と書く。剛体 Γ に固定された座標を　$\mathbf{K}$ と書く。

座標変換の行列は直交行列だから

$$\exists R(t) \in SO(3) : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{k}.$$

$\mathbf{Q}(t) \in \mathbf{K}$ に対し

$$\mathbf{q}(t) = R(t)\mathbf{Q}(t)$$

とおく、また

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) \in T_{\mathbf{q}(t)}\mathbf{k} = \mathbf{k}$$

に対して $\mathbf{V}(t) = R(t)^{-1}\mathbf{v}(t) \in \mathbf{K}$ と置く。$\mathbf{V}(t)$ は $\dot{\mathbf{Q}}(t)$ ではない。　実際いまは $\mathbf{Q}(t)$ は K に対して静止しているから $\dot{\mathbf{Q}}(t) = 0$.

$$\|\mathbf{V}(t)\|^2 = (\mathbf{V}(t), \mathbf{V}(t)) = \|\mathbf{v}(t)\|^2 \tag{1.20}$$

である。

$\omega(t)$ を静止座標 $\mathbf{k}$ における $\mathbf{q}(t)$ の角速度とする。

$\omega(t)$ は次の命題により存在するような k のベクトルとして定義される。

命題 3

$$\mathbf{v}(t) = \omega(t) \times \mathbf{q}(t)$$

証明　$\mathbf{Q}(t)$ は剛体 Γ に固定されているので時間に依存しない；$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}$ と書こう。　$\mathbf{q}(t) = R(t)\mathbf{Q}(t)$ を微分して $\dot{\mathbf{Q}}(t) = 0$ に注意すれば

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{R}(t)\mathbf{Q} = \dot{R}(t)R(t)^{-1}\mathbf{q}(t)$$

線形写像

$$A(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1} : \ k \longrightarrow k$$

を考えよう。$R(t)$ は直交行列だから $R(t)\,{}^tR(t) = I$, これを微分して

$$R(\dot{{}^tR}) + \dot{R}\,{}^tR = 0$$

ゆえに ${}^tA + A = 0$,　すなわち A は skewsymmetric である。次の 補題より

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = A\mathbf{q}(t) = \omega(t) \times \mathbf{q}(t)$$

となるベクトル $\omega(t) \in k$ がある。 $\square$

　歪対称行列 は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

とおく。$A\omega = 0$ である。

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \omega \times \mathbf{x}$$

となる。

　次のことに注意しておく。**直交行列による変換（直交変換）は定義により内積を変えないが、外積も変えない。**なぜなら二つのベクトルのつくる平行四辺形の（符号つき）面積が外積ベクトルだから。すなわち、

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$$

は直交変換で不変、また向きずけも不変。

$$\Omega(t) = R(t)^{-1}\omega(t) = {}^tR(t)\omega(t) \in \mathbf{K}$$

と置こう。
　上の注意と式 (31) より

$$V(t) = \Omega(t) \times Q(t) \tag{1.21}$$

となる。
　$\mathbf{m}(t)$ を系 k における角運動量

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{q}(t) \times m\mathbf{v}(t) = m(\mathbf{q}(t) \times (\omega(t) \times \mathbf{q}(t))).$$

$\Pi(t) = R(t)^{-1}\mathbf{m}(t) = {}^tR(t)\mathbf{m}(t)$ とおくと、もう一度上の注意とより

$$\Pi(t) = m(\mathbf{Q}(t) \times (\Omega(t) \times \mathbf{Q}(t))). \tag{1.22}$$

がしたがう。

そこで　剛体系 K の線形写像 $B(t) : K \longrightarrow K$ を

$$B(t)\mathbf{X} = m(\mathbf{Q}(t) \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Q}(t))).$$

により定義する。

命題 4 $B(t)$ は対称行列である。

なぜなら

$$(B(t)\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = m(\,\mathbf{Q}(t) \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Q}(t)),\, \mathbf{Y}\,) = m(\,\mathbf{Y} \times Q(t),\, \mathbf{X} \times \mathbf{Q}(t)\,)$$

は $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ に関して対称。

対称行列 $B(t)$ は ある直交行列により対角化できる。その固有値（実になる）$I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ を慣性テンソルという。（直交する）単位固有ベクトル $\mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t), \mathbf{e}_3(t)$ を慣性軸という。

(1.24) は

$$\Pi(t) = B(t)\Omega(t)$$

と書けるが、

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \Omega_1(t)\mathbf{e}_1(t) + \Omega_2(t)\mathbf{e}_2(t) + \Omega_3(t)\mathbf{e}_3(t) \\ \Pi(t) &= \Pi_1(t)\mathbf{e}_1(t) + \Pi_2(t)\mathbf{e}_2(t) + \Pi_3(t)\mathbf{e}_3(t) \end{aligned} \tag{1.23}$$

と置くと、これは

$$\Pi_k(t) = I_k(t)\Omega_k(t). \tag{1.24}$$

となる。

さて、剛体上の点の運動エネルギーは

$$T(t) = \frac{m}{2}\|V(t)\|^2 = \frac{m}{2}(\,\Omega(t) \times Q(t), \Omega(t) \times Q(t)\,) = \frac{1}{2}(\,B(t)\Omega(t), \Omega(t)\,) = \frac{1}{2}(\,\Pi(t), \Omega(t)\,)$$

である。　ここで、(1.22),(1.23), (1.24) を使った。さらに (1.25) より

$$T(t) = \frac{1}{2}(I_1(t)\Omega_1(t)^2 + I_2(t)\Omega_2(t)^2 + I_3(t)\Omega_3(t)^2).$$

あるいは 2.3 節の書き方で

$$T(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_1(t)^2}{I_1(t)} + \frac{\Pi_2(t)^2}{I_2(t)} + \frac{\Pi_3(t)^2}{I_3(t)}\right).$$

以上の準備のもとに剛体 Γ の運動方程式を導こう。外力が働いてないので静止座標 k における角運動量は変化しないから

$$\dot{\mathbf{m}}(t) = 0.$$

命題 5 *Euler* の運動方程式

$$\dot{\Pi}(t) = \Pi(t) \times \Omega(t)$$

証明

$$0 = \dot{\mathbf{m}}(t) = \dot{(}R(t)\Pi(t)) = \dot{R}(t)\Pi(t) + R(t)\dot{\Pi}(t)$$

より

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}(t) &= -R(t)^{-1}\dot{R}(t)\Pi(t) = -R(t)^{-1}(\dot{R}(t)R(t)^{-1}R(t)\Pi(t) \\ &= -R(t)^{-1}A(t)\mathbf{m}(t) = -R(t)^{-1}(\omega(t) \times \mathbf{m}(t)) = R(t)^{-1}(\mathbf{m}(t) \times \omega(t)) \\ &= \Pi(t) \times \Omega(t)\end{aligned}$$

これは成分ごとに書くと（1.25）(1.26) より、

$$\dot{\Pi}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}\Pi_2\Pi_3, \quad \dot{\Pi}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}\Pi_3\Pi_1, \quad \dot{\Pi}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}\Pi_1\Pi_2.$$

８節でリー環 so(3) の Poisson 括弧から導いた運動方程式（1.21）と同じものであることがわかる。

第2章　対称性

2.1　対称性、Lie 群、Lie 環の作用

リー群とリー環について復習しておく。

2.1.1　リー群 , Lie 環について

直交群 $O(3)$ は R^3 の内積を変えない線形変換全体である。

$$(Tx, Ty) = (x, y).$$

回転群　$SO(3) \ni T$ は $T \in O(3)$ で $\det T = 1$ なるもの全体。これらは 3 次元の多様体になっている。　このように群であり多様体でもあり、群演算が多様体上のなめらかな写像になってる対象をリー群という。

Lie group G とは次の条件を満たすものである：

1. G は多様体である
2. G には群演算が定義されている、すなわち写像

$$\Phi : G \times G \longrightarrow G$$

　　で次を満たすものが存在：

   (a) $\Phi(\Phi(g_1, g_2), g_3)) = \phi(g_1, \Phi(g_2, g_3)), \forall g_1, g_2, g_3 \in G.$
   (b) $\Phi(g, e) = g = \Phi(e, g), \quad \forall g \in G,$ を満たす元 $e \in G$ がある。
   (c) $\forall g \in G$ に対して $\Phi(x, g) = e$ を満たす $x \in G$ が存在する。

3. 群演算はなめらか $((C^\infty)$ である：

$$G \times G \ni (g, h) \longrightarrow \Phi(g, h) \in G$$

　　が G の多様体の構造で C^∞ 写像になる。

簡単のため

$$\Phi(g, h) = gh$$

と書く。

G をひとつのリー群とする。　$g \in G$ に対して、左と右から g をかける作用；

$$R_g : G \longrightarrow G, \qquad L_g : G \longrightarrow G,$$
$$R_g h = hg, \qquad L_g h = gh$$

および $A_g = R_{g^{-1}} L_g : G \longrightarrow G,$

$$A_g h = ghg^{-1}$$

を考える。

$$A_g(fh) = A_g f \cdot A_g h$$

より、各 $g \in G$ に対して A_g は G から G の自己同型への写像を与える 。A_g を g からきまる内部自己同型という。　対応

$$G \ni g \longrightarrow A_g \in End(G)$$

は群準同型、すなわち G のひとつの表現を与える；$A_{gh} = A_g A_h$.

$\forall g \in G$ に対して $A_g e = e$ だから A_g の微分は e での接空間 T_eG をそれ自身にうつす；

$$\begin{aligned}(A_g)_* &: T_eG \longrightarrow T_eG,\\ (A_g)_* X &= \frac{d}{dt} A_g(\varphi(t))|_{t=0}\end{aligned}$$

ここに $\varphi(t)$ は e をとおる接ベクトル X に接する G 内の曲線である；$\varphi(0) = e$, $\dot{\varphi}(0) = X$.

定義 Lie algebra $\mathcal{G}$ とは、次の条件をみたす双線形写像

$$[\,,\,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

が定義されているベクトル空間 のことである；

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

T_eG に演算 $ad = [\,,\,]$ (後の命題６）をつけたものを G のリー環 $\mathcal{G}$ という。

$Ad_g = (A_g)_*|_e$ を Adjoint operator という。

$$Ad_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}.$$

各 $g \in G$ に対して Ad_g は G から $\mathcal{G}$ の自己準同型への写像を与える；

$$Ad_g : G \longrightarrow End(\mathcal{G}).$$

対応 $g \longrightarrow Ad_g$ 　は群準同型、すなわち G のひとつの表現を与える；

$$Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$$

写像 $Ad : G \longrightarrow End(\mathcal{G})$ の $e \in G$ での微分

$$(Ad)_* : T_e G = \mathcal{G} \longrightarrow End(\mathcal{G})$$

を ad と書く。

$$ad_\xi = \frac{d}{dt} Ad_{\varphi(t)}|_{t=0},$$

ここに $\varphi(t)$ は e をとおる接ベクトル ξ に接する G 内の曲線；

$$\varphi(0) = e, \qquad \dot{\varphi}(0) = \xi.$$

2.1.2 平行移動群、ユークリッド運動群

例．平行移動群

空間 R^3 内のベクトル $a \in \mathrm{R}^3$ による平行移動は,

$$T_a : \mathrm{R}^3 \ni x \longrightarrow x + a \in \mathrm{R}^3$$

と記述される。

$$T_a \circ T_b = T_{a+b}, \qquad T_0 \circ T_a = T_a, \qquad T_a \circ T_{-a} = T_0$$

で、平行移動の全体 T は群をつくり単位元は T_0 である。、また $\mathrm{R}^3 \ni a \longleftrightarrow T_a \in \mathrm{R}^3$ により R^3 のベクトル全体と 1 対 1 に対応しているので、多様体としては R^3 と同じものと見ると、 T は Lie 群になる。このとき R^3 をベクトルの加法による群と思うと, T と R^3 は同じリー群となる。　R^3 の単位元は 0 と書いた。　演算が可換, $gh = hg$, な群に対しては単位元を 0 と書くのがふつうである。

$\mathrm{T} \simeq \mathrm{R}^3$ のリー環 $\mathcal{T}$ を求めよう。$0 \in \mathrm{T}$ での接空間は R^3 のベクトル全体である。ベクトル $\xi \in \mathrm{R}^3$ に接して $0 \in \mathrm{T}$ を通る曲線は

$$t\xi \in \mathrm{T}; \qquad -\infty < t < \infty$$

だから

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(t\xi) = \xi.$$

したがって
$$\mathcal{T} = T_0\mathrm{T} = \mathrm{R}^3.$$
$a \in \mathrm{T}$ に対して,$Ad_a : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}$ は

$$Ad_a b = a + b - a = b, \qquad \text{より } Ad_a = T_0, \forall a \in \mathrm{T}$$

$a \in \mathrm{T}$ に対して,$Ad_a : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ は

$$Ad_a \xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}(a + t\xi - a) = \xi,$$

より $Ad_a = Id \in End(\mathcal{T}), \forall a \in \mathrm{T}.$

例. $G = SO(n)$

R^n のベクトルの線形変換で、ベクトルの長さを変えないものの全体を n 次直交行列の群 $SO(n)$ という。

$A \in SO(n)$ に対し、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (A\mathbf{a}, A\mathbf{b}) = ({}^tAA\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

より
$$SO(n) = \Big\{A;\ n \times n \text{ 行列}, \qquad {}^tA \cdot A = E, \quad \det A = 1\Big\}$$

$SO(n)$ のリー環 (単位元 E における接空間) $so(n) = T_eSO(n)$ は次のように求められる。
$$\xi \in T_eSO(n)$$
とする. E を通り ξ を接ベクトルとする曲線を $g(t) \in SO(t)$ とすると
$${}^tg(t) \cdot g(t) = E.$$
これを微分して
$$({}^tg)'(t) \cdot g(t) + ({}^tg)(t) \cdot (g)'(t) = 0$$
$t = 0$ として、${}^t\xi \cdot E + E \cdot \xi = 0$, すなわち
$$\xi \in so(n) \Longleftrightarrow {}^t\xi + \xi = 0.$$
である。

$h \in G$ に対して

$$Ad_h\xi == \frac{d}{dt}|_{t=0} h \cdot g(t) \cdot {}^th = h \cdot \xi \cdot h^{-1}$$

ただし、E を通り ξ を接ベクトルとする曲線を $g(t) \in SO(t)$ とし、${}^th = h^{-1}$ を使った。

命題 6

$$ad_\xi \eta = \xi\eta - \eta\xi, \qquad \forall \xi, \eta \in so(n)$$

証明.

$$\begin{aligned} ad_\xi \eta &= \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{g(t)}\eta = \frac{d}{dt}|_{t=0}(g(t)\cdot\eta\cdot g(t)^{-1}) & (2.1)\\ &= \xi\eta - \eta\xi & (2.2)\end{aligned}$$

例 1

$$so(3) = \{X; 3\times 3\text{matrix}, X + X^t = 0\}$$

$X \in so(3)$, すなわち歪対称行列 X は

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。 XY を行列の積として

$$[X, Y] = XY - YX,$$

とおけば $[\,,\,]$ がリー環の条件を満たすことがわかる。
$so(3)$ の基底として、

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

をとる。

$$[E_1, E_2] = E_3,\ [E_2, E_3] = E_1,\ [E_3, E_1] = E_2$$

となる。
一般にリー環　$\mathcal{G}$ の基底を E_k, $k = 1, 2, \cdots, m$, として

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{m} C_{ij}^k E_k$$

なる m^3 個の定数 C_{ij}^k, $i, j, k = 1, 2, \cdots, m$ が定まる。これをリー環　$\mathcal{G}$ の構造定数という。　逆に構造定数を与えるとリー環が定まる。
$so(3)$ の構造定数は $C_{ij}^k = \epsilon_{ij}^k$.

例２． R^3

$\mathrm{R}^3 \ni \mathbf{x}, \mathbf{y}$ に対して

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} \times \mathbf{y},\ \text{外積}$$

がリー環の条件を満たすことを確かめよ。

$so(3)$ と　R^3 はリー環として同型である。　すなわち

$$so(3) \ni X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

に

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3$$

を対応させると、これはベクトル空間の同型で

$$[X, Y] = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$$

が満たされるからリー環の同型になる。　　基底 E_1 には基底 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

、... が対応する。

さらに $so(3) \ni X, Y$ に

$$k(X, Y) = -\frac{1}{2} tr(XY)$$

で内積を定めると、　この同型は isometric である；

$$k(X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

リー環 $so(3)$ からリー群 $SO(3)$ へは exponential map がある。

$$\exp tE_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

など。

例３

ポワソン多様体 P の定義における１番目の条件は

$$(C^\infty(P), \{\,,\,\}) \text{ はリー環になる}$$

ことを言っている。

2.2 運動量写像、Moment map

M を多様体、G を Lie 群 として、次の条件を満たす写像があるとき Lie 群 G は多様体 M に作用するという。

$$\Phi : G \times M \longrightarrow M,$$
$$\Phi(h, \Phi(g, m)) = \Phi(hg, m), \qquad g, h \in G,\, m \in M$$
$$\Phi(e, m) = m.$$

ポワソン多様体 P にリー群 G が作用しているとする; $\phi_g(x) = gx$ と書く。
また　この作用 $\phi_g : P \longrightarrow P$, $g \in G$, は Poisson map すなわち、条件

$$\{F \circ \phi_g, G \circ \phi_g\} = \{f, ,G\} \circ \phi_g$$

を満たすとする。

リー群 G の作用にたいするハミルトン作用とは、リー環の準同型（または反準同型)

$$\hat{J} : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(P)$$

で $\forall g \in \mathcal{G}$ に対して

$$Y_{\hat{J}(\xi)} = \xi_P \tag{2.4}$$

を満たすもののことである。　　　ここで、　$Y_{\hat{J}(\xi)}$ はハミルトニアン $\hat{J}(\xi)$ のハミルトンベクトル場 (1.2.1 節) で、 ξ_P は $\xi \in \mathcal{G}$ に対応する infinitesimal vector field

$$\xi_P(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(t\xi)x,$$

を表す。

リー群 G がポワソン多様体 P にハミルトン作用をしているとき

$$J \quad : \quad P \longrightarrow \mathcal{G}^* \tag{2.5}$$
$$< J(x), \xi >= \hat{J}(\xi)(x) > \tag{2.6}$$

をモーメント写像という。

2.2.1 いくつかの 運動量写像の計算

例.1. 平行移動群

平行移動群 $\mathrm{T} \simeq (\mathrm{R}^3, +)$ は R^3 に

$$\mathrm{T} \times \mathrm{R}^3 \ni (a, x) \longrightarrow x + a \in \mathrm{R}^3$$

により作用する。成分ごとに書けば、

$$\mathrm{T} \times \mathrm{R}^3 \ni \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \\ x_3 + a_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3.$$

T の作用は、さらに $P = T^*\mathrm{R}^3 = \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$ にまで持ち上げられる。すなわち

$$\mathrm{T} \times (\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3) \ni (a, q, p) \longrightarrow \begin{pmatrix} q + a \\ p \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3$$

により余ベクトル p には $+0$ として作用させる。

T のリー環を $\mathcal{T}$ としょう。

$\xi \in \mathcal{T}$ に対して $P = T^*\mathrm{R}^3$ 上の無限小ベクトル場 (ξ 方向への平行移動の generator) は;

$$\begin{aligned} \xi_P(\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\begin{pmatrix} q + t\xi \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \xi_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^{3} 0 \frac{\partial}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \frac{\partial}{\partial q_j} \end{aligned}$$

とくに　座標 q_1-方向への平行移動 $\mathcal{T} \ni \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対応する infinitesimal generator は

$$(\mathbf{e}_1)_P = \frac{\partial}{\partial q_1}$$

同様に $(\mathbf{e}_i)_P = \frac{\partial}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, 3,$ だから

$$\xi_P = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

である。

これは物理の教科書に書いてあるとおり。 これを　Hamilton ベクトル場とする Hamiltonian $H = H_\xi(q, p) \in C^\infty(P)$ を探す.

正準 1 次形式 $\theta = \sum_{i=1}^{3} p_i dq_i$ に対して

$$H = \theta(\xi_P) = \sum_{i=1}^{3} p_i dq_i (\sum_{j=1}^{3} \xi_j \frac{\partial}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3} p_1 \xi_i$$

と置こう。

$$\begin{aligned} \omega(\cdot, \xi_P) &= \sum_{i=1}^{3} dp_i \wedge dq_i(\cdot, \sum_{i=1}^{3} \xi_k \frac{\partial}{\partial q_k}) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i dp_i \\ &= dH = \omega(\cdot, Y_H) \end{aligned}$$

より、$Y_H = \xi_P$, すなわち

$$\hat{J}(\xi) = H = \sum_{i=1}^{3} p_1 \xi_i$$

がわかった。　とくに $\xi = \mathbf{E}_1$、座標 q_1-方向への平行移動、 とすると

$$\hat{J}(\mathbf{e}_1) = p_1 \quad q_1\text{-方向の運動量}$$

で、一般に

$$J(q,p) : \mathcal{T} \ni \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ xi_2 \\ xi_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{J}_\xi((q,p)) = \sum_{i=1}^{3} p_1 \xi_i = (\xi, \mathbf{p})$$

この対応は線形だから,

$$J : P \ni (q,p) \longrightarrow J((q,p)) = \mathbf{p} \in \mathcal{G}^*$$

と書いてモーメント写像 J が得られた。
　たしかに momentum map は momentum $\mathbf{p}$ を表している。

例.2. Eucledian 運動群

　平行移動群 T と回転群 $O(3)$ の直積 $G = O(3) \times \mathrm{T}$ を Eucledian 運動群という。

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

ここに $A \in O(3)$, $b \in \mathrm{T}$.
　積は
$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & Ab'+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
で与えられ、単位元は
$$E = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
である。
　G は R^3 に
$$G \ni \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aq+b \\ 1 \end{pmatrix}$$
により作用する。
　$G = O(3) \times \mathrm{T}$ の Lie 環は $\mathcal{G} = o(3) \oplus \mathcal{T}$ となる。
$$\mathcal{G} \ni \begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
の基底は $o(3)$ の基底と $\mathcal{T}$ の基底を合わせて得られる:
$$\begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3 \qquad \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} O & \mathbf{e}_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,3$$
　Lie 括弧積は
$$\left[\begin{pmatrix} X & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} XY - YX & X\eta - Y\xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
となる。
　$G \ni \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in T^*\mathrm{R}^3$ に
$$\begin{pmatrix} A & b & 0 \\ 0 & 1 & O \\ 0 & 0 & {}^tA^{-1} = A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aq+b \\ 1 \\ Ap \end{pmatrix}$$
により作用する。

　すでに見た $M = \mathrm{R}^3$ での平行移動を $\mathcal{G} = o(3) \oplus \mathcal{T}$ において見ると,
　ベクトル ξ による平行移動 $\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$ が生成する $P = T^*\mathrm{R}^3$ 上のベクトル場は次のようになる。

$$\exp t\xi \cdot \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & t\xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ 1 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + t\xi \\ 1 \\ p \end{pmatrix} = (q + t\xi, p)$$

. を $t=0$ で微分して、

$$\sum_{j=1}^{3}\xi_j\frac{\partial}{\partial q_j}+\sum_{j=1}^{3}0\frac{\partial}{\partial p_j}=\sum_{j=1}^{3}\xi_j\frac{\partial}{\partial q_j}$$

でもちろん前と同じ。

x_3- 軸を中心とした無限小回転；

$$\mathcal{G}\ni E_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

が生成する x_3- 軸を中心とした回転は

$$\exp tE_3=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0\\\sin t&\cos t&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

で、

$$\exp tE_3\cdot\begin{pmatrix}q\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0&0&&&\\\sin t&\cos t&0&0&&O&\\0&0&1&0&&&\\&&&1&&&\\&&&0&\cos t&-\sin t&0\\&O&&0&\sin t&\cos t&0\\&&&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\1\\p\end{pmatrix}$$

により作用する。

これより x_3- 軸を中心とした回転の generator は

$$X_3=(E_3)_P=\frac{d}{dt}|_{t=0}\exp tE_3=-q_2\frac{\partial}{\partial q_1}+q_1\frac{\partial}{\partial q_2}-p_2\frac{\partial}{\partial p_1}+p_1\frac{\partial}{\partial p_2}$$

$E_3\in\mathcal{G}$ のモーメント写像による像 $\hat{J}(E_3)=H_{E_3}$、すなわち

$$Y_{H_{E_3}}=(E_3)_P$$

となる関数 $H_{E_3}\in C^\infty(P)$ を求めよう。

前と同様に

$$\begin{aligned}H&=\theta(X_3)=\sum_{i=1}^{3}p_idq_i(-q_2\frac{\partial}{\partial q_1}+q_1\frac{\partial}{\partial q_2}-p_2\frac{\partial}{\partial p_1}+p_1\frac{\partial}{\partial p_2})\\&=-p_1q_2+p_2q_1\end{aligned}$$

と置く。

$$\omega(\cdot, X_3) = (-q_2 dp_1 + q_1 dp_2) - (-p_2 dq_1 + p_1 dq_2) = dH = \omega(\cdot, Y_H)$$

より、たしかに $Y_H = X_3$, すなわち

$$\hat{J}(E_3) = H = -p_1 q_2 + p_2 q_1 \equiv M_3.$$

x_3- 軸を中心とする回転の moment map による像は、x_3- 軸を中心とする回転の angular momentum(角運動量) であることがわかった。

より一般に

$$\hat{J}\left(\sum c_i E_i\right) = \sum c_i M_i$$

ここに M_i は x_3- 軸を中心とする回転の角運動量ベクトルである：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

平行移動群の作用も考えて、Lie 環 $\mathcal{G} = o(3) \times \mathcal{T}$ の $T^*\mathrm{R}^3$ への作用により

$$\hat{J}(\sum a_i \mathbf{e}_i + \sum b_i E_i) = \sum a_i p_i + \sum b_i M_i \in \mathrm{R}$$

を得る。

すなわち、

$$J(q,p):\ \mathcal{G} \ni \xi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{J}_\xi(q,p) = \sum a_i p_i + \sum b_i M_i \in \mathrm{R}$$

この対応は線形だから、

$$J(q,p) = (p_1, p_2, p_3, M_1, M_2, M_3) = (\mathbf{p}, \mathbf{M}) \in \mathcal{G}^*$$

を定める。 $(\mathbf{p}, \mathbf{M})$ は運動量と角運動量である。

Moment map$J:\ P \longrightarrow \mathcal{G}^*$ は

$$J(q,p) : \mathcal{G} \ni \sum a_i \mathbf{e}_i + \sum b_i E_i \longrightarrow \sum a_i p_i + \sum b_i M_i \tag{2.7}$$

で与えられる。

2.2.2　相空間の制限

Hamiltonian

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

は群の作用 $G = O(3) \times \mathrm{T}$ で不変となってる。.

とくに infinitesimal action of $\mathcal{G}$　で不変。すなわち、$\forall \xi \in \mathcal{G}$　に対して、;

$$\xi_P(H) = 0.$$

が成り立っている。

これより $\hat{J}(\xi) = H_\xi = \theta(\xi_P)$ は定義より

$$Y_{H_\xi} = \xi_P$$

を満たしたから、

$$Y_H(H_\xi) = dH_\xi(Y_H) = \omega(Y_H, Y_{H_\xi}) = -Y_{H_\xi}(H) = \xi_P(H) = 0.$$

ゆえに $\hat{J}(\xi) = H_\xi$ はハミルトンベクトル場 Y_H の積分曲線（ハミルトン流れ）に沿って定数となり、　運動の積分である。すなわち ハミルトン流れ $(q(t), p(t))$ の上で $\hat{J}(\xi)((q(t), p(t)))$ は一定値だから、運動は

$$\{(q,p);\ J(q,p) = \lambda\},$$

の上に制限される。ここに $\lambda \in \mathcal{G}^*$.

例．3

cotangent bundle でない symplectic 多様体へのハミルトン作用のモーメント写像の例も挙げておく。

球面

$$P = S^2 = \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | in \mathrm{R}^3 qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

は symplectic manifold になった (1.1.1 節　例 2.) $z-$ 軸を中心とする回転は S^2 に作用している。

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos t - y \sin t \\ \sin tx + \cos ty \\ z \end{pmatrix}.$$

($SO(3)$ の部分群と見た) $z-$ 軸を中心とする回転全体は、$S0(2)$ と同型である。このリー環 $\simeq \mathrm{R}^1$ の infinitesimal generator は

$$E_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$z-$ 軸を中心とする回転の無限小ベクトル場は

$$
\begin{aligned}
(E_z)_{S^2}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} E_z \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}
$$

$(E_z)_P$ をハミルトンベクトル場とするハミルトニアン $H \in C^\infty(S^2)$ を求めよう。

S^2 の北極・南極以外では、局所座標として (x, y) をとることができる。簡単のため北半球面,$z > 0$, で考え変数変換 $(x, y) \longrightarrow (\theta, z)$ を

$$
\theta = tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}
$$

を行う. すなわち

$$
x = \sqrt{1 - z^2}\cos\theta, \qquad y = \sqrt{1 - z^2}\sin\theta.
$$

このとき

$$
x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \theta}
$$

となる。

回転で固定される北極、南極点を除いて考えると、1.1.1 節の例 2 のような張り合わせについて考えなくともよく、この面上の symplectic form として

$$
\omega = dz \wedge d\theta
$$

を取れる。

このとき

$$
\omega(\cdot, (E_z)_P) = d\theta \wedge dz(\cdot, \frac{\partial}{\partial \theta}) = dz
$$

したがって $H = H_{E_x}(\mathbf{x}) = z$ とすれば、

$$
Y_H = (E_z)_P
$$

あるいは

$$
\hat{J}_{E_z}(\mathbf{x}) = z
$$

ゆえに無限小回転 E_z の作用はハミルトン作用でその moment map

$$
J:\ S^2 \longrightarrow so(2)^*
$$

は

$$
J(x, y, z) : cE_z \longrightarrow cz \in \mathrm{R}
$$

である。
(1.1.1節の例２のように張り合わせを考えてきちんと計算することもできる。)
球面への z-軸を中心とする回転の作用のモーメント写像は, 球面上の点の高さ、z 座標、である。

空間に、ある群の作用による対称性があると、モーメント写像の値が一定の部分空間に制限（簡約）して、ものごとを見ることができるという主張を述べてきた。

2.3　調和振動子

ハミルトン力学系とそのモーメント写像（運動量写像）の見本として調和振動子を例としてあげよう。　　もう一度、前節の定義を見ながら、調和振動子の数学的な定式化を書いていこう。

$$\begin{aligned} M &= \mathrm{R}^2 \\ P &= T^*\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}^4 \\ \omega &= dq_1 dp_1 + dq_2 dp_2, \\ \theta &= p_1 dq_1 + p_2 dq_2, \qquad \text{正準形式} \\ \omega &= d\theta \end{aligned}$$

$$\text{Hamiltonian として} \quad H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

を取ると、ハミルトンベクトル場は

$$Y_H(q,p) = p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - q_2 \frac{\partial}{\partial p_2}$$

になる。したがってハミルトンの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} q_i = p_i \qquad \frac{d}{dt} p_i = -q_i \quad i = 1, 2$$

である。 軌道は

$$q_i(t) = a_i \sin t, \qquad p_i(t) = a_i \cos t, \qquad i = 1, 2$$

平面の回転群は

$$G = O(2) = S^1 \ni A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

で与えられて、そのリー環 は

$$\mathcal{G} = o(2) \ni \quad t\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

で $\mathcal{G} \simeq \mathrm{R}$ である。

$$\exp:\ o(2) \ni t\sigma \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in O(2)$$

ハミルトニアンは回転不変、すなわちハミルトニアン H は $A \in O(2)$ の作用

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Aq \\ {}^tA^{-1}p = Ap \end{pmatrix},$$

ここに

$$Aq = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos tq_1 - \sin tq_2 \\ \sin tq_1 + \cos tq_2 \end{pmatrix},$$

により不変である。もちろん、　無限小回転 $o(2)$ によっても不変。
そこで

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in o(2)$$

が定める相空間 P 上のベクトル場 σ_P を計算すると、点 $z = (q, p) \in P$ で、

$$\sigma_P(z) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp t\sigma)z = -q_2\frac{\partial}{\partial q_1} + q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial}{\partial p_2}$$

となる。
$Y_H = \sigma_P$ となる $H = H_\sigma \in C^\infty(P)$ を求めると、

$$\begin{aligned} H_\sigma(q,p) &= \theta(\sigma_P) \\ &= p_1dq_1 + p_2dq_2\left(-q_2\frac{\partial}{\partial q_1} + q_1\frac{\partial}{\partial q_2} - p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + p_1\frac{\partial}{\partial p_2}\right) \\ &= -q_2p_1 + q_1p_2 \end{aligned}$$

となる。　これを $L(z)$ とおくと、任意の $\xi \in o(2)$ は $\xi = c\sigma$ と書けるから

$$H_\xi(z) = cL(z).$$

定義よりモーメント写像は、点 (q, p) に $o(2) = \mathrm{R}^1$ 上の線形形式

$$o(2) \ni \xi = c\sigma \longrightarrow H_\xi(q,p) = c(-q_2p_1 + q_1p_2).$$

を対応させる写像 L であり、すなわち、角運動量である。

ポアッソン括弧式

$$\{H, L\} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial L}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} = -(q_1 q_2 + p_1 p_2) + (q_1 q_2 + p_1 p_2) = 0$$

だから　L は運動の積分で、運動は　エネルギー $H = h$ 一定、角運動量 $L = l$ 一定、　となる相空間内の曲面

$$\{(q, p) \in P; \qquad H(q, p) = h, \qquad L(q, p) = l\}$$

に制限 (簡約）される。　　これは相空間に、ハミルトニアンを不変にするように $O(2)$ が作用しているからである。　この曲面の形は (h, l) がふつうの値のときは トーラスを表す。

第3章　ハミルトン作用と相空間の簡約

3.1　Poisson 多様体

Poisson 多様体 P とは、$C^{|infty}(P)$ 上に与えられた **Lie 代数**の構造 と微分代数の構造；$\{\,,\,\}$, のことである。すなわち

1. $(C^\infty(P), \{\,,\,\})$ はリー環である；
   (a) bilinear: $\{aF+bG,H\} = a\{F,H\}+b\{G,H\}$, $\qquad \{F,aG+bH\} = a\{F,G\}+b\{F,H\}$,
   (b) antisymmetric; $\{F,G\} = -\{G,F\}$,
   (c) Jacobi identity $\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}+\{\{H,F\},G\}=0$.
2. $(C^\infty(P), \{\,,\,\})$ は微分代数である；

$$\{FG,H\} = \{F,H\}G + F\{G,H\}$$

これまでに学習した例およびその次の例を順に見る。
例 (-2)
cotangent bundle

$$\begin{aligned}
(P &= T^*M \xrightarrow{\pi} M, \theta, \omega = d\theta, \{\,,\,\}) && (3.1)\\
\theta_\alpha(X) &= \alpha(\pi_* X), \qquad \forall X \in T_\alpha P, \quad \alpha \in P && (3.2)\\
\omega &= d\theta, \qquad dH = \omega(\cdot, X_H) && (3.3)\\
\{F,G\} &= \omega(X_F, X_G) = X_F G && (3.4)
\end{aligned}$$

例 (-1)
symplectic manifold

$$(P, \omega, \{\,,\,\}) \tag{3.5}$$

$$dH = \omega(\cdot, X_H) \tag{3.6}$$

$$\{F,G\} = \omega(X_F, X_G) = X_F G \tag{3.7}$$

例 (0)

Lie algebra

基底を x_i, 構造定数を $[x_i, x_j] = \sum C_{ij}^k x_k$ として、

$$\{F, G\}_{\pm} = \pm \sum C_{ij}^k x_k \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

例 (1)

dual of a Lie algebra

$F, G \in C^{\infty}(\mathcal{G}^*)$, $\mu \in \mathcal{G}^*$, に対して、

$$\{F, G\}_{\pm}(\mu) = \pm < \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}, \frac{\delta G}{\delta \mu}] >; \quad \mathbf{Lie - Poisson\,bracket}$$

ここに $\frac{\delta F}{\delta \mu} \in \mathcal{G}$ は

$$dF(\mu)\nu = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{F(\mu + \epsilon\nu) - F(\mu)}{\epsilon} =< \nu, \frac{\delta F}{\delta \mu}(\mu) >$$

で定義される　$(dF(\mu) : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathrm{R}$ は線形写像)。

$\{.\}$ が antisymmetric, bilinear はすぐわかる。Leibnitz rule は

$$\frac{\delta(FG)}{\delta \mu} = F(\mu) \frac{\delta G}{\delta \mu} + \frac{\delta F}{\delta \mu} G(\mu)$$

より。

Jacobi identity は直接計算でも示せるが、$\mathcal{G}^*$ の Lie-Poisson bracket が T^*G の Poisson bracket(例 (-2) の $\{,\}$) の $T_e^*G \simeq \mathcal{G}^*$ への制限として得られることを示す方法をとる。

このことが、このための道筋も含めて、この講義の目的である。

例 (2)

($Vect_{\mathrm{div},\partial}(B)$)

$B \subset \mathrm{R}^3$ をなめらかな境界 ∂B を持つ有界な領域とする。B を B に移す体積を変えない微分同相写像の全体は群になる。このリー群のリー環は

$$Vect_{\mathrm{div},\partial}(B) = \{X \in Vect(B);\, divX = 0,\, X \cdot \mathbf{n}|_{\partial B} = 0\}$$

であると考えられる。実際 ω を体積要素, $X \in Vect(B)$ の流れを φ_t とすると

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega - \omega}{t} = L_X \omega = d(i_X \omega) = (divX)\omega$$

また

$$\int_{B \cap V} (divX) d\omega = \int_{\partial B \cap V} (X \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

となる。
　そこでベクトル場の bracket を与えて次の（無限次元）リー環を定義する。

$$\mathcal{G} = Vect_{\mathrm{div},\partial}(B) = \{X \in Vect(B);\, divX = 0,\, X \cdot \mathbf{n}|_{\partial B} = 0\}$$

$$[X, Y] = (X \cdot \nabla)Y - (Y \cdot \nabla)X$$

少しごまかしていて、左辺はベクトル場 $X = \sum_{i=1}^{3} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ で右辺はベクトル $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ を用いている。
　$\mathcal{G}$ に内積

$$(X, Y) = \int_B X \cdot Y d\omega$$

を与えて $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}$ と思う。
　$\frac{\delta F}{\delta X}(X) \in \mathcal{G}$ は

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{F(X + \epsilon \Delta X) - F(X)}{\epsilon} = DF(X)\Delta X = \int_B \frac{\delta F}{\delta X}(X)\Delta X d\omega \qquad (3.8)$$

により決まる。
　これにより例 1 と同様の式で Poisson bracket $\{\,,\,\}_{\pm}$ が定義される。

　$Vect_{\mathrm{div},\partial}(B) \ni \mathbf{V}$ の満たす条件を使い、ベクトル解析を行うと、それは次の形に書けることがわかる。

命題 7

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{\pm}(\mathbf{v}) &= \pm \int_B \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\right] d\omega & (3.9) \\ &= \pm \int_B (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \left(\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v})\right) d\omega & (3.10) \end{aligned}$$

この命題と次の節の例の流体の方程式を導くのが講義の目的のひとつだった。計算は講義でていねいにしたとおり、Marsden-Ratiu の本の通り。

3.2 Poisson 多様体への Lie 環の作用

3.2.1 Hamilton ベクトル場と Hamilton 運動方程式

Poisson 多様体 $(P, \{\,,\,\})$ 上の関数 $H \in C^\infty(P)$ に対して, $C^\infty(P) \ni G \longrightarrow \{H, G\}$ は derivation であるから、

$$X_H(F) = \{H, F\} \qquad \forall F \in C^\infty(P) \text{ に対し},$$

を満たす P 上のベクトル場 $X_H \in \mathcal{X}(P)$ が存在する。

(注)
「S 上の R− 値関数のつくる vector space を $V \subset C(S)$ とし、線形写像 $d : V \longrightarrow V$ が V 上の derivation であるとは：

$$d(fg) = fdg + gdf \forall f, g \in V$$

が満たされることである。」

X_H を Hamiltonian H の Hamilton ベクトル場という。
Hamilton 運動方程式の解は

$$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_H(\phi_t(p)), \qquad \phi_0(p) - p \tag{3.11}$$

を満たす写像 $\phi : P \times (-T, T) \longrightarrow P$ で各 t において $\phi_t : P \longrightarrow P$ が微分同相となるものである。

例 (非圧縮性流体方程式)

$$H(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_B \mathbf{v}\mathbf{v}d\omega$$

とおく。
$\frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ となるので、Hamilton 運動方程式は

$$\int_B \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) \cdot \dot{\mathbf{v}} d\omega = \frac{d}{dt}F(\mathbf{v}(t)) = \{H, F\}_-(\mathbf{v}) = -\int_B \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}), \mathbf{v}\right] d\omega$$

$Vect_{\mathrm{div},\partial}(B) \ni \mathbf{v}$ の満たす条件を使い、ベクトル解析を行うと、これは次の形に書けることがわかる。

$$\int_B \left\{\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla(\frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2)\right\} \cdot \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}}(\mathbf{v}) d\omega = 0, \qquad \forall F \tag{3.12}$$

これより運動方程式

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla(\frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2 = -\nabla q \tag{3.13}$$

が得られる。$p = q + \frac{1}{2}||\mathbf{v}||^2$ とおいて

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0 \\
&div\mathbf{v} = 0 \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_{\partial B} = 0 \\
&\Delta p = div((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \\
&\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}
\end{aligned}$$

3.2.2 infinitesimal Poisson automorphism

$$\mathcal{X}^{\text{inf.P.auto}}(P) = \{Y \in \mathcal{X}(P);\quad Y\{F,G\} = \{YF,G\} + \{F,YG\} \tag{3.14}$$

を infinitesimal Poisson automorphism のつくるベクトル場の全体とする。

$$H \in C^\infty(P) \Longrightarrow X_H \in \mathcal{X}^{\text{inf.P.auto}}(P) \tag{3.15}$$

は Lie algebra homomorphism である:

$$[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}} \tag{3.16}$$

証明

$$\begin{aligned} X_H\{F,G\} &= \{H,\{F,G\}\} = -\{\{F,G\},H\} \\ &= \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = \{\{H,F\},G\} + \{F,\{H,G\}\} \\ &\quad = \{X_HF,G\} + \{F,X_HG\} \end{aligned}$$

より　たしかに $X_H \in \mathcal{X}^{\text{inf.P.auto}}(P)$.

次に

$$\begin{aligned} [X_H,X_K]F &= X_H(X_KF) - X_K(X_HF) = X_H\{K,F\} - X_K\{H.F\} \\ &= \{H,\{K,F\}\} - \{K,\{H,F\}\} \\ &= \{\{H,K\},F\} = X_{\{H,K\}}F \end{aligned}$$

問

(P,ω) が symplectic で $X \in \mathcal{X}(P)$ が locally Hamiltonian すなわち $\mathcal{L}_X\omega = 0$ ならば $X \in \mathcal{X}^{\text{inf.P.auto}}(P)$ であることを示せ。

実際、$\mathcal{L}_X\omega = 0$ で ω が closed だから $i_X\omega$ も closed:

$$di_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega = \mathcal{L}_X\omega = 0.$$

したがって考えている点の近くでは $i_X\omega = dh$ となる関数 h がある。すなわち小さな領域に制限して考えると X はハミルトンベクトル場, $X = X_h$, であるから、

そこでは $X = X_h \in \mathcal{X}(P)$。任意の点においてそうだから $X \in \mathcal{X}^{\mathrm{inf.P.auto}}(P)$。

逆は成り立たない：

反例

$F, G \in C^\infty(\mathrm{R}^2_{(x,y)})$ に対して

$$\{F, G\}(x, y) = x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

とおくと、R^2 にひとつの Poisson 構造が入る。これは symplectic 多様体にならないことがわかる（ω が $(0,0)$ で退化するものしか取れない）。　ベクトル場 $X = \frac{\partial}{\partial y}$ は

$$\begin{aligned} X\{F, G\} &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right\} \\ &= x\left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial y})\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial G}{\partial y})\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial G}{\partial y}) - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial y})\right) \\ &= \{\frac{\partial F}{\partial y}, G\} + \{F, \frac{\partial G}{\partial y}\} \end{aligned}$$

で、たしかに $X \in \mathcal{X}^{\mathrm{inf.P.auto}}(P)$。ところが、もし $X = \frac{\partial}{\partial y}$ が locally Hamiltonian ならどの点においても、その小さな近傍で定義された関数 h により $\frac{\partial}{\partial y} = X_h$ と書けている。$(x, y) = (0, 0)$ において　このように書けていれば、$(0, 0)$ の近傍で $\forall F$ に対して、

$$\frac{\partial}{\partial y}F = \{h, F\} = x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

が成り立つ。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial y}h = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}h = \frac{1}{x}$$

で、これは h が原点に特異性を持つことになるので矛盾。

この反例はまた、（この Poisson 構造を与えた）平面への平行移動群の作用はハミルトン作用にならない、という例にもなっている。

3.2.3 多様体への Lie gr., Lie alg. の作用

M を多様体とする。（Poisson 多様体でなくてよい）
G; Lie group, $\mathcal{G}$; Lie algebra of G.

G が右から（左から）M に作用するとは、

$$G \times M \longrightarrow M; \qquad (g, x) \longrightarrow xg \,(\text{respectively}\,(g, x) \longrightarrow gx\,)$$

が定まり,$xe = x$, $(xg)h = x(gh)$ を満たすこと, respectively,（ $ex = x$, $h(gx) = (hg)x$ を満たすこと）である。

以下　**主に右からの作用**を書く。 Marsden-Ratiu のテキストでは左からである。しかし他の本では右からの場合が多いので、その場合のチェックを兼ねて、右にした。

$\mathcal{G} \ni \xi$ に対して infinitesimal generator of the right action by ξ; $\xi_M \in \mathcal{X}(M)$ を

$$\xi_M(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} x(\exp t\xi)$$

で定義する。

$\mathcal{G} \ni \xi$ に対して infinitesimal generator of the left action by ξ; $\xi'_M \in \mathcal{X}(M)$ を

$$\xi'_M(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (\exp t\xi)x$$

で定義する。

right action にともない、$\Phi_x(g) = xg$ と書く;

$$\Phi_x : G \ni g \longrightarrow \Phi_x(g) \in M$$

を微分して

$$\mathcal{G} = T_eG \ni \xi \xrightarrow{T_e\Phi_x} T_xM$$

を書くと $T_e\Phi_x(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} x \cdot \exp t\xi = \xi_P(x)$, (合成写像の微分法)。すなわち、

$$\xi_M(x) = T_e\Phi_x(\xi)$$

である。

命題 8 $\mathcal{G} \ni \xi \longrightarrow \xi_M \in \mathcal{X}(M)$ は *Lie algebra homomorphism* である。$\mathcal{G} \ni \xi \longrightarrow \xi'_M \in \mathcal{X}(M)$ は *Lie algebra anti- homomorphism* である。

証明

$X \in \mathcal{X}(M)$ に対して diffeomorphism Ψ による引き戻しを

$$\Psi^*X(x) = (T_{\Psi(x)}\Psi^{-1})(X(\Psi(x)))$$

で定義する。

$\Psi_g x = xg$ と書く;

$$M \ni x \overset{\Psi_g^{-1}}{\longleftarrow} \Psi_g x = xg \in M$$

の微分は

$$T_x M \overset{T_{xg}\Psi_g^{-1}}{\longleftarrow} T_{xg}M$$

であるから、
$\Psi_g^{-1}(xg\exp t\xi) = xg\exp t\xi\, g^{-1} = x\exp tAd_g\xi$　を微分して

$$\begin{aligned}(Ad_g\xi)_M(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi_g^{-1}(xg\exp t\xi) = T_{xg}\Psi_g^{-1}(\xi_M(xg)) = T_{\Psi_g x}\Psi_g^{-1}(\xi_M(\Psi_g x)) \\ &= ((\Psi_g)^*\xi_M)(x) \qquad (3.17)\end{aligned}$$

すなわち $(Ad_g\xi)_M = (\Psi_g)^*\xi_M$ がわかる。
ここで $g = \exp\{t\eta\}$ として

$$(Ad_{\exp t\eta}\xi)_M = \Psi^*_{\exp t\eta}\xi_M$$

右辺は、$\Psi_{\exp t\eta}$ が η_M の flow であることを考え、$t=0$ で微分すると, 接ベクトル η_M により ξ_M を微分するのだから、$[\eta_M,\xi_M]$　になる。一方、左辺は

$$[\eta,\xi] = ad_\eta\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}Ad_{\exp t\eta}\xi$$

だから、$[\eta,\xi]_M$ に等しい。ゆえに

$$[\eta,\xi]_M = [\eta_M,\xi_M]$$

すなわち $\mathcal{G} \ni \xi \longrightarrow \xi_M \in \mathcal{X}(M)$ は Lie algebra homomorphism である。
left action なら $(Ad_g\xi)'_M = (\Lambda_{g^{-1}})^*\xi'_M$, ただし $\Lambda_g x = gx$ がわかる。$g = \exp t\eta$ として同様の議論により $\mathcal{G} \ni \xi \longrightarrow \xi'_M \in \mathcal{X}(M)$ は Lie algebra anti-homomorphism;

$$[\eta,\xi]_M = -[\eta_M,\xi_M]$$

である。

3.2.4 Poisson 多様体への Lie ale. の作用

P を Poisson 多様体とする。
$\mathcal{G} \ni \xi$ に対して infinitesimal generator of the right action by ξ; $\xi_P \in \mathcal{X}(P)$ を

$$\xi_P(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}x(\exp t\xi)$$

$\forall \xi \in \mathcal{G}$ に対して, $\xi_P \in \mathcal{X}^{\mathrm{inf.P.auto}}(P)$ が成り立つとき、Lie 環 $\mathcal{G}$ が Poisson 多様体に **canonical** に作用するという。

Lie 環 $\mathcal{G}$ が Poisson 多様体に **canonical** に作用するとき、次の Lie alg. homo. の図を得る。

linear map $J : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(P)$ が存在して

$$X_{J(\xi)} = \xi_P, \quad \forall \xi \in \mathcal{G}, \qquad \text{すなわち} \tag{3.18}$$
$$\{J(\xi), F\} = \xi_P F, \quad \forall F \in C^\infty(P) \tag{3.19}$$

が成り立つとき、

$$\mathbf{J} : P \longrightarrow \mathcal{G}^* \tag{3.20}$$
$$< \mathbf{J}(z), \xi > = J(\xi)(z) \tag{3.21}$$

を **moment map** of the action という。

$$X_{J([\xi,\eta])} = X_{\{J(\xi),J(\eta)\}} \tag{3.22}$$

が成り立つ。

実際

$$X_{J([\xi,\eta])} = [\xi,\eta]_P = [\xi_P, \eta_P] = [X_{J(\xi)}, X_{J(\eta)}] = X_{\{J(\xi),J(\eta)\}}$$

ここで１番目と３番目の等号は J の定義より、２番目は $[\,,\,]_P$ が lie alg. homo. になることより、最後は式 (3.16) より従う。

Noether の定理

Lie 環 $\mathcal{G}$ が Poisson 多様体に **canonical** に作用し、モーメント写像 $\mathbf{J} : P \longrightarrow \mathcal{G}^*$ があると仮定する。　$H \in C^\infty(P)$ が $\mathcal{G}-$invariant すなわち $\forall \xi \in \mathcal{G}$ に対し $\xi_P H = 0$ とする。このとき $\mathbf{J}$ は Hamiltonian H の運動の定数である；

$$\mathbf{J} \circ \phi_t = \mathbf{J}$$

が X_H の flow ϕ_t に対し成り立つ。

証明

定義より,
$$X_H(J(\xi)) = \{H, J(\xi)\} = -X_{J(\xi)}H = -\xi_P H = 0.$$
すなわち $J(\xi)$ はハミルトン流れに沿って任意の点で無限小には不変、だから不変になる；$\xi \in \mathcal{G}$ に対して、

$$J(\xi)(\varphi_t z) = J(\xi)(z),$$

ここに φ_t は H のハミルトン流れである。

$\mathcal{G}$ の P への right canonical action　の モーメント写像 $J : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(P)$ が Lie algebra *anti*-homomorphism:

$$J([\xi,\eta]) = -\{J(\xi), J(\eta)\} \tag{3.23}$$

であるとき、この作用は Hamiltonian であるという。

左作用の場合は次のように述べられる。
$\mathcal{G}$ の P への left canonical action　の モーメント写像 $J : \mathcal{G} \longrightarrow C^\infty(P)$ が Lie algebra homomorphism:

$$J([\xi,\eta]) = \{J(\xi), J(\eta)\} \tag{3.24}$$

であるとき、この作用は **Hamiltonian** であるという。

定理 9 $\mathbf{J} : P \longrightarrow \mathcal{G}^*$ が $\mathcal{G}$ の P への *(right) Hamiltonnian action* の モーメント写像 であるとき、$\mathbf{J}$ は *Poisson map* になる；

$$\{F.G\}_- \circ \mathbf{J} = \{F \circ \mathbf{J}, G \circ \mathbf{J}\} \tag{3.25}$$

が $\forall F, G \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ に対し成立。

同様に
　$\mathbf{J} : P \longrightarrow \mathcal{G}^*$ が $\mathcal{G}$ の P への *(left) Hamiltonnian action* の モーメント写像であるとき、$\mathbf{J}$ は *Poisson map* になる；

$$\{F.G\}_+ \circ \mathbf{J} = \{F \circ \mathbf{J}, G \circ \mathbf{J}\}$$

が $\forall F, G \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ に対し成立。

証明.
仮定より $J([\xi,\eta]) = -\{J(\xi), J(\eta)\}$.
　$\xi = \frac{\delta F}{\delta\mu}(\mu)$, $\eta = \frac{\delta G}{\delta\mu}(\mu)$, $\mu = \mathbf{J}(z) \in \mathcal{G}^*$, $z \in P$ とおく。

$$\{F,G\}_{-} \circ \mathbf{J}(z) = -<\mu, [\frac{\delta F}{\delta\mu}(\mu), \frac{\delta G}{\delta\mu}(\mu)] >= -<\mu, [\xi,\eta] >= -J([\xi,\eta])(z) = \{J(\xi), J(\eta)\}(z)$$

　一方、$\mathbf{v} \in T_z P$ として、$d\mathbf{J}(z)\mathbf{v} \in T_\mu \mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*$ だから、

$$d(F\circ\mathbf{J})(z)\mathbf{v} = dF(\mathbf{J}(z)) \cdot (d\mathbf{J})(z)\mathbf{v} =< d\mathbf{J}(z)\mathbf{v}, \frac{\delta F}{\delta\mu} >=< d\mathbf{J}(z)\mathbf{v}, \xi >$$

最後の式は ξ について線形だから

$$= d(<\mathbf{J}(z), \xi >) \cdot \mathbf{v} = d(J(\xi))(z) \cdot \mathbf{v}$$

すなわち、$F \circ \mathbf{J}(z)$ と $J(\xi))(z)$ は P 上の関数として 1 次微分が等しい。Poisson 括弧式は関数の 1 次微分できまるから

$$\{J(\xi), J(\eta)\}(z) = \{F\circ\mathbf{J}, G\circ\mathbf{J}\}$$

3.2.5 とくに cotangent bundle への作用

　$\pi : P = T^*M \longrightarrow M$ を M の cotangent bundle. ω を P 上の symplectic form とする。P は Poisson 多様体になる。また P の局所座標を $q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n$ とする。$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.　　$\theta = \sum p_i dq_i$ を基本 1 次形式として, $\omega = d\theta$.
　対応

$$\mathcal{X}(M) \ni X = \sum X_i(q) \frac{\partial}{\partial q_i} \longrightarrow \theta(X) = \sum X_i(q) p_i \in C^\infty(P)$$

を考える。

$$\mathcal{L}(P) = \{F \in C^\infty(P); \quad F|\pi^{-1}(q) \text{ は } (p_1, \cdots, p_n) \text{ について線形 }\}$$

とする。$\theta(X) \in \mathcal{L}(P)$ である。

$(\mathcal{L}(P), \{\,,\,\})$ は $(C^\infty(P), \{\,,\,\})$ の Lie subalgebra になっている。$F \in \mathcal{L}(P)$,$F(q,p) = \sum F_i(q)p_i$ の Hamilton vector 場 X_F を計算すると、

$$X_F(q,p) = \sum_i \left[F_i(q)\frac{\partial}{\partial q_i} - (\sum_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i} p_j)\frac{\partial}{\partial p_i} \right]$$

ゆえに $\mathcal{L}(P)$ 上の Poisson 括弧式は

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial F_j}{\partial q_i} G_i - \frac{\partial G_j}{\partial q_i} F_i \right) p_j$$

により与えられる。

問.

1. 上の二つを証明せよ。

2. また、$\mathcal{X}(M) \ni X = \sum_i X_i(q)\frac{\partial}{\partial q_i} \longrightarrow \theta(X) \in \mathcal{L}(P)$ は Lie algebra isomorphism;
$$\{\theta(X), \theta(Y)\} = \theta([X, Y]) \tag{3.26}$$
であることを示せ。

3. $\mathcal{X}(M) \ni X$ に対して $X_{\theta(X)} \in \mathcal{X}(T^*M)$ を X の **cotangent lift** という。

4. $\theta(X) \in \mathcal{L}(P)$ の Hamilton vector 場 $X_{\theta(X)} \in \mathcal{X}(P)$ を求めよ。

5. $$[X_{\theta(X)}, X_{\theta(Y)}] = X_{\theta([X,Y])} \tag{3.27}$$
を示せ。

定理 10 *$\mathcal{G}$ が M に作用する、すなわち $\mathcal{G} \ni \xi$ に対して $\xi_M \in \mathcal{X}(M)$ が定義されるならば、$\mathcal{G}$ は $P = T^*M$ に canonical に作用する。すなわち ξ_M の cotangent lift $\xi_P = X_{\theta(\xi_M)}$ は $\xi_P \in \mathcal{X}^{\mathrm{inf.P.aut}}(P)$ であり、*

$$[\xi_P, \eta_P] = [\xi, \eta]_P \tag{3.28}$$

を満たす。

さらにモーメント写像 $\mathbf{J}: P \longrightarrow \mathcal{G}^*$ は

$$< \mathbf{J}(z), \xi >= \theta(\xi_M)(z)$$

$z = (q,p) \in P$ で与えられ、Poisson 多様体 T^*G への $\mathcal{G} = LieG$ の canonical 作用は Hamiltonian になる。

証明.

$$
\begin{aligned}
[\xi,\eta]_P &= X_{\theta([\xi,\eta]_M)}\,(\text{命題 1 より}) = X_{\theta([\xi_M,\eta_M])} && (3.29)\\
&= ((13)\text{ より})X_{\{\theta(\xi_M),\theta(\eta_M)\}} = ((3)\text{ より})[X_{\theta(\xi_M)},X_{\theta(\eta_M)}] && (3.30)\\
&= [\xi_P,\eta_P] && (3.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi_P\{F,H\} &= X_{\theta(\xi_M)}\{F,H\} = \{\theta(\xi_M),\{F,H\}\} = -\{\{F,H\},\theta(\xi_M)\}\\
&= \{\{H,\theta(\xi_M)\},F\} + \{\{\theta(\xi_M),F\},H\} = -\{X_{\theta(\xi_M)}H,F\} + \{X_{\theta(\xi_M)}F,H\}\\
&= \{\xi_P F,H\} + \{F,\xi_P H\}
\end{aligned}
$$

ゆえに $\mathcal{G}$ acts canonically on P.
モーメント写像 $\mathbf{J}$ の式は、cotangent lift の定義 $X_{\theta(\xi_M)} = \xi_P$ より

$$J(\xi)(z) = \theta(\xi_M)(z), \qquad z = (q,p)$$

となる。

$$J([\xi,\eta]) = \theta([\xi,\eta]_M) = \theta([\xi_M,\eta_M])$$

で、これは (13) より

$$= \{\theta(\xi_M),\theta(\eta_M)\} = \{J(\xi),J(\eta)\}$$

に等しい。ゆえに　考えている right canonical action は Hamiltonian になる。

とくに $M=G$ のときを考えると、G は G に右より作用しており、Poisson 多様体 T^*G への $\mathcal{G} = LieG$ の作用は Hamiltonian である。このときのモーメント写像を求めよう。

$$\xi_G(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} g\exp t\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} L_g \exp t\xi = T_e L_g(\xi)$$

であるから、

$$< \mathbf{J}_R(z),\xi >=< z,\xi_G >=< z,T_eL_g\xi >=< (T_eL_g)^*z,\xi >$$

すなわち、モーメント写像 $\mathbf{J}: T^*G \longrightarrow \mathcal{G}^*$ は、

$$\mathbf{J}_R(z) = (T_eL_g)^*z. \tag{3.32}$$

で与えられる。

3.3 Lie-Poisson reduction theorem

リー群の余接束 $P = T^*M$ の Poisson 構造を, $\mathcal{G} = T_e^*$ に制限して前に述べた $\mathcal{G}$ の Poisson 構造 $\{\, ,\, \}_\pm$ が得られることを見よう。

左からのかけ算

$$L_g : G \ni h \longrightarrow gh \in G$$

を微分して

$$T_h L_g : T_h G \ni \xi \longrightarrow T_h L_g(\xi) \in T_{gh}G$$

が得られる。

P 上の関数 Φ が G の作用により左不変であるとは

$$\Phi(z) = \Phi((T_h L_g)^* z), \qquad z \in T^*_{gh}G, \quad \forall h, \quad \forall g$$

が成り立つことである。とくに、$F(\alpha) = \Phi((T_g L_{g^{-1}})^*\alpha)$, $\forall g \in G$, により左不変関数 Φ は $\mathcal{G}^* = T_e^*G$ 上の関数 $F \in C^\infty(\mathcal{G})$ を定める。逆に $F \in C^\infty(\mathcal{G})$ に対して、

$$F^L(z) = F((T_e L_g)^* z)$$

により $P = T^*G$ 上の左不変関数 F^L が定まる。

$P = T^*G$ 上の左不変関数の全体 $C^\infty(P)^{\mathrm{leftinv}}$ は $(C^\infty(P), \{\, ,\, \})$ のリー部分代数であり、リー代数として

$$C^\infty(P)^{\mathrm{leftinv}} \simeq C^\infty(\mathcal{G}^*).$$

この右辺の $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ は次の 2 通りの Poisson 構造を持つ**はず**だった ;

定義

$$\{F, G\}_\pm(\mu) = \pm < \mu, [\frac{\delta F}{\delta \mu}(\mu), \frac{\delta G}{\delta \mu}(\mu)] > \qquad \forall \mu \in \mathcal{G}^* \tag{3.33}$$

ここに $\frac{\delta F}{\delta \mu}(\mu) \in \mathcal{G}$ は

$$DF(\mu) \;=\; < \nu, \frac{\delta F}{\delta \mu}(\mu) > \tag{3.34}$$

$$DF(\mu) \;=\; \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{F(\mu + \epsilon\nu) = F(\mu)}{\epsilon} \qquad \forall \mu, \nu \in \mathcal{G}. \tag{3.35}$$

はずというのは、$\{\, ,\, \}_\pm$ が bilinear/R, antisymmetric であり、微分に関して Leibnitz rule を満足するのを見るのはやさしいが、Jacobi identity を満たすこ

とは直接計算で示さず、T^*G の Poisson 構造を $\mathcal{G} = T_e^*G$ に制限して Poisson 構造 $\{\,,\,\}_\pm$ を得るつもりだからである。

定理 11

$$\{F, H\}_- = \{F^L, H^L\}|_{\mathcal{G}^*} \tag{3.36}$$

系 12 $\{F, H\}_-$ は $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ の *Poisson* 構造を与える。

[言い換え]

$$\lambda : T^*G \longrightarrow \mathcal{G}^*$$

を

$$\lambda(z) = (T_e L_g)^* z$$

で定義するとき、

$$\{F \circ \lambda, H \circ \lambda\}_- = \{F^L, H^L\}_- \circ \lambda \tag{3.37}$$

証明

$\mathcal{G}$ の $P = T^*G$ への canonical right action は Hamiltonian action となり、またそのモーメント写像は

$$\mathbf{J}_R(z) = (T_e L_g)^* z = \lambda(z), \qquad z \in P$$

で与えられることをすでに見た。

すなわち

$$\mathbf{J}_R = \lambda$$

定理 2.1 を適用して

$$\{F \circ \lambda, H \circ \lambda\}_- = \{F^L, H^L\}_- \circ \lambda$$

証明終わり。

同様にして左作用に対して考えると、

$$\begin{aligned}
F \in C^\infty(\mathcal{G}^*) \quad & \simeq C^\infty(P)^{\mathrm{rightinv.}} \ni F^R(z) = F((T_e R_g)^* z) && (3.38)\\
\xi'_G(g) \quad & = T_e R_g(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp t\xi \cdot g && (3.39)\\
\rho : \quad & T^*G \ni z \longrightarrow \rho(z) = (T_e R_g)^* z \in \mathcal{G}^* && (3.40)\\
\mathbf{J}_L \quad & = \rho, && (3.41)
\end{aligned}$$

等を用いて

$$\{F \circ \rho, H \circ \rho\}_+ = \{F^R, H^R\}_+ \circ \rho. \tag{3.42}$$

第4章　Coadjoint orbit

4.1　adjoint orbit

$g \in G$ に対し

$$Ad_g * \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

は

$$[Ad_g\xi, Ad_g\eta] = Ad_g[\xi, \eta]$$

を満たすのでリー環の自己準同型であるが、さらに $Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$ なので

$$G \ni g \longrightarrow Ad_g \in End(\mathcal{G})$$

は G の表現である。この像

$$\{Ad_g; \qquad g \in G\}$$

を the adjoint orbits という。$\{Ad_g\eta; \qquad g \in G\}$ を $\eta \in \mathcal{G}$ を通る adjoint orbit という。

例．1

$G = SO(3)$ の adjoint orbits は球面か原点である。実際 $\mathcal{G} = so(3) = \mathrm{R}^3 \ni \xi$ を通る adjoint orbit は $\{Ad_g\xi = g\xi g^{-1}; \qquad g \in SO(3)\}$ で $\xi = 0$ なら原点に、$\xi \neq 0$ なら半径 $\|\xi\|$ の球面 $\{\eta \in \mathrm{R}^3; \qquad \|\eta\| = \|\xi\|\}$ になる。

例 2．$G = GL(n, \mathrm{C})$, $\mathcal{G} = \mathrm{Mat}(n, \mathrm{C})$　$X \in \mathrm{Mat}(n, \mathrm{C})$ に対して,X を通る adjoint orbit を

$$Ad_G X = \{Ad_g X;\, g \in G = GL(n, \mathrm{C})\}$$

とすると、

$$Ad_G X = \{Y \in \mathrm{Mat}(n, \mathrm{C}); \quad Y \text{ は } X \text{ と同じ Jordan 標準形をもつ}\}$$

となる。なぜなら任意の n 次正方行列 X は適当な $g \in GL(n, \mathrm{C})$ により

$$gXg^{-1} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A^{(2)} & \cdots & 0 \\ 0 & \ldots & \cdots & \\ 0 & \ldots & \cdots & A^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_k & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ldots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ldots & \cdots & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

と書けるから。

例．3

$$G = SL(2,\mathrm{R}) = \{A:\ 2\times 2\mathrm{matrix},\ \det A = 1\}$$

$$\mathcal{G} = \{X = \begin{pmatrix} z & x \\ y & -z \end{pmatrix}\}$$

X の Jordan 標準形は $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$, $\lambda = \sqrt{z^2+xy}$. したがって X を通る adjoint orbit　$Ad_G X$ は $z^2+xy=c\neq 0$ のとき quadrics、放物双曲面 $z^2+xy=c$ の連結成分、$c=0$ のとき 2 つの半円錐 $z^2+xy=0,\ z<>0$, と原点である。

例．4 $G =$ 直線上のアフィン変換群

$$G = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G} = \{X = \begin{pmatrix} x & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

$$Ad_g X = \begin{pmatrix} x & a\xi - bx \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

となるので、X を通る adjoint orbit は (x,ξ) 面上で、
$x\times(-\infty,\infty)$, $x\neq 0$ のとき、
$\{x=0,\ \xi>0\}$, $\{x=0,\ \xi<0\}$, $(0,0)$
の 4 つの orbit がある。

4.2　Coadjoint orbit

$\mathcal{G}$ をリー環、$\mathcal{G}^*$ をベクトル空間 $\mathcal{G}$ の双対空間とする。　ベクトル空間 X から Y への線形写像 $A:\ X\longrightarrow Y$ に対して、その双対（共役) $A^*:Y^*\longrightarrow X^*$ を

$$A^*y^*(x) = y^*(Ax)$$

で定義する。　$\mathcal{G}$ が半単純すなわち 非退化な Killing 形式 $<X,Y>= Tr\, AdX\, AdY$ を持つなら $\mathcal{G}^*$ もリー環になるが、一般にはそうはいかないし、さらに悪く $\mathcal{G} = Vect_{\mathrm{div},\partial}(M)$ のようにリー環風の対象については、$\mathcal{G}^*$ は単なるベクトル空間としてしか考えられないであろう。　それでも　表現 $G\longrightarrow End(\mathcal{G}^*)$

を考えることがものごとの本質をわからせてくれるはずである、というのがKirillovやArnoldの重要な発見であったのだろう。

左（resp. 右) からのかけ算

$$L_g : G \ni h \longrightarrow L_g h = gh \in G$$

(resp.)

$$R_g : G \ni h \longrightarrow R_g h = hg \in G$$

の微分

$$(L_g)_{*,h} : T_h G \longrightarrow T_{gh} G,$$

(resp.)

$$(R_g)_{*,h} : T_h G \longrightarrow T_{hg} G,$$

の双対を $((L_g)_*)^*$ と書かないで

$$(L_g)^*_{gh} : T^*_{gh} G \longrightarrow T^*_h G,$$

(resp.)

$$(R_g)^*_{hg} : T^*_{hg} G \longrightarrow T^*_h G,$$

と書く。

（かなりしつこい記号にしている、他の本ではもっと簡単に $(L_g)^*$ と書いてあることが多い。）

$$Ad_g = (R_{g^{-1}})_* (L_g)_* : T_e G = \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

であった。

adjoint representation Ad_g の双対

$$Ad^*_g = (L_g)^*_{g^{-1}} (R_{g^{-1}})^*_e : T^*_e G = \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^*$$

$$(Ad^*_g \xi, X) = (\xi, Ad_g X), \qquad \xi \in \mathcal{G}^*,\ X \in \mathcal{G}$$

を coadjoint representation of G という：

$$Ad^*_{gh} = Ad^*_h ad^*_g.$$

$$Ad^*_G \xi = \{Ad^*_g \xi; \qquad g \in G\} \subset \mathcal{G}^*$$

を $\xi \in \mathcal{G}^*$ を通る coadjoint orbit という。

例. アフィン群

$$\mathcal{G}^* = \left\{ \Lambda = \begin{pmatrix} m & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix} . \right\}$$

$g = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、

$$Ad_g\Lambda = \begin{pmatrix} m - q\mu & 0 \\ p\mu & 0 \end{pmatrix}$$

は $(m, \mu)-$ 平面の Λ を通る勾配 $\frac{q}{p}$ の直線 になるので、Λ を通る coadjoint orbit は、上半平面 $(\mu > 0)$, 下半平面 $(\mu < 0)$ と点 $(m, 0)$ の 3 つにわかれる。これは前節 例 4 の adjoint orbit と異なっている。

4.3　Coadjoint orbit 上の symplectic 構造

G の $\mathcal{G}$ への adjoint action は

$$\mathcal{G} \ni \xi \longrightarrow Ad(g)\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} g \cdot \exp t\xi \cdot g^{-1}$$

で定義される。G の $\mathcal{G}^*$ への coadjoint action は

$$< Ad^*(g)\alpha, \xi > = < \alpha, Ad(g)\xi >$$

で定義される。

$o \in \mathcal{G}^*$ を通る coadjoint orbit とは

$$\mathcal{O} = \{Ad^*(g)o; \qquad g \in G\} \subset \mathcal{G}^*$$

なる G の coadjoint 作用の軌道のことをいう。

定理 13 (Kirylov) すべての *coadjoint orbit* $\mathcal{O}$ 上には自然に *symplectic* 構造が定められる。

証明.

軌道 $\alpha \in \mathcal{O} \subset \mathcal{G}$ を考える。

$$\mathcal{O} \simeq G/G^\alpha,$$

G^α; isotropy group of α, でその接空間は

$$T_\alpha\mathcal{O} = T_\alpha G/G^\alpha = \mathcal{G}/\mathcal{G}^\alpha,$$

$\mathcal{G}^\alpha = Lie(G^\alpha)$ である。

G 上の symplectic 形式

$$\omega_\alpha : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathrm{C}$$

$$\omega_\alpha(x, y) = \alpha([x, y])$$

が $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\alpha$ に降りること、すなわち

$$x \in \mathcal{G}^\alpha \Longrightarrow \omega_\alpha(x, y) = 0 \qquad \forall y \in \mathcal{G}$$

を示せばよい。
　coadjoint action による α の isotropy group の定義より

$$g \in G^\alpha \Longleftrightarrow Ad^* g(\alpha) = \alpha$$

これを微分して、$x \in \mathcal{G}^\alpha$ に対して、

$$x \in \mathcal{G}^\alpha \Longleftrightarrow ad^* x(\alpha) = 0$$

一方

$$ad^* x(\alpha) : |calG \ni y \longrightarrow \alpha(adx(y)) = \alpha([x, y]) = \omega_\alpha(x, y)$$

より

$$x \in \mathcal{G}^\alpha \Longleftrightarrow \omega_\alpha(x, y) = 0 \qquad \forall y \in \mathcal{G}$$

　以上より ω_α は $\mathcal{G}/\mathcal{G}^\alpha$ に降りて、$\mathcal{O}$ 上の 2-form $\alpha \longrightarrow \omega_\alpha$ が定義される。

$$d\omega = 0$$

の証明.
　$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathcal{X}(\mathcal{O})$ に対して、

$$d\omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1\omega(\xi_2, \xi_3) + \xi_2\omega(\xi_3, \xi_1) + \xi_3\omega(\xi_1, \xi_2) - \omega([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - \omega([\xi_2, \xi_3], \xi_1) - \omega([\xi_3, \xi_1], \xi_2)$$

　さて、$x \in \mathcal{G}$ の $\mathcal{G}^*$ への作用によりベクトル場

$$\xi_x(\lambda) = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad^*(\exp tx)(\lambda) \in \mathcal{X}(\mathcal{O})$$

が定まり、$\{\xi_x;\, x \in \mathcal{G}\}$ は各点 α での接空間 $T_\alpha\mathcal{O}$ を張っている。　また定理 1 より $[\xi_{[x,y]} = [\xi_x, \xi_y]$.
　したがって、 $d\omega(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = 0$ を示せばよい。

$$\omega(\xi_y, \xi_z)(\alpha) = \alpha([y, z]), \qquad (\xi_x w)(\alpha) = \alpha([x, w])$$

より従う。

　参考文献は

　Marsden-Ratiu: *Introduction to Mechanics and Symmetry*, TAM17, Springer(1994).
　Arnold: *Sur la géometrie differentielle des groups de Lie de dimension infinie et ses applications à lhydrodynamique des fluids parfaits*, Ann. Inst. Fourier, 16(1966).

この講義録は、早稲田大学理工学部ー大学院共通の 2002 年秋学期と 2003 年春学期の微分幾何学 A, B の講義ノートを整理して作った。 この講義の出席者には数理科学科の学生のほかに物理ー応用物理学科や機械学科の学生もいて、講義の準備の時に大いに励みになった。この方たちに感謝する。

講義で話さなかったが、Coadjoint Orbit の方法　の節を付け加えた。

この講義の目的は、学生に解析力学の数学を教えることのほかに、私自身が

Marsden-Weinstein: *Coadjoint orbits, vortices and Clebsch variables for incompressible fluids*, Physica D7(1983).

を理解し、渦流の運動の Poisson 幾何の研究を始めるために, これまでに持っていた解析力学の知識を整理し明確にしておくためであった。　その研究はまだ始めてないし、やっと vortices による記述と Clebsch variables が有効な概念らしいことがわかった程度だが。

後者に興味を持つようになったのは

Brylinski, J.-L., *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Birkhäuser (1993).

による　Hashimoto 変換のすばらしい解説のおかげである (子供の頃から Ampère の法則など 渦や双対性が好きなせいもある)。

Hashimoto: *A soliton on a vertex filament*, J. Fluid Mechanics 51(1972).

Langer- Perline: Poisson geometry of the filament equation, J. Nonlinear Sci.1(1991).