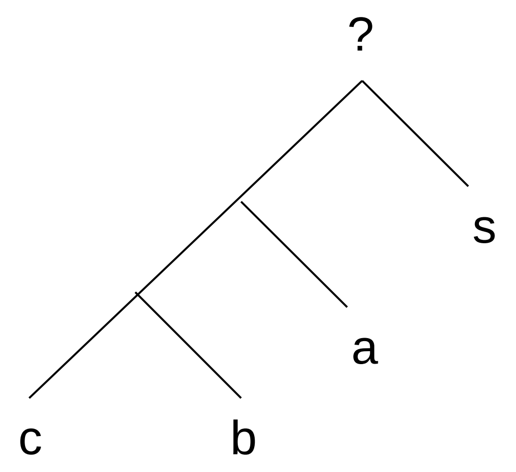
第3章
さまざまな多数決ルール

ルールの比較
コンドルセ勝者

1．12個の多数決ルール 修正手続き

- 対案の中で勝ったものを現状維持と比較
- それぞれ単純多数決を使う

現状維持(s)
原案(a)
修正案(b)
修正案の修正案(c)



シュワルツ方式

- 頂上循環
  - 上位の選択肢間で循環が生じる
- シュワルツ方式
- 勝者集合　S⊂X（普遍集合）

（1）　∀x∈S, ∀y∈X＼S：xPy

（2）　S：最小

最多数投票(最大多数決定)
(1人1票制)

- 各決定参加者が自分の第1位とする選択肢に投票し，得票数の多い順に決められた個数 (k) まで勝者とする
- k=1　→　小選挙区制
- k≧2　→　大選挙区制
- 日本の中選挙区制

  → 3≦k≦5 の大選挙区制

ボルダ方式(1)

- 各決定参加者がそれぞれの選択肢に評点を与え，評点の合計が最大になる選択肢が勝者となる
- ボルダ自身は

  小さい方から，p, p+q, p+2q, …
- ここでは，小さい方から，0, 1, 2, 3,…
- 評点の合計＝各人の選好において他の選択肢に勝った回数の合計

3	2
a	c
b	b
c	a

5人による意思決定

単純多数決＝二項比較

$a \succ b \succ c$

a が勝者

	3	2	合計
a	2	0	6
b	1	1	5
c	0	2	4

ボルダ方式では，評点の合計が最大であるa が勝者

5人による意思決定

3	2
a	b
b	c
c	a

単純多数決＝二項比較

$$a \succ b \succ c$$

a が勝者

	3	2	合計
a	2	0	6
b	1	2	7
c	0	1	2

ボルダ方式では，評点の合計が最大である b が勝者

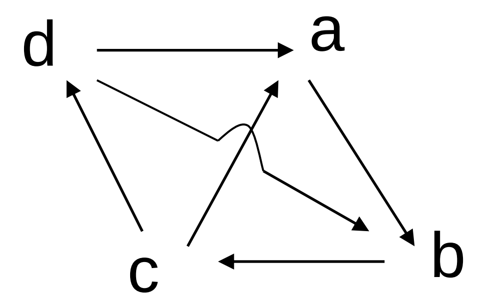
↓↓

単純多数決とボルダ方式は，異なる勝者を選びうる

順位逆転のパラドックス
勝者転落のパラドックス

3	2	2
c	b	a
b	a	d
a	d	c
d	c	b

単純多数決では



	3	2	2	合計
a	1	2	3	13
b	2	3	0	12
c	3	0	1	11
d	0	1	2	6

⇒

	3	2	2	合計
a	0	1	2	6
b	1	2	0	7
c	2	0	1	8

勝者が a から c に転換

ボルダ方式(2):別の定義

［定義］**ボルダ数**$\beta_i(x)$

- 任意のx に対し, x より厳密に選好されない選択対象の数から, x より厳密に選好される選択対象の数を引いた数
- ボルダ方式の下での社会的選択関数

$$C(X)=\{x\} \Leftrightarrow \Sigma_i \beta_i(x) \geqq \Sigma_i \beta_i(y), \forall y \in X$$

- それぞれの選択肢に勝利回数－敗北回数の評点を与え, 評点の合計が最大になる選択肢が勝者となる

3	2	2
c	b	a
b	a	d
a	d	c
d	c	b

別の定義では，点数の総計が0になる.
最初の定義では，点数の総計が，人数×n(n-1)/2 になる.

	3	2	2	合計
a	-1	1	3	5
b	1	3	-3	3
c	3	-3	-1	1
d	-3	-1	1	-9

⇒

	3	2	2	合計
a	-2	0	2	-2
b	0	2	-2	0
c	2	-2	0	2

勝者が a から c に転換

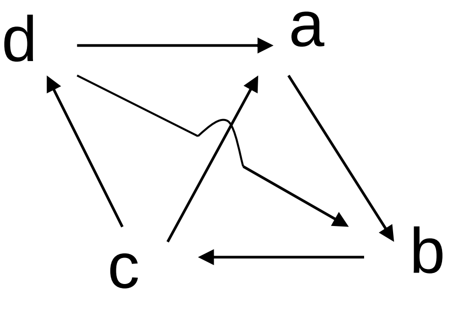
コープランド方式

- 二項比較での勝利回数から敗北回数を差し引いた値が最大である選択肢を勝者とする
- 単純多数決による二項比較

3	2	2
c	b	a
b	a	d
a	d	c
d	c	b

γ(x):コープランド数
γ(a)=2-1=1
γ(b)=2-1=1
γ(c)=1-2=-1
γ(d)=1-2=-1
よって, a, b が勝者

単純多数決



ドッジソン方式

- $a \succ b$ を $b \succ a$ に変える操作　→　反転
- ドッジソン勝者
  ＝コンドルセ勝者となるのに必要な反転の数が最小である選択肢
- 前ページの例
  - a=2（bに勝つためには2人が $a \succ b$ になればよい）
  - b=2，c=2，
  - d=6（aに勝つために4人，bに勝つために2人反転）
- ドッジソン勝者は，a，b，c

ナンソン方式

- 評点の合計が平均未満である選択肢を，評点が少ない方から順に排除していく連続的なボルダ方式

⇒

	3	2	2	合計
b	0	1	0	2
c	1	0	1	5

評点の合計が平均未満であるaが取り除かれて，bとcの間でボルダ方式を使うとcが選ばれる

ブラック方式

- 単純多数決とボルダ方式の組み合わせ
- コンドルセ勝者が存在すればそれを最終勝者，コンドルセ勝者が存在しないときはボルダ勝者を選ぶ

ヘア方式

- 投票者が全選択肢について選好順序を表明
- 第1位が最少の選択肢を排除して，その得票を，人々の順序で第2位とされた選択肢に配分する
- 同点の場合を除き、1つの選択肢が選ばれるまで繰り返す

ヘア方式(続き)

- 有効投票数＝V, 勝者数＝k （k個を選ぶ）
- 勝利に必要な最小得票数 q＝V/(k+1)+1
- qに達した選択肢があればそれを勝者とする
- なければ, 第1位が最少の選択肢を排除して, その得票を, それらの人の順序で第2位とされた選択肢に配分する
- k個の選択肢が選ばれるまで繰り返す

クームズ方式

- ヘア方式の変形
- 第1位とする選択肢が最も少ない選択肢の代わりに，最下位とする人が最も多い選択肢を排除する

決勝付選挙（決選投票付決定）

- 投票者はそれぞれ第1位とする選択肢に投票する（最多数投票と同じ）
- 過半数の支持を得た選択肢がある場合には，それが勝者となる
- そのような選択肢がない場合，上位2個の選択肢で決戦を行う

承認投票

- 投票がm個の選択肢のうち自分が好むs個($0 \leqq s \leqq m$)に投票して，得票数が最も多い選択肢が勝者となる
- 長所：参加者がなしうる決定行為の豊富さ
- 可能な決定行為
  - 最多数投票：$m+1$

    {a}, {b}, {c}, ϕ
  - 承認投票：2^m

    {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}, ϕ

2. 結果のルール依存性

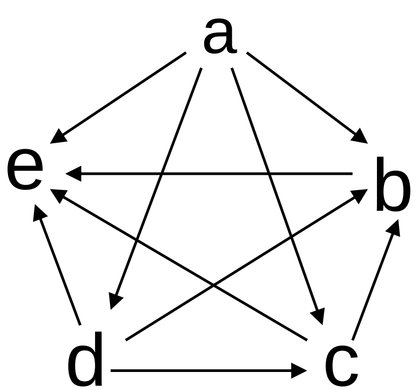
- 決定参加者の選好が同じでも，ルール次第で結果は大きく異なりうる

  ＝結果のルール依存性

	a	b	c	d	e
a		18	18	18	18
b	37		43	29	27
c	37	12		39	19
d	37	26	16		22
e	37	28	36	33	

単純多数決ではe

結果のルール依存性



単純多数決

18	12	10	9	4	2
a	d	c	b	e	e
b	e	d	c	d	c
e	b	e	e	b	b
c	c	b	d	c	d
d	a	a	a	a	a

前ページ

↑

単純多数決ではe
最多数投票ではa
が選ばれる
決勝付選挙なら
aとdが残り，最終的にdが勝つ

	18	12	10	9	4	2	合計
a	4	0	0	0	0	0	72
b	3	2	1	4	2	2	136
c	1	1	4	3	1	3	107
d	0	4	3	1	3	1	101
e	2	3	2	2	4	4	134

ボルダ方式では
b が選ばれる

	a	b	c	d	e
第1段階	18	9	10	12	6
第2段階	18	9	12	16	--
第3段階	18	--	21	16	--
第4段階	18	--	37	--	--

ヘア方式では c が勝者
クームズ方式では e が勝者（これを示せ：宿題）

	第1位	第2位	第3位	合計
a	18	0	0	18
b	9	18	18	45
c	10	11	0	21
d	12	14	0	26
e	6	12	37	55

第3位までの**承認投票**ではeが勝者

3. コンドルセ基準

- ルール比較の基準
- コンドルセ勝者基準
  - コンドルセ勝者が存在する場合は，その選択肢が勝者となる
- コンドルセ敗者基準
  - 単純多数決で他のすべての選択肢に負けるコンドルセ敗者が存在する場合，その選択肢は勝者とはならない
- コンドルセ基準

　＝コンドルセ勝者基準＋コンドルセ敗者基準

- 修正手続きとシュワルツ方式は(2つの)コンドルセ基準を満たす
  - コンドルセ勝者はどんなトーナメントでも勝つし，コンドルセ敗者は必ず負ける
  - コンドルセ勝者は頂上循環の唯一の選択肢であり，コンドルセ敗者は頂上循環には入らない
- 最多数投票はどちらの基準も満たさない（ボルダのパラドックス）
  - 1968年アメリカ大統領選:コンドルセ勝者は勝ったニクソンではなく，敗れたハンフリー
  - 1880年，1884年，1888年，1912年のアメリカ大統領選挙では，コンドルセ勝者が落選している

ボルダのパラドックス

7	7	6	1
a	b	c	a
c	c	b	b
b	a	a	c

	a	b	c
a		8	8
b	13		8
c	13	13	

- 最多数投票の勝者：a
- 決勝付選挙の勝者：b
  1回目：cが落選
  2回目：bが当選，aが落選
- コンドルセ勝者：c
- コンドルセ敗者：a
- ボルダのパラドックス
  - 最多数投票はコンドルセ勝者基準・コンドルセ敗者基準をともに満たさない

ボルダ方式はコンドルセ勝者基準を満たさない

30	29	10	10	1	1
a	b	b	c	a	c
b	a	c	a	c	b
c	c	a	b	b	a

	a	b	c
a		41	60
b	40		69
c	21	12	

	30	29	10	10	1	1	合計
a	2	1	0	1	2	0	101
b	1	2	2	0	0	1	109
c	0	0	1	2	1	2	33

単純多数決による
勝者はa
ボルダ方式，および
最多数投票による
勝者はb

コンドルセ勝者基準は直観に合わない

3	3	3	2
a	a	b	b
b	b	c	d
c	d	d	c
d	c	a	a

	a	b	c	d
a		6	6	6
b	5		11	11
c	5	0		6
d	5	0	5	

	3	3	3	2	合計
a	3	3	0	0	18
b	2	2	3	3	27
c	1	0	2	1	11
d	0	1	1	2	10

単純多数決によるコンドルセ勝者はa
aは半数近くで最下位
ボルダ勝者はb
bは全員にとって第1位か第2位

ドッジソン方式はコンドルセ敗者基準を満たさない

5	5	3	2
a	c	b	d
b	d	c	b
d	a	a	c
c	b	d	a

⇒

	a	b	c	d
a		10	5	8
b	5		10	8
c	10	5		8
d	7	7	7	

a,b,c,dのいずれも必要な反転の回数は3. 4つともドッジソン勝者. しかし, dはコンドルセ敗者

コープランド方式は両コンドルセ基準を満たす

ヘア方式はコンドルセ勝者基準を満たさない

5	5	3	3	2
a	e	c	~~d~~	~~b~~
b	b	b	~~b~~	c
c	c	d	c	d
d	d	e	e	e
e	a	a	a	a

	a	b	c	d	e
第1段階	5	2	3	3	5
第2段階	5	--	5	3	5
第3段階	5	--	8	--	5

	a	b	c	d	e
a		5	5	5	5
b	13		15	15	13
c	13	3		15	13
d	13	3	3		13
e	13	5	5	5	

第1位とする投票者が最も少ないbが排除される. しかし, bはコンドルセ勝者

クームズ方式はコンドルセ勝者基準を満たさない

5	4	4	4	2	2
a	a	b	c	b	c
b	c	c	b	a	a
c	b	a	a	c	b

	a	b	c
第1段階	9	6	6
第2段階	--	11	10

クームズ勝者はb

総有権者数は21. a,b,cのどれも過半数q=11には達しない. 最下位とする投票者が最も多いaが排除される. しかし, aはコンドルセ勝者

	a	b	c
a		11	11
b	10		11
c	10	10	

ナンソン方式，ブラック方式は，コンドルセ勝者基準，敗者基準をともに満たす

決勝付選挙はコンドルセ敗者基準を満たす
(コンドルセ敗者は遅くとも決勝で敗れるから)
しかし，コンドルセ勝者基準は満たさない

7	7	6	1
a	b	c	a
c	c	b	b
b	a	a	c

a,bが決勝に進み，最終的にbが勝者となるが，コンドルセ勝者はcである

4．単調性・一貫性（整合性）・パレート原理

- 単調性（非負の感応性）
  - 一部の投票者が自らの選好順序において，勝者となった選択肢の順位を上げ，他の投票者が順位を変更しないならば，その選択肢は勝者から転落することはない
- 修正手続・シュワルツ方式・最多数投票・ボルダ方式・コープランド方式・ブラック方式・承認投票は，単調性を満たす
- ドッジソン方式はあるタイプで満たす

ナンソン方式は単調性を満たさない（1）

8	5	5	2
a	b	c	c
b	c	a	b
c	a	b	a

	8	5	5	2	合計
a	2	0	1	0	21
b	1	2	0	1	20
c	0	1	2	2	19

ボルダ評点が平均未満のcが排除され，aが勝者となる

	8	5	5	2	合計
a	1	0	1	0	13
b	0	1	0	1	7

ナンソン方式は単調性を満たさない（2）

8	5	5	2
a	b	c	c
b	c	a	a
c	a	b	b

	8	5	5	2	合計
a	2	0	1	1	23
b	1	2	0	0	18
c	0	1	2	2	19

2人の投票者がaの順位を引き上げたとする
ボルダ評点が平均未満のbが排除され，cが勝者となる
（平均以下を順に排除）

	8	5	5	2	合計
a	1	0	0	0	8
c	0	1	1	1	12

ヘア方式・決勝付選挙は単調性を満たさない

a : c = 13 : 8

7	6	5	3
a	~~b~~	c	c
b	a	b	a
c	c	a	b

a : b = 10 : 11

7	6	5	3
a	b	~~c~~	a
b	a	b	c
c	c	a	b

左表の投票では，第1位とする投票者が最も少ないbが排除され，その支持票を得たaが勝者となる

3人がaの順位を引き上げた右表では，第1位とする投票者が最も少ないcが排除され，その支持票を得たbが勝者となる

決勝付選挙も同じ．左表ではaとcの決選投票でaが勝者となり，右表ではaとbの決選投票でbが勝者となる

クームズ方式は単調性を満たさない

5	4	2	2
a	c	b	c
b	a	c	b
~~c~~	b	a	a

5	4	2	2
a	c	b	c
b	a	c	a
c	~~b~~	a	~~b~~

左表の投票では，最下位とする投票者が最も多いcが排除され，aが勝者となる　（a : b = 9 : 4）
2人がaの順位を引き上げた右表では，最下位とする投票者が最も多いbが排除され，cが勝者となる　（a : c = 5 : 8）

- 一貫性（整合性）
  - 2つの投票者集団が同一の選択肢集合について投票を行ったとき，2つの勝者集合が共通部分を持つなら，2つの集団が一緒になった全体集団では，共通部分の選択肢すべてが勝者となり，かつ勝者はそれだけに限定されるべきである
  - 部分集団による決定と全体集団による決定の首尾一貫性

- 一貫性はコンドルセ勝者基準と相容れない
- 匿名性・中立性・一貫性を満たすルールはコンドルセ勝者基準を満たさない（Young, 1975）
- 12個の多数決ルールは匿名性を満たす
- 修正手続以外は中立性も満たす
- コンドルセ勝者基準を満たすシュワルツ方式・コープランド方式・ドッジソン方式・ナンソン方式・ブラック方式は，一貫性を満たさない

修正手続(中立性を満たさない)は一貫性を満たさない

3	2	2	3	2	2
a	b	c	a	b	c
b	c	a	c	a	b
c	a	b	b	c	a

a:b=5:2
a:c=3:4

a:b=3:4
b:c=2:5

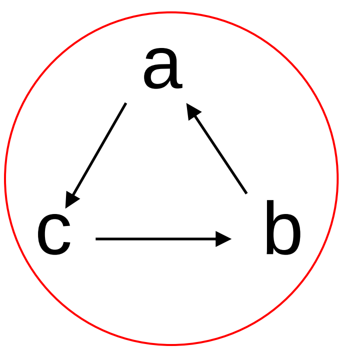
全体では
a:b=8:6
a:c=8:6

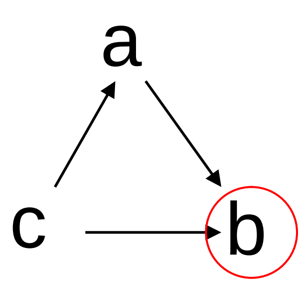
はじめにaとbを比較し，次にその勝者とcを比較する
左：aがbに勝った後，cに負ける
右：bがaに勝った後，cに負ける
→ c が勝つ

全体：aがbに勝ち，その後cにも勝つ

シュワルツ方式は一貫性を満たさない

4	3	3	3	1	1
a	b	c	b	c	a
b	c	a	a	b	c
c	a	b	c	a	b





左：aがbに勝ち，bがcに勝ち，cがaに勝つので，a,b,cともシュワルツ勝者

右：bがコンドルセ勝者

全体：aがコンドルセ勝者

{a,b,c}∩{b}={b}≠{a}

一貫性を満たさない

コープランド方式・ドッジソン方式は一貫性を満たさない

1	1	1	1	1	1	1
a	a	b	b	a	c	b
b	b	a	a	b	a	c
c	d	c	d	c	b	a
d	c	d	c	d	d	d

	左	右	全体
a	2	1	3
b	2	1	1
c	-2	1	-1
d	-2	-3	-3

コープランド数

コープランド方式
左：a, bが勝者
右：a, b, cが勝者
全体：aが勝者

ドッジソン方式
左：a,bは反転1回，c,dは3回
右：a,b,cは反転1回
全体：aはコンドルセ勝者

ナンソン方式は一貫性を満たさない

1	1	1	1	1	1
a	c	b	a	c	b
b	a	c	d	a	d
c	b	a	b	d	c
d	d	d	c	b	a

	2	2	2	合計
a	2	1	0	6
b	1	0	2	6
c	0	2	1	6

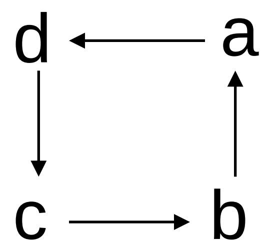
	1	1	1	計	1	1	1	計	合計
a	3	2	1	6	3	2	0	5	11
b	2	1	3	6	1	0	3	4	10
c	1	3	2	6	0	3	1	4	10
d	0	0	0	0	2	1	2	5	5

左:a,b,c
右:ボルダ評点が平均未満のb,cが排除され(同点だから),最終的にaが勝者となる
全体:a,b,c

ブラック方式は一貫性を満たさない

5	4	2	1	1	1	1
a	b	c	a	b	b	d
b	d	d	b	a	c	a
c	c	a	c	d	d	b
d	a	b	d	c	a	c

左：aがコンドルセ勝者
右：ボルダ評点は同じ
a,b,c,d
全体：b



	5	4	w	2	1	1	1	1	計	合計
a	3	0	o	1	3	2	0	2	9	24
b	2	2	-	0	2	3	3	1	9	27
c	1	1	-	3	1	0	2	0	9	18
d	0	3	-	2	0	1	1	3	9	21

単純多数決

ヘア方式は一貫性を満たさない（1）

8	6	4	3	8	6	4	3
a	d	b	c	a	c	b	d
b	c	c	a	b	a	c	a
c	b	d	d	c	d	d	b
d	a	a	b	d	b	a	c

8	6	4	3	8	6	4	3
a	d	b	a	a	c	b	a
b	b	d	d	b	a	c	b
d	a	a	b	c	b	a	c

8	6	4	3	8	6	4	3
a	d	d	a	a	c	c	a
d	a	a	d	c	a	a	c

↓ a　　　↓ a

左：まずcが抜け，次にbが抜け，aが勝者
右：まずdが抜け，次にbが抜け，aが勝者

ヘア方式は一貫性を満たさない（2）

8	6	4	3	8	6	4	3
a	d	b	c	a	c	b	d
b	c	c	a	b	a	c	a
c	b	d	d	c	d	d	b
d	a	a	b	d	b	a	c

8	6	4	3	8	6	4	3
a	d	c	c	a	c	c	d
c	c	d	a	c	a	d	a
d	a	a	d	d	d	a	c

全体：まずbが抜け，次にdが抜け，cが勝者

8	6	4	3	8	6	4	3
a	c	c	c	a	c	c	a
c	a	a	a	c	a	a	c

↓

a:c=19:23

クームズ方式は一貫性を満たさない（1）

4	3	1	1	1	4	3	2
a	b	b	d	a	a	b	d
c	c	a	a	b	b	d	a
d	d	d	b	d	c	c	b
b	a	c	c	c	d	a	c

4	3	1	1	1	4	3	2
a	c	a	d	a	a	b	a
c	d	d	a	d	b	c	b
d	a	c	c	c	c	a	c

4	3	1	1	1	4	3	2
a	c	a	a	a	a	b	a
c	a	c	c	c	b	a	b

↓ a　　↓ a

左：まずbが抜け，次にdが抜け，aが勝者
右：まずdが抜け，次にcが抜け，aが勝者

クームズ方式は一貫性を満たさない(2)

4	3	1	1	1	4	3	2
a	b	b	d	a	a	b	d
c	c	a	a	b	b	d	a
d	d	d	b	d	c	c	b
b	a	c	c	c	d	a	c

4	3	1	1	1	4	3	2
c	b	b	d	b	b	b	d
d	c	d	b	d	c	d	b
b	d	c	c	c	d	c	c

4	3	1	1	1	4	3	2
d	b	b	d	b	b	b	d
b	d	d	b	d	d	d	b

全体:まずaが抜け, 次にcが抜け, bが勝者

↓

b:d=12:7

決勝付選挙は一貫性を満たさない

3	2	1	2	2	1
a	c	b	b	c	a
b	a	c	a	a	c
c	b	a	c	b	b

→

3	2	1	2	2	1
a	c	c	b	c	c
c	a	a	c	b	b

↓

3	2	1	3	2	1
a	c	c	a	c	a
c	a	a	c	a	c

↓

a:c=6:5

左:bが抜け, aとcの間で決選投票. aとcとも勝者
右:aが抜け, bとcの間で決戦投票. cが勝者
全体:まずbが抜け, aとcの間で決選投票. aが勝者

承認投票は弱パレート原理を満たさない

2	1
a	a
b	d
c	c
d	b

→
3つを承認

2	1
a	a
b	d
c	c

a	3
b	2
c	3
d	1

→ a, cが勝者

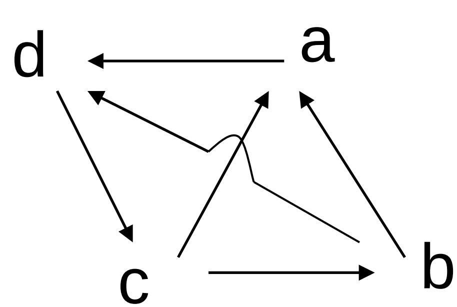
3人にとって, $a \succ c$
弱パレート原理を満たさない

	勝者基準	敗者基準	単調性	一貫性	P原理
修正手続	〇	〇	〇	×	×
シュワルツ方式	〇	〇	〇	×	×
最多数投票	×	×	〇	〇	〇
ボルダ方式	×	〇	〇	〇	〇
コープランド方式	〇	〇	〇	×	〇
ドッジソン方式	〇	×	〇／×	×	〇
ナンソン方式	〇	〇	×	×	〇
ブラック方式	〇	〇	〇	×	〇
ヘア方式	×	〇	×	×	〇
クームズ方式	×	〇	×	×	〇
決勝付選挙	×	〇	×	×	〇
承認投票	×	×	〇	〇	×

シュワルツ方式：劣位勝者のパラドックス

1	1	1
a	c	d
b	d	a
c	a	b
d	b	c

	a	b	c	d
a		3	2	1
b	0		2	1
c	1	1		2
d	2	2	1	



シュワルツ方式による
勝者はa,b,c,d
bは全員一致でaより劣る
→弱パレート原理に矛盾