数理分析方法論

第4回

早稲田大学政治学研究科
河野　勝 (Email: kohno@waseda.jp)
早稲田大学経済学研究科
代講：須賀晃一(Email: ksuga@waseda.jp)

今日のメニュー

1. 前回の復習
2. ナッシュ均衡と最適戦略
3. パレート最適性
4. 記号で利得を表現すること
5. ゲデスの「政治家のジレンマゲーム」
6. メタファーとしてのゲームを超えて･･･

前回の復習

- ゲーム的状況とは何か
- 協力ゲームと非協力ゲーム
- ゲームの基本要素
- ゲーム理論的分析の諸前提（合理性・共通知識）
- ゲームを表わす二つの方法
- 囚人のジレンマ

☠軍拡競争を囚人のジレンマゲームとして表現する利得表（戦略を含む）を書きなさい。そして、それぞれの戦略の組み合わせの四つの結果がどのような意味をもつか、現実の政治の文脈に合わせて、言葉で表現しなさい。

２つの重要な概念

- （ナッシュ）均衡
- パレート最適（効率）性

ナッシュ均衡：定義

・ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)とは･･･
「各プレイヤーの最適反応の組み合わせ」

教科書・武藤40頁の定義
「お互いのとる戦略がそれぞれ相手の戦略に対する最適反応戦略になっている戦略の組」を**ナッシュ均衡**という。

ナッシュ均衡：定義

・ナッシュ均衡 (Nash equilibrium)とは・・・

「各プレイヤーの最適反応の組み合わせ」

☞どのプレイヤーも単独で戦略を変えるインセンティヴを持たない安定的(＝stable)あるいは自己拘束的（＝self-enforcing）な状態

・最適反応 (best response)とは・・・

「相手のある戦略のもとで、自らの利得を最大化する戦略」（教科書・武藤40頁）

最適反応(例:囚人のジレンマ)

B

A

	黙秘	自白
黙秘	3, 3	1, 4
自白	4, 1	2, 2

最適反応（例：囚人のジレンマ）

B

A

	黙秘	自白
黙秘	3, 3	1, 4
自白	4, 1	2, 2

例えば、Bの自白を所与としたとき、Aの最適反応は自白

Aの黙秘・自白、Bの黙秘・自白を所与としたときの各プレイヤーの最適反応（合計で4つある）を組み合わせたものがナッシュ均衡

つまり・・・

ナッシュ均衡（例：囚人のジレンマ）

B

A

	黙秘	自白
黙秘	3, 3	1, 4
自白	4, 1	2, 2

ナッシュ均衡

各プレイヤーとも、ナッシュ均衡（自白、自白）から単独で戦略を変更するインセンティヴを持たない：安定的

例えば、

Bが自白から黙秘に変更すると、Bの利得は2から1に減ってしまうので、自白から黙秘に戦略を変えようとしない

最適反応の組合せ

- プレイヤーAにとって

  （自白，黙秘），　（自白，自白）

- プレイヤーBにとって

  （黙秘，自白），　（自白，自白）

- 共通部分は（自白，自白）　→　ナッシュ均衡

パレート最適性（効率性）：定義

ある戦略の組 **s=(s$_1$,….,s$_n$)（例えば、黙秘,黙秘）**と他の戦略の組**t= (t$_1$,…,t$_n$)（例えば、自白,自白）**を比較したとき (なお、1…nはプレイヤーを表現している)、

（1）すべてのプレイヤー（1…n)が、

（2）戦略の組 s の与える利得を戦略の組 t の与える利得より好むとき、

s は t を**パレート支配**するという

パレート支配（例：囚人のジレンマ）

B

	黙秘	自白
黙秘	3, 3	1, 4
自白	4, 1	2, 2

A

（黙秘、黙秘）という戦略の組はAおよびBに3の利得を与える

（自白、自白）という戦略の組はAおよびBに2の利得を与える

AとBの双方にとって、（黙秘、黙秘）の与える利得の方が（自白、自白）の与える利得より高い

したがって、（黙秘、黙秘）は（自白、自白）をパレート支配する

パレート最適性（パレート効率性）

ある戦略の組ｓをパレート支配する戦略の組が他に存在しないとき、戦略の組ｓは**パレート最適（パレート効率的）**であるといわれる。

換言すれば、パレート最適な状態とは･･･

「ある者の状態をより良くするためには、他の誰かの状態を犠牲にしなければならない状態」

囚人のジレンマのパレート支配

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	3, 3	1, 4
	自白	4, 1	2, 2

（黙秘、黙秘）をパレート支配する戦略の組は存在しない

つまり、（黙秘、黙秘）から別の戦略の組に移動すると、少なくとも誰か１人の利得が犠牲になる

例えば、

（黙秘、自白）に移動すると、Bの状態はよくなるが（３→４）、Aの状態は悪くなる（３→１）（（自白、黙秘）（自白、自白）への移動も同様）

よって、（黙秘、黙秘）はパレート最適（効率的）である

パレート最適性（パレート効率性）

- パレート最適ではない状態とは･･･
- ⇔他の誰かの状態を犠牲にすることなく、ある者の状態をより良くすることができる状態
- ☞社会的に望ましくない状態

- ひとつの典型例として、囚人のジレンマの帰結がある

もういちど囚人のジレンマの例

パレート最適な状態

B

A		黙秘	自白
	黙秘	3, 3	1, 4
	自白	4, 1	2, 2

ナッシュ均衡

かつ非効率的

ナッシュ均衡（自白、自白）はパレート効率的ではない

なぜなら、（黙秘、黙秘）の方が（自白、自白）より**<u>お互いにとってより良い</u>**から

（つまり、（自白、自白）は（黙秘、黙秘）にパレート支配される）

しかし、（黙秘、黙秘）という状態はナッシュ均衡ではないため実現できない

＝ジレンマ

囚人のジレンマ（パレート非効率）

ちなみに、パレート最適な状態は（黙秘、黙秘）だけではない

パレート最適な状態

		B	
		黙秘	自白
A	黙秘	3, 3	1, 4
	自白	4, 1	2, 2

Cf. パレート最適な状態とは、「ある者の状態をより良くするためには、他の誰かの状態を犠牲にしなければならない状態」

- この授業では、いずれ、パレート最適性の概念が重要な概念として現れてくる
- が・・・・
- それまでは、均衡という概念に焦点を当てて講義を進めていきます

☺

代表的な２×２ゲーム

- **囚人のジレンマ**

☞すでにくわしくふれた

- **チキンゲーム（chicken game）**

☞この二つについて説明しましょう

- **鹿狩りゲーム（stag hunt game）**

☞この二つについて説明しましょう

- **男女の争いゲーム（battle of sexes game）**

☞第６回講義で詳しく

チキンゲーム

A｜B	直進	回避
直進	1, 1	4, 2
回避	2, 4	3, 3

プレイヤー：車で対面している若者２人（AとB)

戦略：そのまま直進するか、衝突を回避しようとするか

お互いに直進すると衝突してしまうが、回避しようとすると「チキン（腰抜け）」と呼ばれてしまう（→相手が直進するならば回避したいが、相手が回避するならば直進したい）

✏Thinking Time!

チキンゲームのナッシュ均衡を求めなさい

チキンゲーム

A ｜ B	直進	回避
直進	1, 1	4, 2
回避	2, 4	3, 3

まず、AとBのそれぞれの最適反応を考える

チキンゲーム（Aの最適反応1）

A ｜ B	直進	回避
直進	1, 1	4, 2
回避	2, 4	3, 3

Bが直進するならば、Aは回避する

チキンゲーム（Aの最適反応2）

A｜B	直進	回避
直進	1, 1	4, 2
回避	2, 4	3, 3

Bが回避するならば、Aは直進する

チキンゲーム（Bの最適反応1）

A ｜ B	直進	回避
直進	1, 1	4, 2
回避	2, 4	3, 3

Aが直進するならば、Bは回避する

チキンゲーム（Bの最適反応２）

A ｜ B	直進	回避
直進	1, 1	<u>4</u>, <u>2</u>
回避	<u>2</u>, <u>4</u>	3, 3

Aが回避するならば、Bは直進する

チキンゲームのナッシュ均衡

A ｜ B	直進	回避
直進	1, 1	<u>4</u>, <u>2</u>
回避	<u>2</u>, <u>4</u>	3, 3

ナッシュ均衡とは、各プレイヤーの最適反応の組み合わせ

なので･･･

チキンゲームのナッシュ均衡

A ｜ B	直進	回避
直進	1, 1	4, 2
回避	2, 4	3, 3

ナッシュ均衡

ナッシュ均衡

ナッシュ均衡：（回避、直進）、（直進、回避）

チキンゲームのナッシュ均衡

A | B	直進	回避
直進	1, 1	4, 2
回避	2, 4	3, 3

ナッシュ均衡

ナッシュ均衡

ナッシュ均衡：（回避、直進）、（直進、回避）

複数均衡

この2つの均衡解のうち、実際にどちらが生じるか、ゲーム理論ではいえない（→ゲーム理論の限界？　→進化ゲームの考え方）

メタファーとしてのチキンゲーム

- 囚人のジレンマとならび、ゲームチキンゲームも政治学では、よくメタファーとして使われる。
- その代表例として国際危機・瀬戸際外交がある・・・・
- しかし、そうしたメタファーはしばしば間違って用いられている

メタファーとしてのチキンゲーム

- たとえば、久米他編『政治学』p168によると･･･

➢キューバ危機では、ソ連がキューバにミサイル基地を建設していることが明らかになって米ソの対立が激化し、米ソが互いに譲歩しなければ武力紛争が引き起こされるという一触即発の状況にあった。しかし、相手より先に譲歩すれば戦略的に自らの被る損失が大きい状況でもある。･･･このような状況[チキンゲーム]では、軍事的衝突が最悪の結果を招くという点で各プレイヤーの認識が一致しているにもかかわらず、軍事的衝突は回避できない。(注：軍事的衝突はナッシュ均衡ではない！)

鹿狩りゲーム

A ｜ B	シカ	ウサギ
シカ	4, 4	1, 3
ウサギ	3, 1	2, 2

プレイヤー：鹿狩りに来ている2人の猟師

戦略：鹿を狩るか、ウサギを狩るか

鹿を狩るには2人で協力しなければならないが、ウサギなら1人で狩れる

ウサギを2人で追うと、1人で追うときと比べて分け前が減ってしまう

☠鹿狩りゲームの
ナッシュ均衡を求めなさい

鹿狩りゲーム（Aの最適反応1）

A｜B	シカ	ウサギ
シカ	<u>4</u>, 4	1, 3
ウサギ	3, 1	2, 2

Bが鹿を追うなら、Aも鹿を追う

鹿狩りゲーム（Aの最適反応2）

A ｜ B	シカ	ウサギ
シカ	4, 4	1, 3
ウサギ	3, 1	2, 2

Bがウサギを追うなら、Aもウサギを追う

鹿狩りゲーム（Bの最適反応1）

A｜B	シカ	ウサギ
シカ	4, 4	1, 3
ウサギ	3, 1	2, 2

Aが鹿を追うなら、Bも鹿を追う

鹿狩りゲーム（Bの最適反応2）

A｜B	シカ	ウサギ
シカ	4, 4	1, 3
ウサギ	3, 1	2, 2

Aがウサギを追うなら、Bもウサギを追う

ナッシュ均衡とは、各プレイヤーの最適反応の組み合わせなので・・・

鹿狩りゲーム（ナッシュ均衡）

A｜B	シカ	ウサギ
シカ	4, 4	1, 3
ウサギ	3, 1	2, 2

ナッシュ均衡：（シカ、シカ）、（ウサギ、ウサギ）

複数均衡

鹿狩りゲーム（ナッシュ均衡）

A｜B	シカ	ウサギ
シカ	<u>4</u>, <u>4</u>	1, 3
ウサギ	3, 1	<u>2</u>, <u>2</u>

ナッシュ均衡：（シカ、シカ）、（ウサギ、ウサギ）

複数均衡

（シカ、シカ）が（ウサギ、ウサギ）をパレート支配しているが、（ウサギ、ウサギ）も生じうる結果　（直感的に（ウサギ、ウサギ）は明らかにあり得ないが、今のゲーム理論ではその可能性を消去できない→ゲーム理論の限界？）

メタファーとしての鹿狩りゲーム

- 鹿狩りゲームの代表例：軍縮
- ？？？
- （なお、軍縮は囚人のジレンマとしてもモデル化される）

メタファーとしての鹿狩りゲーム

- 鹿狩りゲームをメタファーとして用いる代表例：軍拡競争

☞ただし、チキンゲームと同様に、しばしば間違った形でメタファーが使われる

- 既に触れたように、軍拡競争は囚人のジレンマとしてもモデル化されるが、軍備拡張の費用をモデルに組み込むことで、囚人のジレンマゲームから鹿狩りゲームへ変容する。

※軍備拡張の費用：ex. ミサイル開発など

囚人のジレンマとしての軍拡競争

A｜B	軍備縮小	軍備拡張
軍備縮小	5, 5	0, 6
軍備拡張	6, 0	4, 4

↑囚人のジレンマとしての軍拡競争↑

このモデルに軍備拡張のコスト (-2) を組み込むと･･･

鹿狩りゲームとしての軍備拡張

A ｜ B	軍備縮小	軍備拡張
軍備縮小	<u>5</u>, <u>5</u>	0, 4
軍備拡張	4, 0	<u>2</u>, <u>2</u>

鹿狩りゲーム

軍拡（非協調）のみならず軍縮（協調）もナッシュ均衡

メタファーとしての鹿狩りゲーム

- ルソー『人間不平等論』岩波文庫1972年 p89
- 「鹿を捕えようという場合、各人はたしかにそのためには忠実にその持ち場を守らなければならないと感じた。しかし、もし一匹の兎が彼らのなかのだれかの手の届くところをたまたま通り過ぎるようなことでもあれば、彼は必ずなんのためらいもなく、それを追いかけ、そしてその獲物を捕えてしまうと、そのために自分の仲間が獲物を取り逃すことになろうとも、いささかも気にかけなかった。」　　　・・・本当？

メタファーとしての鹿狩りゲーム

- Kenneth N. Waltz, *Man, the State, and War*, Columbia University Press, 1954. p170.
- “He [Rousseau] has noticed that the difficulty is not only in the actors but also in the situation they face. While by no means ignoring the part that avarice and ambition play in the birth and growth of conflict, Rousseau’s analysis makes clear the extent to which conflict appears inevitably in the social affairs of men.”

メタファーとしての鹿狩りゲーム

- 土山実男「セキュリティー・ディレンマの国際政治理論」『国際政治』Vol. 106 1994年 p72
- 「ウォルツはルソーの鹿狩りの寓話を用いて、なにゆえ国家間協力が不可能なのかを説いた。」

- 鹿狩りゲーム:「協調」もナッシュ均衡！！

利得の一般表現（囚人のジレンマ）

利得をより一般的な表現であらわすと･･･

Y

X

	黙秘	自白
黙秘	B, B	D, A
自白	A, D	C, C

A > B > C > D

しばしば、このような抽象的な表記が用いられる

例えば、次のGeddesの例･･･

Politicians' Dilemma (Geddes1991)

- ゲーム:公職ポストに縁故者を採用するか
（汚職構造が永遠に続くかどうか）
- プレイヤー:選挙で争う政治家1，２
- 戦略:縁故採用の約束をする、しない

☞それぞれの政治家にとって、自分が選挙で勝つ確率に各戦略がどう影響を与えるかを考える。

Politicians' Dilemma (Geddes1991)

- 選挙勝利の確率（価値）は、ゼロサムであり、二人であわせて1であるとする。
- 両方とも縁故採用の約束しないときに政治家1が勝利する確率：p
- 両方とも縁故採用の約束しないときに政治家2が勝利する確率：1-p
- 縁故採用の約束をすることで増大する政治家1（2）の勝率：$+v_1(+v_2)$

Politicians' Dilemma

政治家 2

政治家 1		縁故採用の約束しない	縁故採用の約束する
	縁故採用の約束しない	p, 1-p	$p-v_2$, $1-p+v_2$
	縁故採用の約束する	$p+v_1$, $1-p-v_1$	$p+v_1-v_2$, $1-p-v_1+v_2$

Politicians' Dilemma

政治家２

政治家１		縁故採用の約束しない	縁故採用の約束する
	縁故採用の約束しない	p, $1-p$	$p-v_2$, $1-p+v_2$
	縁故採用の約束する	**$p+v_1$**, $1-p-v_1$	$p+v_1-v_2$, $1-p-v_1+v_2$

Politicians' Dilemma

政治家 2

政治家 1	縁故採用の約束しない	縁故採用の約束する
縁故採用の約束しない	p, 1-p	$p-v_2$, $1-p+v_2$
縁故採用の約束する	**$p+v_1$**, $1-p-v_1$	**$p+v_1-v_2$**, $1-p-v_1+v_2$

Politicians' Dilemma

政治家 2

政治家 1

	縁故採用の約束しない	縁故採用の約束する
縁故採用の約束しない	p, $1-p$	$p-v_2$, **$1-p+v_2$**
縁故採用の約束する	**$p+v_1$**, $1-p-v_1$	**$p+v_1-v_2$**, $1-p-v_1+v_2$

Politicians' Dilemma

政治家 2

政治家 1		縁故採用の約束しない	縁故採用の約束する
	縁故採用の約束しない	p, 1-p	$p-v_2$, **$1-p+v_2$**
	縁故採用の約束する	**$p+v_1$**, $1-p-v_1$	**$p+v_1-v_2$**, **$1-p-v_1+v_2$**

Politicians' Dilemma

政治家２

政治家１	縁故採用の約束しない	縁故採用の約束する
縁故採用の約束しない	p, 1-p	$p-v_2$, **$1-p+v_2$**
縁故採用の約束する	**$p+v_1$**, $1-p-v_1$	**$p+v_1-v_2$, $1-p-v_1+v_2$**

ナッシュ均衡

Politicians' Dilemma

・・・・ということは何を意味するか

公職の縁故採用を選挙戦略として使うことができる場合、各政治家は縁故採用の約束をする

☞ 結論:「縁故採用に象徴される汚職的構造は、なくならない!」

☞☞話しは、これで終わり?

Politicians' Dilemma

- ここで話しが終われば、ゲデスはこのゲームをメタファーとして用いているにすぎない
- しかし、ゲデスは、この一歩先を考える

☞どうしたら縁故採用の制度改革をすることができるのか？

☞つまり、制度改革成功の条件をつきとめよう！

（ここに、ゲーム理論がメタファー以上の真価をもつことを見てとれる）

Politicians' Dilemma　II

- ゲーム：縁故採用を改革する
- プレイヤー：多数派政党、少数派政党
- 戦略：改革支持、改革反対
- 改革の必要十分条件：多数派政党の支持

(少数派政党の支持は改革に必要でも十分でもない)
- 改革を支持することで増大する選挙勝率：+e
- 利得：選挙勝率

Politicians' Dilemma II

少数派政党

多数派政党	改革支持	改革反対
改革支持	$p+e-e$, $1-p-e+e$	$p+e$, $1-p-e$
改革反対	$p+v_1-v_2-e$, $1-p-v_1+v_2+e$	$p+v_1-v_2$, $1-p-v_1+v_2$

Politicians' Dilemma II

少数派政党

多数派政党

	改革支持	改革反対
改革支持	p, 1-p	p+e, 1-p-e
改革反対	$p+v_1-v_2-e$, $1-p-v_1+v_2+e$	$p+v_1-v_2$, $1-p-v_1+v_2$

少数派が改革支持のときに多数派が改革支持する条件

If $p > p+v_1-v_2-e \Leftrightarrow e > v_1-v_2$

Politicians' Dilemma II

少数派政党

多数派政党	改革支持	改革反対
改革支持	p, 1-p	p+e, 1-p-e
改革反対	$p+v_1-v_2-e$, $1-p-v_1+v_2+e$	$p+v_1-v_2$, $1-p-v_1+v_2$

少数派が改革反対のときに多数派が改革支持する条件

If $p+e > p+v_1-v_2 \Leftrightarrow e > v_1-v_2$

Politicians' Dilemma II

- 改革が成功するには、 $e > v_1 - v_2$ という条件式が成り立たなければならない

☞縁故者を採用して増大する多数派の勝率v_1が小さいほど（縁故者を採用して増大する少数派の勝率v_2が大きいほど）、改革は成功する、

☞☞多数派と少数派の選挙における強さが等しいほど改革は成功する

Politicians' Dilemma　II

- そこで、さらにゲデスは、より具体的な作業仮説として、次のような仮説を提示する

①政党間の強さが対称的、かつ、政治スキャンダルが起こった後に縁故採用改革が起こりやすい

②反対に、たとえ政治スキャンダルが起こった後であっても、政党間の強さが非対称的であれば縁故採用改革は起こりにくい

☞比較のフレームワークへ・・・

☞☞南米諸国やアメリカ合衆国の実証研究

✏Thinking Time!

✍メタファーとしてのゲームにも、何らかの分析上の価値があるのか

✍ゲーム理論に基づく分析が、メタファー以上に分析上の価値をもつためには、どのような枠組みが設定されるべきか

✏Thinking Time!

✍ゲデスの改革ゲームに対して、ゲーム理論的な、内在的な批判を展開できるか？

次回は･･･

- 戦略の逐次消去
- ナッシュ均衡とそのほかの均衡概念の関係

補論：3つのゲームの比較

- 囚人のジレンマ・ゲーム
  - 攻撃的誘因
  - 防衛的誘因
- チキン・ゲーム
  - 攻撃的誘因のみ
- 保証ゲーム（鹿狩りゲーム）
  - 防衛的誘因のみ

保証ゲーム（鹿狩りゲーム）

プレイヤー2 プレイヤー1	A	B
A	10 10	0 5
B	5 0	2 2

- プレイヤー1の期待効用EU_1

$EU_1 = pq \times 10 + p(1-q) \times 0 + (1-p)q \times 5 + (1-p)(1-q) \times 2$

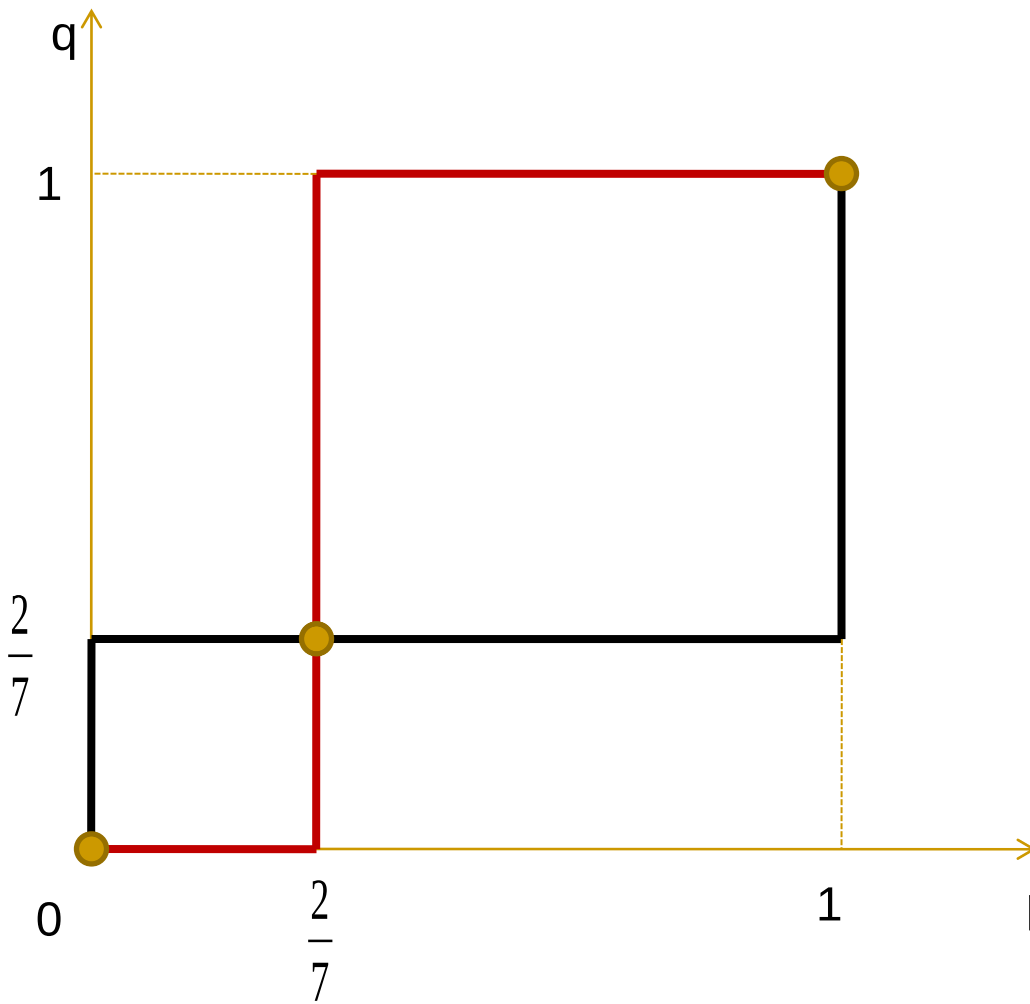
$= p(7q-2) + 3q+2$

- プレイヤー2の期待効用EU_2

$EU_2 = pq \times 10 + p(1-q) \times 5 + (1-p)q \times 0 + (1-p)(1-q) \times 2$

$= q(7p-2) + 3p+2$

- 反応曲線(関数)の交点を求める


q
1
2
7
0
2
7
1
p

ナッシュ均衡

- 純戦略均衡：(A,A), (B,B)
- 混合戦略均衡：

$$\left(\left(\frac{2}{7}*A,\frac{5}{7}*B\right),\quad\left(\frac{2}{7}*A,\frac{5}{7}*B\right)\right)$$

- パレート最適：(A,A)

次回までの宿題

- 次の3つのゲームにおけるナッシュ均衡とパレート最適な戦略の組み合わせを求めなさい。

囚人のジレンマ・ゲーム

プレイヤー2 プレイヤー1	D	C
D	d d	b c
C	c b	a a

- 条件：b>a>d>c

チキン・ゲーム

プレイヤー2 プレイヤー1	D	C
D	d, d	b, c
C	c, b	a, a

- 条件：b>a, c>d

保証ゲーム(鹿狩りゲーム)

プレイヤー2 プレイヤー1	D	C
D	d d	b c
C	c b	a a

- 条件：a>b, d>c