M-project

和ってなに？　積ってなに？

いろんな和と積：どこが同じで、どこが違う？

1

M-project

「和」と「積」、名前の由来は？

和 (英語：addition) **と積** (英語：product/multiplication)

「和」には「争いごとがなく穏やかにまとまる・性質の違うものがいっしょにとけ合う・声や調子を一つに合わせる」といった意味があるので、これに由来すると思われる。

「和」の英語は addition（動詞は add）であり、add は「(他のものに)加える・追加する・付け加える」という、意味である。似た語の sum が使われることもあるが、sum は「合計・総額・総数」、「相対・全体」という意味なので、単なる「和」を表す英語としては add の方が適切である。

一方、「積」は「積む・積み重なる・積み重ねる・集める」に由来すると思われるが、乗算は同じものをいくつも積むことに由来するのであろう。

「積」の英語は multiplication (動詞は multiply) であるが、multiply は multi 化（多元化・多数化）するという意味である。積のことを product ということもあるが、product の第一義は「製品・生産物・産出物・所産・結果・成果」であるが「増加・増殖」という意味もあり、また、2つのものを掛けた「結果」というニュアンスもあることが「積」の意味でも使われる理由であろう。

2

M-project

和ってなに？　積ってなに？
いろんな和と積：どこが同じでどこが違う？

3

M-project

和の性質（有理数や実数の場合）

(Wa1) 有理数／実数と有理数／実数を足した和は有理数／実数である。

(Wa2) 足す順序を変えても、その和は同じである：

$a+(b+c) = (a+b)+c.$

(Wa3) 足す数（加数）と足される数（被加数）を入れ替えても、それらの和は同じである：

$a+b = b+a.$

(Wa4) 次の性質を満たすような、**0** という特別な有理数／実数が存在する：

(Wa4-1) どの有理数／実数 a に 0 を足しても和は a のまま変わらない：$a+0=a=0+a.$

(Wa4-2) どの有理数／実数 a にも、足すと 0 になる有理数／実数 a' が存在する：

$a+a'=0=a'+a.$ （a' は $-a$ ですね）

4

M-project

積の性質（有理数や実数の場合）

(Seki1)　有理数／実数と有理数／実数を掛けた積は有理数／実数である。

(Seki2)　掛ける順序を変えても、その積は同じである：

$$a \times (b \times c) \ = \ (a \times b) \times c.$$

(Seki3)　掛ける数（乗数）と掛けられる数（被乗数）を入れ替えても、それらの和は同じである：

$$a \times b \ = b \times a.$$

(Seki4)　次の性質を満たすような、**1** という特別な有理数／実数が存在する：

(Seki4-1）　どの有理数／実数 a に 1 を掛けても積は a のまま変わらない：$a \times 1 = a = 1 \times a.$

(Seki4-2)　**0以外の**どの有理数／実数 a にも、掛けると 1 になる有理数／実数 a' が存在する：

$a \times a' = 1 = a' \times a.$（$a'$ は $\frac{1}{a}$ ですね）

気付いたこと：　**性質1～4は、「和」と「積」、「＋」と「×」、「0」と「1」を入れ替えただけの同じ性質である。ただし、(Seki4-2) は「0以外の」という点だけが (Wa4-2) と異なる。**

5

M-project

「和」や「積」は演算

和や積は、ある集合（ものの集まり）の要素に適用して別のものを対応させる操作なので、前回述べた「関数」の１つですが、

適用した結果が元の要素と同じ集合の要素になる

という性質（これは (Wa1) や (Seki1) で述べた性質です）があります。

このような操作・変換・関数を**演算**といい、元になる集合を A とするとき、「A の上の演算」ともいいます。

また、演算 f が性質 (Wa1) や (Seki1) を満たすことを「f は（A の上で）**閉じている**」あるいは「A は f で閉じている」といいます。

6

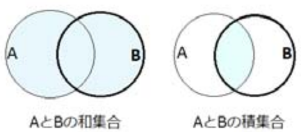
M-project

「和」や「積」は他にもある？（1）

あります！　例えば、

集合 A と B の和（**和集合**。合併集合ということもあります）とは、A に属す要素と B に属す要素を集めた集合のことであり、

A と B の積（**積集合**。共通部分ともいいます）とは A にも B にも属す要素だけを集めた集合のことです。



因みに、和集合を英語では addition とは言わず、union（連合・1つにしたもの）と言います（sum と言うこともあります）。また、積集合を multiplication とか product とは言わず、intersection（交わる部分・交差点の意）と言います。

7

M-project

「集合の和」は (Wa1)～(Wa4) を満たす？

性質 (Wa1)～(Wa4) が成り立つか確かめてみましょう。

(Wa1)　集合 A と集合 B の和 $\boldsymbol{A \cup B}$ は集合である。　→ **成り立つ**

(Wa2)　和を取る順序を変えても、同じ集合になる：

$A \cup (B \cup C) \ = \ (A \cup B) \cup C.$　→ **成り立つ**

(Wa3)　どちらの集合にどちらの集合を加えてもできる集合は同じである：

$A \cup B \ = B \cup A.$　→ **成り立つ**

(Wa4)　次の性質を満たすような、特別な集合 $\emptyset$（**空集合**：要素を持っていない集合）が存在する：

(Wa4-1）　どの集合 A に $\emptyset$ を加えても和は A のまま変わらない：$A \cup \emptyset \ = \ A \ = \ \emptyset \cup A.$　→ **成り立つ**

(Wa4-2)　どの集合 A にも、和を取ると $\emptyset$ になる集合 A' が存在する：

$A \cup A' = \ \emptyset \ = A' \cup A.$　→ **これは成り立たない！**

ただし、どの集合 A にも、和を取ると 全集合 U（次のシートを参照）になる集合 A'
（$A \cup A' = U \ = A' \cup A$）は存在します。この A' のことを A の**補集合**といい、A^c や $\overline{A}$ で表します。

8

M-project

「集合の積」は (Seki1) ～ (Seki4) を満たす？

性質 (Seki1)～(Seki4) が成り立つか確かめてみましょう。

(Seki1) 集合 A と集合 B の積 $\boldsymbol{A \cap B}$ は集合である。 → **成り立つ**

(Seki2) 積を取る順序を変えても、同じ集合になる:

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$ → **成り立つ**

(Seki3) どちらの集合とどちらの集合の積を取ってもできる集合は同じである:

$A \cap B = B \cap A.$ → **成り立つ**

(Seki4) 次の性質を満たすような、特別な集合 $\boldsymbol{U}$（全集合:考えているどの集合も含んでいる集合）が存在する:

(Seki4-1） どの集合 A と U の積も A のまま変わらない: $A \cap U = A = U \cap A.$ → **成り立つ**

(Seki4-2) $\emptyset$ 以外のどの集合 A にも、積を取ると U になる集合 A' が存在する:

$A \cap A' = U = A' \cup A.$ → **これは成り立たない！**

ただし、どの集合 A にも、積を取ると 空集合 $\emptyset$ になる集合 A'
$(A \cap A' = \emptyset = A' \cap A)$ は存在します。A' となりうる集合は A の補集合 A^c や空集合 $\emptyset$ です。

9

M-project

数にも、(Wa4-2)や(Seki4-2)が成り立たない場合がある

集合の和では (Wa4-2) が成り立たず、集合の積では (Seki4-2) が成り立たなかったですが、
自然数や整数の和や積についてはどうでしょうか？

(Wa4-2) どの**整数** a にも、和を取ると 0 になる整数 a' が存在する:

$a + a' = 0 = a' + a.$ → **成り立つ**（a' として $-a$ を取ればよいですね

(Wa4-2) どの**自然数** a にも、和を取ると 0 になる自然数 a' が存在する:

$a + a' = 0 = a' + a.$ → **成り立たない！**（自然数には $-a$ が存在しないですね）

(Seki-2) 0 以外のどの**整数** a にも、積を取ると 1 になる整数 a' が存在する:

$a \times a' = 1 = a' \times a.$ → **成り立たない！**（$a' = \frac{1}{a}$ は整数ではないですね）

(Seki4-2) 0 以外のどの**自然数** a にも、積を取ると 1 になる自然数 a' が存在する:

$a + a' = 1 = a' + a.$ → **成り立たない！**（$a' = \frac{1}{a}$ は自然数ではないですね）

10

M-project

「和」や「積」は他にもある？（2）

あります！

ある事柄を述べたものを**陳述**とか**言明**といいます。それが正しいことを述べていれば**真**であるといい、正しくなければ**偽**であるといいます。言明によっては正しいとも正しくないとも言えないものもありますが、真か偽かがはっきりしている言明を**命題**と言います。「真」「偽」を値と考え、**真理値**とか論理値といい、それぞれ **T** (または1. T は true の頭文字)、F (または0. F は false の頭文字) で表します。

2つの命題 A と B の和（**論理和**）と積（**論理積**）とは次のように定義される命題のことをいいます:

- A と B の論理和とは、A または B のどちらかまたは両方が成り立つような命題のこと。
- A と B の論理積とは、A と B の両方が成り立つような命題のこと。

11

M-project

「論理和」は (Wa1) ～ (Wa4) を満たす？

性質 (Wa1)～(Wa4) が成り立つか確かめてみましょう。

(Wa1) 真理値 a と真理値 b の和 $\boldsymbol{a \vee b}$ は真理値である。 → **成り立つ**

(Wa2) 和を取る順序を変えても、同じ真理値になる:

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$ → **成り立つ**

(Wa3) どちらの真理値にどちらの真理値を加えてもできる真理値は同じ値である:

$a \vee b = b \vee a.$ → **成り立つ**

(Wa4) 次の性質を満たすような、特別な真理値 **F** が存在する:

(Wa4-1） どの真理値 a と F の論理和も a のまま変わらない:

$a \vee \mathrm{F} = a = \mathrm{F} \vee a.$ → **成り立つ**

(Wa4-2) どの真理値 a にも、論理和を取ると F になる論理値 a' が存在する:

$a \vee a' = \mathrm{F} = a' \vee a.$ → **成り立たない！**

12

M-project

「論理積」は(Seki1)～(Seki4)を満たす？

性質 (Seki1)～(Seki4) が成り立つか確かめてみましょう。

(Seki1) 真理値 a と真理値 b の積 $\boldsymbol{a \wedge b}$ は真理値である。 → **成り立つ**

(Seki2) 積を取る順序を変えても、同じ真理値になる：

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$ → **成り立つ**

(Seki3) どちらの真理値とどちらの真理値の積を取ってもできる真理値は同じ値である：

$a \wedge b = b \wedge a.$ → **成り立つ**

(Seki4) 次の性質を満たすような、特別な真理値 $\mathbf{T}$ が存在する：

(Seki4-1) どの真理値 a と T の論理積も a のまま変わらない：

$a \wedge \mathrm{T} = a = \mathrm{T} \wedge a.$ → **成り立つ**

(Seki4-2) F 以外のどの真理値 a（したがって、$a = \mathrm{T}$ です）にも、論理積を取ると T になる論理値 a' が存在する：

$a \wedge a' = \mathrm{T} = a' \wedge a.$ → **成り立つ** ($a' = \mathrm{T}$ とすればよい)

13

M-project

(Wa4-2)や(Seki4-2)が成り立つか？（まとめ）

実数、有理数、整数、自然数、集合、真理値の和や積について

(Wa4-2)や(Seki4-2)が成り立つかをまとめてみましょう：

	実数	有理数	整数	自然数	集合	真理値
Wa4-2	○	○	○	×	×	×
Seki4-2	○	○	×	×	×	○

この時点で、すでにいくつものパターンがあることがわかりますね。

14

M-project

「和」や「積」は他にもある？（3）

あります！

多項式とは、みなさんご存じのように

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

という形をした式のことです。ここでは、**係数** $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ は実数で、x も実数を値にとる**変数**だとしましょう。**項** $a_k x^k$ を k **次**の項といいます。この多項式自体は n**次多項式**といいます。

この式に名前（例えば、f）を付け、x を変数とする多項式であることを $f(x)$ で表します。

多項式の**和**と**積**は、例えば

$$(3x^2 + 5x + 3) + (4x^3 + 2x^2 - 1) = 4x^3 + (3 + 2)x^2 + 5x + (3 - 1) = 4x^3 + 5x^2 + 5x + 2$$

$$(3x^2 + 5x + 7) \cdot (4x^3 + 2x) = (3 \times 4)x^5 + (5 \times 4)x^4 + (3 \times 2 + 7 \times 4)x^3 + (5 \times 2)x^2 + (7 \times 2)x$$

と定義されることは知っていますよね。

15

M-project

「多項式の和」は(Wa1)～(Wa4)を満たす？

性質 (Wa1)～(Wa4) が成り立つか確かめてみましょう。

(Wa1) 多項式 $fx)$ と多項式 $g(x)$ の和 $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$ は多項式である。 → **成り立つ**

(Wa2) 和を取る順序を変えても、同じ多項式になる：

$f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$ → **成り立つ**

(Wa3) どちらの多項式にどちらの多項式を加えてもできる多項式は同じである（2つの多項式が「同じ（等しい）」とは、それぞれの対応する次数の項の係数が等しいことです）：

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ → **成り立つ**

(Wa4) 次の性質を満たすような、特別な多項式 **0**（0 次の項（＝**定数項**）しかなく、それが 0 であるもの）が存在する：

(Wa4-1) どの多項式 $f(x)$ と 0 の和も $f(x)$ のまま変わらない：

$f(x) + 0 = f(x) = 0 + f(x).$ → **成り立つ**

(Wa4-2) どの多項式 $fx)$ にも、和を取ると 0 になる多項式 $g(x)$ が存在する：

$f(x) + g(x) = 0 = g(x) + f(x)$ → **成り立つ**（$f(x)$ の各項の係数の符号を変えたものを $g(x)$ とすればよい）

実は、これらの性質が成り立つのは、実数がこれらの性質を満たすからであることに注意しましょう！

16

M-project

「多項式の積」は (Seki1)～(Seki4) を満たす？

多項式の積が 性質 (Seki1)～(Seki4) を満たすか確かめてみてください。

(seki1)～(Seki3)は成り立ちますが、

(Seki4) 次の性質を満たすような、特別な多項式 **1**（0 次の項しかなく、それが 1 であるもの）が存在する？

については、

(Seki4-1) どの多項式 $f(x)$ と 1 の積も $f(x)$ のまま変わらない：

$f(x)\cdot 1 = f(x) = 1\cdot f(x).$ → **成り立つ**

ですが、

(Seki4-2) 0 以外のどの多項式 $f(x)$ にも、積を取ると 1 になる多項式 $g(x)$ が存在する：

$f(x)\cdot g(x) = 1 = g(x)\cdot f(x)$ → **成り立たない** （$\frac{1}{f(x)}$ は多項式ではありません）

です。

実は、これらの性質が成り立ったり成り立たなかったりしているのは、実数の積がこれらの性質を満たしたり満たさなかったりしていることに対応していることに注意しましょう！

17

M-project

「和」や「積」は他にもある？（4）

あります！

m の正の整数とします。0 以上 m 未満の整数の集合 $M = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ を考え、M の上の和と積を次のように定義します。

a と b の和：$\boldsymbol{a +_m b}$ $a+b$ を m で割った余り（**剰余和**）

a と b の積：$\boldsymbol{a \times_m b}$ $a \times b$ を m で割った余り（**剰余積**）

次のことを確かめてください：

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

和は (Wa1)～(Wa4) を満たす。例えば $m = 3$ の場合、$a +_3 0 = a = 0 +_3 a$ で、$a +_3 a' = 0$ となる a' は $a = 0 \to a' = 0,\ a = 1 \to a' = 2,\ a = 2 \to a' = 1$です。このことを表で表すと上左図のようになります。

積は (Seki1)～(Seki4) を満たす。$m = 3$ の場合、$a \times_3 1 = a = 1 \times_3 a$ で、$a \times_3 a' = 1$ となる a' $(a \neq 0)$は $a = 1 \to a' = 1,\ a = 2 \to a' = 2$ です。このことは上右図のように表されます。

18

M-project

「和」や「積」は他にもある？（5）

あります！

が、これ以上同じようなことをしても仕方ありませんので、ここまでにしておきます。

でも、例えば、こんなものにも和や積が定義できるのです（そのとき、性質 (Wa1)～(Wa4) や (Seki1)～(Seki4) は成り立つでしょうか？）。

文字を並べたものを**文字列**といいます。「単語」を1つの文字で表すと、文字列は「文」を表します。言語とは文法的に正しい文だけを集めた集合と考えることができますので、文字列の集合のことを「**言語**」といいます。2つの言語の**和**は文字列の集合としての和集合のことであると定義します。また、2つの言語 L_1 と L_2 の**積**を

$$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$$

と定義します。ただし、文字列 w_1 と w_2 の積 $w_1 \cdot w_2$ は w_1 の後ろに w_2 をつなげてできる文字列であると定義します。何もない文字列を**空語**といい、λ で表し、空語だけを要素とする言語 $\{\lambda\}$ は実数の0 のような役割を果たします。

文字列の積、言語の和や言語の積はどんな性質を満たすでしょうか？

19

M-project

「和」と「積」の似ている点、違う点

(Wa1)～(Wa4)と(Seki1)～(Seki4)自体が、似た性質ですね（(Wa4)と(Seki4) だけ少し違う）。

1. (Wa1)と(Seki1)は「和」とか「積」という**演算で閉じている**（「和」や「積」が、いま考えている集合の上の演算である）という性質です。

2. (Wa2)と(Seki2)は、演算が**可換**であるという性質（**可換律**とか**交換律**といいます）です。

3. (Wa3)と(Seki3)は、演算の**順序を変えてもよい**という性質（**結合律**といいます）です。

4－1. (Wa4-1)を満たす要素（実数や多項式の場合の 0, 集合の場合の $\emptyset$、真理値の場合の T, 文字列の場合の空語 λ）や、(Seki4-1)を満たす要素（実数や多項式の場合の 1, 集合の場合の全集合 U, 真理値の場合の F, 言語の場合の $\{\lambda\}$ ）のことを**単位元**といいます。

4－2. (Wa4-2)や(Seki4-2)を満たす要素のことを**逆元**といいます（例えば、実数の和の場合、$a + a' = 0$ を満たす a' は a の逆元であり、a は a' の逆元です）。

多くの演算がこうした性質を旧通に満たしているということは、これらの性質が重要なものであるということです！

20

M-project

各種の演算とそれらが満たす性質のまとめ

	実数＋	有理数＋	整数＋	自然数＋	集合∪	論理∨	多項式＋	剰余和	言語∪
交換律	○	○	○	○	○	○	○	○	○
結合律	○	○	○	○	○	○	○	○	○
単位元が存在する	○	○	○	×	○	○	○	○	○
逆元が存在する	○	○	○	×	×	×	○	○	×

注： 0も自然数に含めることがあります。その場合、0が単位元になります。

	実数×	有理数×	整数×	自然数×	集合∩	論理∧	多項式・	剰余積	言語・	文字列・
交換律	○	○	○	○	○	○	○	○	×	×
結合律	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
単位元が存在する	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
逆元が存在する	○	○	×	×	×	○	×	△（mによる）	×	×

注： 剰余積の場合、m が素数なら逆元が存在し、そうでない場合には存在しません。

21

M-project

すべての演算が満たしている性質

結合律は、考察したすべての演算が満たしています。

そこで、

集合 X が演算 $*$ で閉じていて、$*$ が結合律（だけ）を満たしているとき、$(X, *)$ を**半群**といいます（$*$ を明示しないこともあります）。半群は英語で semigroup といいますが、group は「群」「集まり」という意味で、semi は「半…」「…の半分」の意味の接頭辞です。

自然数の上の和だけは単位元が存在しません（0 も自然数に加えると、それが単位元になります）が、単位元をもつ半群ことを**モノイド**といいます（モノイドは英語で monoid と書きますが、これは mono+oid という合成語で、数学のモノイド以外の意味で使われることはありません。mono は「単一の」という意味で、oid は「…のような（もの）」「…状の（もの）」という意味の形容詞・名詞語尾・接尾語です）。

22

M-project

単位元、逆元って、どういう意味があるの？

わかりやすいので、数の場合で考えてみましょう。

数（実数、有理数、整数、自然数）の単位元は 0 ですが、**単位元**は

「**半群のどの要素も、単位元と演算を行っても変化がない**」

という性質をもっています。一見、どうということもなさそうな性質ですが、実は、いろんな性質を満たす数学の世界を一般的・抽象的に研究（代数学はそういう分野です）してみると、非常に重要な性質であることがわかります。

逆元が存在することは、

和の場合、「**引き算ができる**」ということに相当し、

積の場合、「**割り算ができる**」ことを表しています。

重要な性質だということがわかりますね。しかも、和にも積にも共通の概念としてとらえられています。

数の和や積以外の演算についても、引き算や割り算に相当する性質と考えるとさらに一般的な世界を表す性質ということができます。

23

M-project

単位元も逆元も持っている世界は・・・

数の和の場合で言えば引き算ができるということであり、数の積の場合で言えば割り算ができるということですから、きれいな世界ですね。

すでに見たように、こういう性質をもっている数学の世界はいろいろあります。

そこで、こういった共通の性質をもつ世界を**群**といいます。

群は英語で group といいますが、こういうきれいな性質を持っているものの集まりということから群と名付けられたのでしょう。

群論は数学で重要なだけでなく、物理（相対性理論や量子力学など）や計算機科学（符合化、暗号など）などの分野においても用いられる重要な数学的ツールとなっています。

24

M-project

天才たちと群

群（と、後述する体（たい））という概念はガロア（エヴァリスト・ガロア：1811－1832年、フランス。決闘で20歳の若さで死んだ）という天才数学者が発見したもので、ガロアが考えた理論は、5次以上の方程式は代数的に解けない（与えられた方程式の係数に四則演算と冪根をとる操作を有限回繰り返して方程式の根を表示する方法がない）ことを証明した、ガロアと同様の夭折の天才数学者のアーベル（ニールス・ヘンリック・アーベル：1802－1829年、ノルウェー）の証明を簡略化しただけでなく、もっと一般に与えられた方程式が代数的に解けるための必要十分条件を与えました。

群論・体論やガロア理論については別の機会に述べます。

(Wa3)と(Seki3)は、和や差という演算が可換であるという性質（可換律・交換律）です。

可換律を満たす群のことを**アーベル群**ともいい、天才アーベルの名はここにも残っています。

M-project

和と積の間の関係

和と積には、同じ群ではあっても違うところがあります。

- 積では、逆元を考えるとき、0を除いています。
- 和も積も定義されているとき、和の単位元は存在するのに積の単位元が存在しない例が多いように思われます（これは観測的な事実であって、絶対的な事実ではありません）。
- 和と積で可換か否かが異なる場合があります。
- 和＋も積×も定義されている場合、次の関係

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c),\quad (b+c)\times a=b\times a+c\times a$$

が成り立つことが多い（数の場合、成り立ちますね）。＋や×が可換だと、

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c=b\times a+c\times a=(b+c)\times a$$

と書けます。これを**分配律**と言います。

M-project

半群から体まで

どの性質が成り立つかで、いろんな名前が付けられています（少し違う定義が使われることもあります）。そのほかの性質も考慮した代数系もたくさんあります。

	結合律	和と積の結合律	可換	和は可換	積は可換	和と積の単位元が存在	和の逆元が存在	積の逆元が存在	分配律	定義
半群	○									結合律
モノイド	○		○							結合律、単位元が存在
群	○									結合律、単位元も逆元も存在
アーベル群	○		○							可換な群
半環		○				○	×	×	○	和の逆元が存在しない環
環		○		○	○	○	○	×	○	積の逆元が存在しない体 （積が半群またはモノイド）
斜体		○		○	×	○	○	○	○	積が可換でない体
体		○		○	○	○	○	○	○	和も積もアーベル群で分配律が成り立つ

体は加法（単位元は0）に関して可換な群であり、0を除くと乗法（単位元は1）に関しても可換な群であり、加法と乗法の間には分配律が成り立つような代数系である。

M-project

なぜ、いろんな名前を付けた世界を考えるの？

数（実数、有理数、整数、自然数）の世界だけでなく、半群・モノイド・群・環・体としての性質を持つ数学の世界はたくさんあります。しかも、それら（にさらにある条件を加えて）一般的に導かれる性質がたくさんあります（そういった研究をする数学を半群論とか群論とか環論とか体論といいます）。

ということは、

そういった世界を一般的に研究しておけば、新たに見つかった世界が半群であるとか群であるとかを調べるだけで、半群論や群論における研究で導かれているいろんな性質がその新発見の世界にも成り立つことになります（すなわち、一般論としてわかっている結果を適用することができます）。

半群、群、体以外にもいろんな性質を持つ数学の世界（総称して**代数系**といいます）が研究されていますが、それらの研究も同じ理由によります。