様々な折り目写像と定義域多様体そして折り目写像への手術について

Naoki Kitazawa

December 24, 2015

話すこと

(可微分) 多様体をその上の自身より高くない空間への良い可微分写像を用いて調べるということ，特に Morse 関数の理論とその自然な高次元化.

$\Rightarrow$ 可微分写像の **<u>特異点</u>**; **微分が退化している点**とその点での値が鍵.

$\Rightarrow$ **物体 (多様体)** の**写真 (写像の像)** とくに**輪郭 (特異点の像)** から物体の元の形を知ろうという哲学.

$\Rightarrow$ 2015 年度幾何学賞

佐伯 修氏「安定写像と多様体のトポロジーの研究」

に関する内容に関する自らの試みの一部

Morse 関数の理論と可微分多様体の(微分)位相幾何学への応用

Morse 関数; 多様体に**必ずしかも豊富にある**良い関数. (閉多様体上であれば) **特異点は有限個**あり各特異点で値が異なるものが沢山あるとして良い.
$\Rightarrow$ 特異点から多様体の**ホモロジー群や一部のホモトピー的**な情報がわかる.
$\Rightarrow$ 20 世紀前半にはもう登場しており, 例えば 1950–70 年代の自由度の高い高次元を中心とした多様体の(微分)位相幾何学で活躍.
$\rightarrow$ Milnor による 7 **次元のエキゾチック球面**の発見で**間接的**に役立った: 直接ではない…**球面であることを示す部分で, 未だ見つかっていない 4 次元の標準的でない球面以外のホモトピー球面が, Morse 関数で特異点を丁度 2 個有するものをもつ多様体として特徴づけられるという有名事実 (Reeb の定理) が使われた**. 他 **h-同境定理**等.
$\Rightarrow$ 現在幾何学を中心とした数学で基本的で重要な手法.

Morse 関数の理論の高次元化と可微分多様体の(微分)位相幾何学への応用

値域を定義域より次元の高くない一般の n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ に変えるとより多様体が分かるのでは?

$\Rightarrow$ 実際そう: 1950 年代の Whitney や Thom の平面への写像の理論等に始まる理論.

$\rightarrow$ **ジェネリックな写像 (安定写像) という特異点論的に良い可微分写像**が Morse 関数のような役割.

$\rightarrow$ 特に重要なのが **Morse 関数の特異点論的高次元化である折り目写像**.

折り目写像の定義と基本的性質

今後多様体, 部分多様体, 多様体間の写像は基本全て**可微分**とする.

Definition 1. 任意の特異点 p の局所的な型が, ある整数 $0 \le i(p) \le \frac{m-n+1}{2}$ があって

$$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i(p)} {x_k}^2 - \sum_{m-i(p)+1}^{m} {x_k}^2)$$

と表せるような可微分写像を折り目写像 という.

$\Rightarrow$ 2 次元多様体の間の場合; **紙をたるませ射影したときたるみとして特異点**の集まりが出てくる; また**紙を折った時**の**折り目**とも捉えられる.

$i(p)$ は**一意**(p の **指数**).

(決まった指数の)特異点全体の集合(**特異点集合**)は $n-1$ **次元の閉部分多様体でそこへ制限するとはめ込み**になる. 基本的には安定なもの, より詳しくはこのはめ込みが transversal なのを考える.

折り目写像の研究–今回話したいことも含めて–

○折り目写像の存在について. → いくらか分かっているが今も重要な問題.
値域が平面の場合; オイラー数が偶数であることが存在の必要十分条件 (前の Whitney や Thom, Levine らにより 1960 年代には).
値域がより高次元の場合; 1970 年代の研究にはじまり Eliasheberg に始まり今に至るまで重要な問題.
⇒ **一方具体的に構成することも重要だが，基本的な多様体でも難しい.**
○**適当な条件をみたす折り目写像; 今回の話の基本.**

1. **様々なクラスの折り目写像と定義域多様体について.**
   → (適当な条件をみたす) 折り目写像と定義域多様体に関し得た結果.

2. **多様体と折り目写像に対する手術について.**
   → 前の部分の深化, 「**結び目の数学**」にも関わるとされる部分.

折り目写像のクラス–special generic 写像–

special generic 写像; 特異点の指数が常に 0 の折り目写像(値域の最後の成分が ＋ のみ)
$\Rightarrow$ 佐伯修氏, 佐久間一浩氏が 1990 年代以降盛んに研究(1970 年頃登場).
$\Rightarrow$ **ホモトピー球面上の特異点を丁度 2 個もつ Morse 関数の自然な拡張.**
$\rightarrow$ 簡単な例; **標準球面の射影(特異点集合とその像が球面)**.
$\Rightarrow$ 4 次元の標準球面でないもの以外のホモトピー球面上の, 平面への特異値集合が円周である同様の写像の構成(佐伯氏の).

定義域多様体のより精密な構造の制限(続く佐伯氏や佐久間氏の仕事)
$\Rightarrow$ **ある程度次元の高い空間**への special generic 写像を許容する**ホモトピー球面は, 標準球面に限る**ことが指摘される.
$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ への special generic 写像の定義域多様体の位相(微分同相)型の決定.
$\rightarrow$ **値域が $\mathbb{R}^3$ の場合に, 同相な多様体の組で, 一方のみ special generic 写像を許容するというものが捉え**られた.

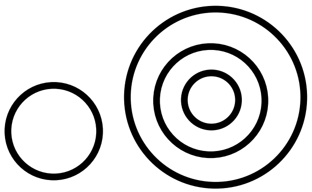
折り目写像のクラス–同心円形折り目写像–

○ special generic 写像は面白い． → 他にもいろいろなクラスがある(後で少しふれる)が….

○ <u>同心円形</u>折り目写像(<u>round</u> fold map)； **特異点集合が標準球面の非交和で，特異値集合が同心円状であるような折り目写像**

⇒ special generic 写像等の有する(微分)位相幾何学的な面白さに刺激を受け，**適当なクラスを導入し研究する**ことが多様体の幾何学への応用で基本的で重要と考え，**講演者により 2012 年ころに導入され研究**された写像.

⇒ 定義域多様体の**ホモロジー群**や**ホモトピー群**，**位相型**や**微分同相型**の研究(**正則値の逆像が球面の非交和**であるものを講演者は特によく研究).



左は一番簡単な同心円形折り目写像(前の**標準球面の射影**等もこれ)，右は特異点集合の像が 3 成分からなる同心円形折り目写像(値域は平面).

同心円形折り目写像について分かったこと

Theorem 1. 整数 $m > n \geq 2$ をとる．S^n 上の S^{m-n}-束の全空間の連結和になる多様体から $\mathbb{R}^n$ への以下をみたす同心円形折り目写像 f がある．

- 正則値の逆像が標準球面の非交和で中へ行くほど成分が増える．
- 特異値集合の連結成分 C の閉管状近傍 $N(C)$ とする．任意の C で $f|_{f^{-1}(N(C))}$ は Morse 関数と $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ の直積と見なせる．

Corollary 1. 7 次元のすべてのホモトピー球面(28 個あり)は，$\mathbb{R}^4$ へ前の定理のような写像で特異点全体の集合が 3 成分以下であるものを許容する．特に特異点集合の成分数について
1 **個のもの**; 標準球面のみ許容 2 **個**; 16 個が許容 3 **個**; 全てが許容．

$\Rightarrow$ **写像の型が定義域多様体に精密な制限(可微分構造**に制限; special generic 写像でもあった現象を発掘 $\rightarrow$ **全てを適当なクラスの写像で区別できるか)！**

前の結果について補足–証明法と意義と–

○ Theorem 1 の証明は**構成的(Eliashberg の存在定理とは異なる)**.

⇒ **基本的な多様体上でも難しい**とされる具体的な**写像の構成**に成功！

⇒ 局所的に写像を構成しうまく貼り合わせる(**微分位相幾何で基本的な手法であるが**).

→ special generic 写像や低次元多様体間の安定な折り目写像の構成を除くと, **高次元の複雑さなどのせいか難しかった**.

○ **Theorem 1 のもう一つの意味**; 写像という形で**多様体の精密な構造**(例えば**逆像に現れる部分多様体の状況; 束のファイバーとなっている**)が捉えられた.

⇒ 多くの多様体を**扱いやすい折り目写像**を用いてみられる, 調べられる期待!

○ 補足; **Theorem 1 はある程度の条件で逆もいえる**

⇒ **Reeb の定理によるホモトピー球面の特徴づけ**のように, 多様体の写像による特徴づけを与えられる.

折り目写像の新たなクラスと折り目写像への手術

○ 折り目写像のクラスを設定し, **写像や定義域多様体**を調べ, **多様体 (の世界) を知るのにつなげる**のは面白く重要.
⇒ 新たにどんなクラスを調べるといいか? 今回は…
特異点集合への制限が埋め込みで正則値の逆像が球面の非交和であるもの.
⇒ **1990 年代佐伯氏による 3 次元の向きづけ可能閉多様体上の平面への (安定) 折り目写像**に関する研究; **グラフ多様体**を特徴づける写像のクラス.
⇒ 上の流れと, Turaev のシャドーとの距離が 2010 年頃から接近(Costantino, Thurston, 石川 昌治 氏, 古宇田 悠哉 氏等).
→ **写像 (f) の逆像の連結成分全体のなす定義域多様体の商空間(W_f; Reeb space, Stein factorization)** と同じような(**あるときは殆ど同じ**)もの; いずれも 3 次元多様体の骨格部分を担う **2 次元の多面体**.
⇒ 今回のは**(グラフ多様体とその上の折り目写像の理論の) 高次元化**.

○ 特に, **多様体と写像の手術**という**結び目を含む低次元多様体のトポロジーでも**基本的な操作を, 基本的な折り目写像から繰り返して得られるもの.

講演者の導入した写像への手術

M; m 次元閉多様体　　$f: M \to \mathbb{R}^n$; 特異点集合 $S(f)$ に制限すると埋め込みである折り目写像.
$S \subset \mathbb{R}^n - f(S(f))$; $k < n$ 次元向きづけ可能閉連結部分多様体
$N_i(S) \subset N(S) \subset N_o(S)$; S の小さな閉管状近傍
Q; $f^{-1}(N_o(S))$ の成分で $f|_Q$ は $N_o(S)$ 上の S^{m-n}-束.
M'; $M - \mathrm{Int}Q$ を滑らかな部分多様体として含む m 次元閉多様体

これらの状況で次を満たす折り目写像 $f'; M' \to \mathbb{R}^n$ があるとする.
$f|_{M-\mathrm{Int}Q} = f'|_{M-\mathrm{Int}Q}$，$f'$ の特異点集合への制限は埋め込みでその像は $f(S(f)) \sqcup \partial N(S)$.
$f'|_{(M'-(M-Q)) \bigcap f'^{-1}}(N_i(S))$; 2 つの $N_i(S)$ 上の S^{m-n}-束を与える.
Definition 2. f から f' を構成する手続きを S における
normal S-bubbling operation と呼ぶ.

$\Rightarrow$ **部分多様体のまわりとその逆像のみ変化; 逆像標準球面 1 個分増やす.**

normal S-bubbling operation に至る過程

○ **多様体の手術.** $\rightarrow$ 20 世紀後半の高次元多様体の(微分)位相幾何学でも低次元多様体の位相幾何学でも基本.

○ **写像の手術.**

$\Rightarrow$ Eliashberg の 1970 年代の研究.

$\Rightarrow$ 1990 年代以降小林真人氏が扱いやすい写像を構成しようと(さらに扱いやすい写像を用いて多様体を調べようと), **講演者と独立に**扱いやすい写像を研究特に surgery operation を導入.

$\rightarrow$ 2 **次元以上の閉多様体から平面へのそれなりに扱いやすい安定写像を貼り換えて定義域多様体を変えずに変形する** **R-operation** (Theorem 1 での構成のヒントになった), bubbling surgery (**normal S-bubbling operation の原点**).

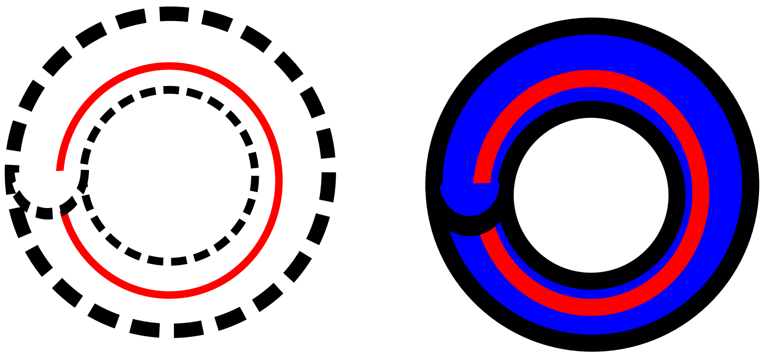
bubbling surgery, normal S-bubbling operation で得られる写像と多様体

Example 1. Theorem 1 の写像; **標準球面の射影**から得られる同心円形折り目写像からはじめ有限回の点における normal S-bubbling operation で得られる.

bubbling surgery; 新たに特異点集合, 特異値集合として球面を一つ増やす操作; 特異値集合の球面の内部は特異値を有さず, 球面と内部以外の部分の逆像上では写像は変化しない.

$\Rightarrow$ この Example の写像は, bubbling surgery を標準球面の射影から繰り返してできる写像でもある.

bubbling surgery の特別なものの高次元版が normal S-bubbling operation



$\mathbb{R}^3$ の中の自明な結び目 (赤) をとって青い部分の逆像を標準球面 1 個分増やす (黒の実線で印をつけられた境界のトーラスが新たな特異値の像).

基本的で重要な問題; この操作を最も簡単なもの (標準球面の射影) から繰り返してどれだけ多くの写像や定義域多様体ができるか?

normal S-bubbling operation で多くの写像の構成

Theorem 2. 自然数 $m > n$ を考える． 任意の整数 $0 \leq j \leq n$ で，G_j を自由な有限生成アーベル群とする． G_0 を $\mathbb{Z}$ とし，G_n が非自明で，$\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{rank} \quad G_j \leq \mathrm{rank} G_n$ とする． このとき標準球面の自然な射影 $f_0 : S^m \to \mathbb{R}^n$ から normal S-bubbling operation を繰り返して商空間 W_f で $H_j(W_f; R) \cong G_j$ が成立するような折り目写像 f が作れる．

方針

1. 一般の normal S-bubbling operation による Reeb space のホモロジー群の変化を知る (基本的).

2. 後の Theorem 3 も同様だが，適当な部分多様体 (の非交和) をとり実際に operation (この場合球面の非交和をとるのみ).

さらに多くの写像

Theorem 3. 自然数 $m > n > 7$ とし，$\{g_j, G_j\}_{j=0}^{n-7}$ を非負整数，有限アーベル群の組の列とする．前の $f_0 : S^m \to \mathbb{R}^n$ から normal S-bubbling operation を繰り返し商空間 W_f が連結で次を満たす写像 f が得られる;

$$H_i(W_f; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{g_0+1} (i = 1) \\ \mathbb{Z}^{g_{i-1}+1} \oplus G_{i-2} (i = 2, 3) \\ \oplus_{j=0}^{n-7} G_j (i = n-2) \\ \{0\} (i = n-1) \\ \mathbb{Z}^{(\sum_{j=0}^{n-7} g_j)+n-6} (i = n) \\ \mathbb{Z}^{g_{i-1}+2} \oplus G_{i-2} (4 \leq i \leq n-6) \\ \mathbb{Z} \oplus G_{n-7} (4 \leq i = n-5) \\ \mathbb{Z} (4 \leq i = n-4) \\ \mathbb{Z}^{n-5} (i = n-3) \end{cases}$$

.

normal S-bubbling operation で得られる写像と定義域多様体に関する補足

○ **Theorem 2, 3** の写像と定義域多様体は構成的に得られた.
$\Rightarrow$ 具体的な多様体への写像の具体的構成は一般には難しいしかし構成方法は理論と共に基本的.
$\rightarrow$ 気づき計算することがポイント.

○ Theorem 3 では **Reeb space** のホモロジー群にねじれも出る.
$\Rightarrow$ Theorem 1(前に説明したように **normal S-bubbling operation** の繰り返しで写像と定義域多様体が得られるといえる), 2 ではないが⋯.

○低い次数のホモロジー群 (ホモトピー群) は M と W_f で一致; 佐伯修氏, 鈴岡啓一氏が 2005 年頃に指摘した事実の応用.
$\Rightarrow$ 写像から定義域多様体のホモロジー群がよくわかる.
$\Rightarrow$ 得られた写像の **Reeb space** のホモロジー型が多様で定義域多様体のホモロジー型も多様.

今後の課題や展望–多様体の世界(特に複雑で奥深い高次元の世界)を一層理解するために–

Theorem 1 のような写像は多様体の情報とともにやや限られるが⋯.
同心円形でないと写像も多様体のタイプも豊富.
$\Rightarrow$ 例えば進んだ課題として，**ホモロジーより精緻な情報を取り扱う**こと.
$\Rightarrow$ **考えたクラスは多くの高次元多様体を詳しく調べる**のに有効では(**Reeb space** が特に重要道具).
$\rightarrow$ 高次元多様体は自由度の高さゆえにある意味での(ホモトピー ＋ α レベルの)分類は容易．より精密な区別や分類を行うのは難しい(最近**可微分多様体としてのトーリック多様体の分類問題**等がある; これは変換群論や組み合わせ的な手法で**トーリックトポロジー**の一分野として進められる).
$\rightarrow$ Corollary 1 のように，「**写像のタイプと多様体の構造の違いの関係**を」多様体について**知られた**事実(**7 次元球面や 4 次元多様体の微分位相幾何学に関する事実**)を**当てはめて見つける**だけでも十分面白い⋯そして
多様体を，純粋に写像の理論で区別，分類できるか．$\rightarrow$ 基本的で重要で難.

ありがとうございました！