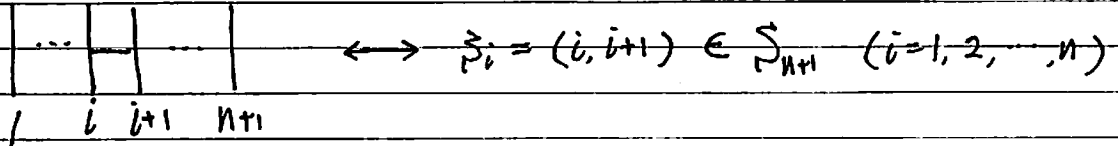
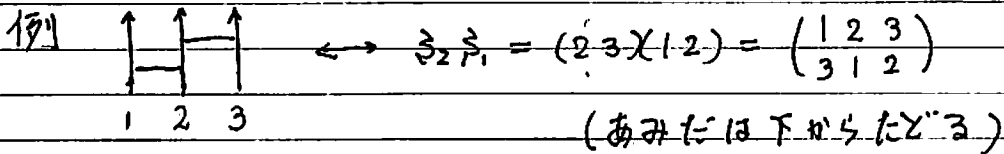
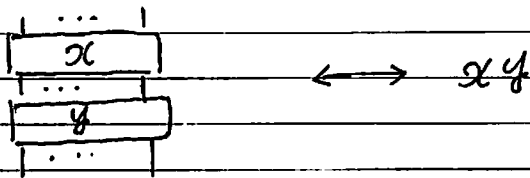


§ 0 あみだくじと対称群 S_{n+1}

① 生成元の対応



② 積の対応

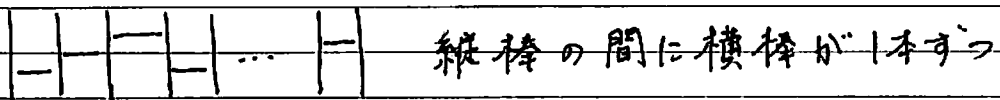


③ 逆順列 w_0

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_0 \text{ の転倒数 } = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

④ 基本あみだくじ (Coxeter 元)

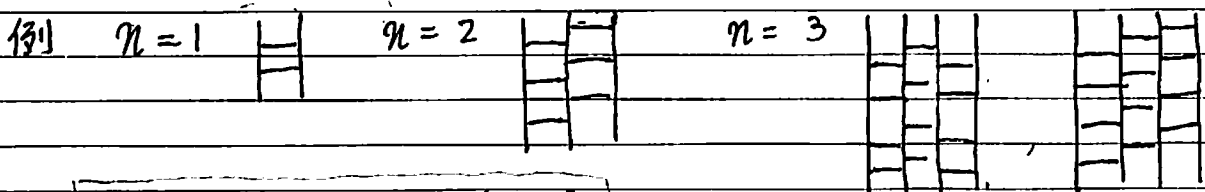


C と書く

i.e. $C = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_n}$ $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$

C の位数を h とする. $Ch = 1$

(Fact) h は i_1, \dots, i_n の並び方によらず一定で $h = n+1$ となる



$$\text{横棒の数は } n \cdot (n+1)$$

問題 $C^{\frac{n}{2}} = C^{\frac{n+1}{2}}$ は逆順列 W_0 を与えるか?

答 Yes and No.

逆順列を与える C ... 良い基本あみだくじ

そうでない C ... 悪い基本あみだくじ

§1 n : 奇数のときの良い基本あみだくじ

W_0 : 逆順列 $\Rightarrow W_0(i) = n+2-i$ ($i=1, 2, \dots, n+1$)

C : 良い基本あみだくじ

$$\Leftrightarrow C^{\frac{n}{2}}(i) = n+2-i$$

$$\Leftrightarrow C \cdot \underset{\parallel}{C^{\frac{n}{2}}(i)} = C^{\frac{n}{2}}(C(i)) = n+2-C(i)$$

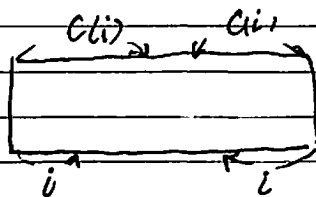
$$C(n+2-i)$$

つまり $C(n+2-i) = n+2-C(i)$

$$i \xrightarrow{C} C(i)$$

$$n+2-i \xrightarrow{\quad} n+2-C(i)$$

for $i=1, 2, \dots, n+1$



あみだは左右対称

結論 n : 奇数のとき基本あみだくじ C の $\frac{n+1}{2}$ 乗が

逆順列を与えるための必要十分条件は

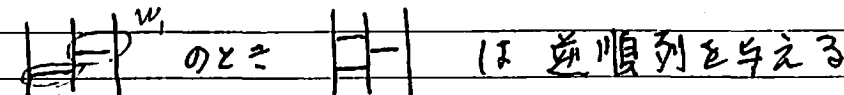
C の表すあみだが左右対称であること

§ 2 n : 偶数のときの良し基本あみだくじ

⑩ $\frac{h}{2} = \frac{n+1}{2}$ をどう考えるか?

n : 偶数なので $C = \underbrace{s_{i_1} \dots s_{i_{\frac{n}{2}}}}_{w_1} \underbrace{s_{i_{\frac{n}{2}+1}} \dots s_{i_n}}_{w_2}$ とし

$C^{\frac{h}{2}} = w_2 (w_1 w_2)^{\frac{n}{2}}$ とする (こうすると逆順列を与えることができる)

例  のとき $C^{\frac{h}{2}} = w_2 w_1 w_2$ は逆順列を与える

⑪ w_1, w_2 の選び方をどうするか

$W = (s_1 s_4)(s_2 s_3) = (s_1 s_2)(s_4 s_3)$ た"か"

$(s_2 s_3)((s_1 s_4)(s_2 s_3))^2$ は逆順列を与えないか?

$(s_4 s_3)((s_1 s_2)(s_4 s_3))^2$ は逆順列となる

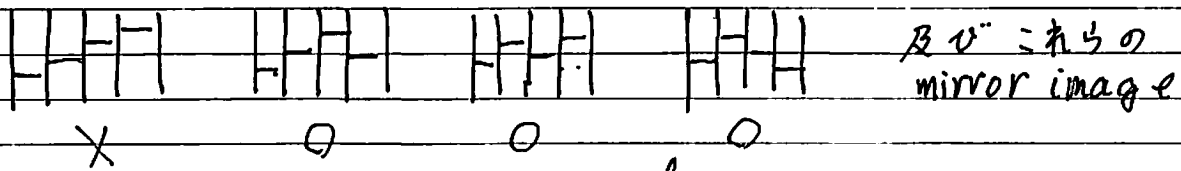
注) $C^{\frac{h}{2}} = w_0$ となるなら w_1, w_2 の分け方は唯一通り

$$\odot w_0 = w_2 (w_1 w_2)^{\frac{n}{2}} = w_2 (w_1' w_2')^{\frac{n}{2}}$$

$$\therefore w_2 = w_2' \quad \therefore w_1 = w_1'$$

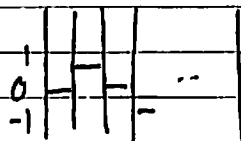
$\Rightarrow C$ の選び方だけでなく w_1, w_2 の分け方も決める必要がある

S_{4+1} の基本あみだくじ



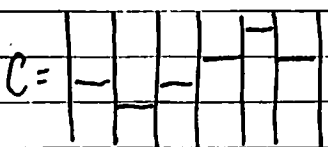
O ... w_1, w_2 を上手く選べば $C^{\frac{h}{2}}$ が逆順列を与える
 X ... w_1, w_2 をどう選んでも $C^{\frac{h}{2}}$ は逆順列を与えない

C が逆順列を与えるためには



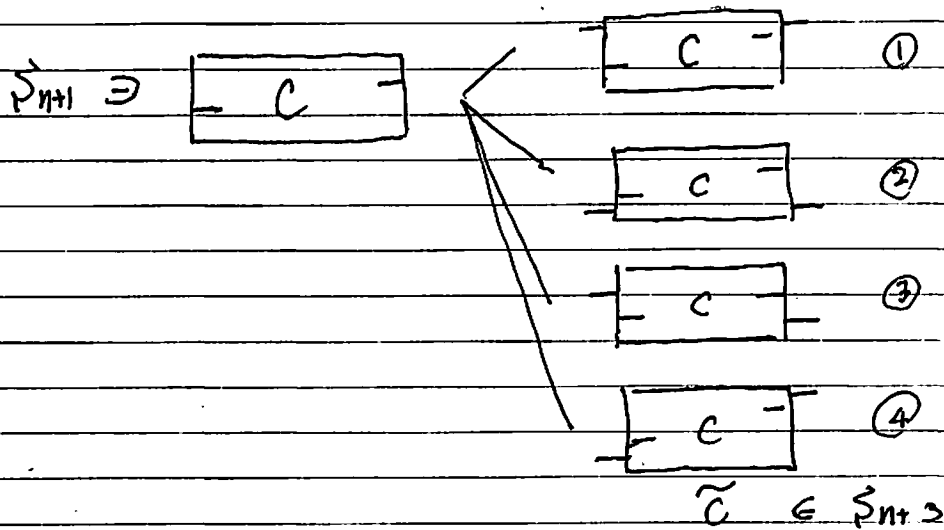
左側の「高さ」を0としたとき
 右側の「高さ」が1でなければならぬ
 (必要条件)

反例



は高さ1だが C^R は
 (w_1, w_2 をどう選んでも) 逆順列とはならない

S_{n+1} の基本あみだくじから S_{n+2} の基本あみだくじを作るには



C : 悪い基本あみだくじ \Rightarrow \tilde{C} : 悪い基本あみだくじ

C : 良い基本あみだくじ \Rightarrow \tilde{C} : ①②③ \Rightarrow 良い基本あみだくじ
 (\Rightarrow 高さ = floor - 1) ④ \Rightarrow 悪い基本あみだくじ