巡回群における stem product の growth function

三品衣里

奈良女子大学大学院 人間文化研究科 情報科学専攻 M2

2015 年 12 月 26 日

1. **背景**
   - stem product
   - growth function
2. **研究目的**
3. **研究結果**
   - growth function **有理式表示**
   - growth rate **の性質**
4. **証明**
   - **標準形導出の規則**
   - **標準形の分類**
   - **標準形の** growth function
   - **標準形** ZU(Z=id) **の** growth function
5. **まとめ**
6. **参考文献**

stem product

$A =< a_1, \cdots, a_l | r_1, \cdots >$: 有限生成群
$B =< b_1, \cdots, b_m | s_1, \cdots >$: 有限生成群
n :1 以上の整数
$p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n$:1 以上の整数
α : A の要素
β : B の要素

Definition 1.1

stem product とは、以下の形の有限生成群である。
$< a_1, \cdots, a_l, b_1, \cdots, b_m, t_1, \cdots, t_n | \alpha = t_1^{p_1}, t_1^{q_1} = t_2^{p_2}, \cdots, t_{n-1}^{q_{n-1}} = t_n^{p_n}, t_n^{q_n} = \beta >$

growth function

G : 有限生成群
A : G の有限生成系
$l_g(w)$: $w \in G$ を表す語のうち最短の語の長さ
$\sharp$:集合の要素の個数

(G, A) に対する growth function とは、以下の形のベキ級数のことである。

Definition 1.2

$f(G, A) = \sum_{g \in G} X^{l(g)} = \sum_{n \geq 0} \sharp\{g | l(g) = n\} X^n$

growth rate

G : 有限生成群
A : 有限生成系
$a(n) = \sharp\{g \in G | l(g) = n\}$

(G, A) に対し、以下の $\omega(G, A)$ を growth rate と呼ぶ

Definition 1.3

$$\omega(G, A) = \lim_{n \to \infty} a(n)^{\frac{1}{n}}$$

注:
・$\omega(G, A) > 1$ のときに exponetial growth と呼ぶ
・$c, d \geq 1$ が存在し、任意の n に対して $a(n) \leq c \cdot n^d$ となるとき (G, A) は polynomial growth であるという
・$f_{G,A}(X)$ の収束半径が R のとき、$\omega(G, A) = \frac{1}{R}$ である。(コーシー・アダマールの公式)

直積および自由積の growth function

Theorem 1.4

([1] Proposition1.4(b)) $G{=}H{\times}K$ である群 G,H,K が、各々 growth function $A(X),B(X),C(X)$ をもつとき、以下の等式が成り立つ。
$A(X) = B(X)C(X)$

多項式
$f(t) = a_0{+}a_1t{+}a_2t^2{+}\cdots{+}a_nt^n, g(t) = b_0{+}b_1t{+}b_2t^2{+}\cdots{+}b_mt^m$
に対し $f(t) * g(t)$ **を以下で定義**

$$f(t) * g(t) = \frac{f(t)g(t)}{1-(f(t)-1)(g(t)-1)} = \frac{f(t)g(t)}{f(t)+g(t)-f(t)g(t)}$$

Theorem 1.5

([1] Proposition1.5) $G{=}H{*}K$ である群 G,H,K が、各々 growth function $A(X),B(X),C(X)$ をもつとき、以下の等式が成り立つ。
$A(X) = B(X) * C(X)$

growth function に関する先行研究

growth function に関する先行研究には以下のものがある。

Theorem 1.6 (Milnor,1968)

断面曲率が負のコンパクトリーマン多様体の基本群は指数増大度 *(exponetial growth)* をもつ。また、平均曲率が非負のコンパクトリーマン多様体の基本群は多項式増大度 *(polynomial growth)* をもつ。

この定理から、多様体の基本群の growth rate と多様体の幾何構造との関係が研究された。

growth function に関する先行研究

growth function $f(X)$ の例

· **無限巡回群** $\mathbb{Z} =< a >$
$f(X) = 1 + 2X + 2X^2 + 2X^3 + \cdots = \frac{1+X}{1-X}$
· **階数** n **の自由群** $F_n =< a_1, \cdots, a_n >$
$f(X) = 1 + 2nX + 2n(2n-1)X^2 + \cdots = \frac{1+X}{1-(2n-1)X}$
· **種数** $n(n \geq 2)$ **の閉曲面の基本群** (Cannon,1980)
$f(X) = \frac{(1+X)(1-x^{2g})}{1-(4g-1)X+(4g-1)X^{2g}-X^{2g+1}}$
·trefoil **の基本群** $< x, y | x^2 = y^3 >$(M.shapiro,1994)
· **トーラス絡み目の基本群** $< x, y | x^p = y^q >$(**中川-田村-山下**)

ただし、一般的に計算が複雑なため多くの有限表示群の growth function **は計算されていない**

研究目的

・3 次元多様体の基本群の growth function を求めたい
$\longrightarrow$ 特に Seifelt 多様体の場合の計算を行うための、第 1 段階として以下の stem product の growth function を求める

$$G =< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$$

1. 背景
   - stem product
   - growth function
2. 研究目的
3. **研究結果**
   - growth function 有理式表示
   - growth rate の性質
4. 証明
   - 標準形導出の規則
   - 標準形の分類
   - 標準形の growth function
   - 標準形 ZU(Z=id) の growth function
5. まとめ
6. 参考文献

研究結果

本研究では有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$ **において** $p, q \geq 2$ **における標準形及び最短標準形とその** growth function **を求めた**

growth function 有理式表示の公式

有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$ **の** growth function $A_{p,q}(X)$ **の有理式表示の公式を** p,q **が奇数、**p **が偶数**,q **が奇数、**p,q **が偶数の場合に分けて求めた**

growth function の有理式表示

有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$ **の**
growth function **を** $A_{p,q}(X)$

$A_{p,q}(X)$ **の有理式表示を求めるにあたり、用いる多項式** $C_n(X)$ **を**

$$C_n(X) = \begin{cases} 1 + 2X + \cdots + 2X^{\frac{n-1}{2}} & (n = 2m+1) \\ 1 + 2X + \cdots + 2X^{\frac{n-2}{2}} + X^{\frac{n}{2}} & (n = 2m) \end{cases}$$

$B_{p,q}(X)$ **を**

$$\begin{aligned} B_{p,q}(X) &= C_p * C_q \\ &= \frac{C_p(X) \cdot C_q(X)}{1 - (C_p(X) - 1)(C_q(X) - 1)} \end{aligned}$$

とする。

主結果 growth function 有理式表示 (p,q が奇数)

有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$

p,q が奇数の場合の growth function の公式

$$
\begin{aligned}
& A_{p,q}(X) \\
= \ & C_p * C_q + 2X(C_p * C_q) + X^2(C_{p-2} * C_{q-2}) \\
& +X\{(C_p * C_q) - (C_{p-2} * C_{q-2})\} \\
& +\frac{2(1+X)\{(C_p * C_q) - 1\}X(C_p * C_q)}{1 - \{(C_p * C_q) - 1\}X} \\
= \ & B_{p,q} + 2XB_{p,q} + X^2 B_{p-2,q-2} \\
& +X(B_{p,q} - B_{p-2,q-2}) + \frac{2(1+X)(B_{p,q}-1)XB_{p,q}}{1-(B_{p,q}-1)X} \\
= \ & \frac{B_{p,q}B_{p-2,q-2}X^2(X-1) + B_{p-2,q-2}X(1-X^2) + B_{p,q}(B_{p,q}X^2 - B_{p,q}X - X^2 - 2X - 1)}{B_{p,q}X - X - 1}
\end{aligned}
$$

主結果 growth function 有理式表示 (p が偶数,q が奇数)

有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$

p が偶数,q が奇数の場合の growth function の公式

$$
\begin{aligned}
& A_{p,q}(X) \\
= \ & C_p * C_q + 2X(C_p * C_q) + \{(C_p * C_q) - (C_{p-1} * C_q)\} \\
& + X\{(C_{p-1} * C_q) - (C_{p-1} * C_{q-2})\} + X^2(C_{p-1} * C_{q-2}) \\
& + \frac{2(1+X)\{(C_p * C_q) - 1\}X(C_p * C_q)}{1 - \{(C_p * C_q) - 1\}X} \\
= \ & 2B_{p,q}(X+1) + B_{p-1,q}(X-1) + B_{p-1,q-2}X(X-1) \\
& + \frac{2(1+X)(B_{p,q}-1)XB_{p,q}}{1-(B_{p,q}-1)X} \\
= \ & \frac{B_{p,q}B_{p-1,q-2}X^2(X-1) + B_{p-1,q-2}X(1-X^2) + B_{p,q}B_{p-1,q}X(X-1) + B_{p-1,q}(1-X^2) - 2B_{p,q}(1+X)}{B_{p,q}X - X - 1}
\end{aligned}
$$

主結果 growth function 有理式表示 (p,q が偶数)

有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$

p,q が偶数の場合の growth function の公式

$$
\begin{aligned}
& A_{p,q}(X) \\
= \; & C_p * C_q + 2X(C_p * C_q) + \{(C_p * C_q) - (C_{p-1} * C_{q-1})\} \\
& + X^2(C_{p-1} * C_{q-1}) + \frac{2(1+X)\{(C_p * C_q) - 1\}X(C_p * C_q)}{1 - \{(C_p * C_q) - 1\}X} \\
= \; & B_{p,q} + 2XB_{p,q} + (B_{p,q} - B_{p-1,q-1}) + X^2(B_{p-1,q-1}) + \frac{2(1+X)(B_{p,q}-1)XB_{p,q}}{1-(B_{p,q}-1)X} \\
= \; & \frac{(X+1)(B_{p,q}B_{p-1,q-1}X^2 - B_{p-1,q-1}X^2 - B_{p,q}B_{p-1,q-1}X + B_{p-1,q-1} - 2B_{p,q})}{B_{p,q}X - X - 1}
\end{aligned}
$$

growth rate の性質

知られている多くの例において growth function **の** growth rate **は** Perron number **である。**

Definition 3.1 (Perron number)

Perron number **とは、以下の条件を満たす数である。**

·1 **より大きい実数**

· **代数的整数**

· **絶対値が他の共役よりも大きい**

Example 1 (p=4,q=3)

growth function : $\frac{(2X+1)(8X^6+2X^5-19X^4-5X^3+4X^2+X+1)}{(2X-1)(4X^3+7X^2+X-1)}$

growth rate ω : $\omega = \frac{1}{0.29\cdots} = 3.40\cdots \rightarrow 1$ **より大きい実数**

ω **の最小多項式は、** $\omega^3 - \omega^2 - 7\omega - 4 = 0 \quad \rightarrow$ **代数的整数**

$(4X^3 + 7X^2 + X - 1) = 0$**の解** :$X = 0.29\cdots, -0.58\cdots, -1.46\cdots$

$\rightarrow$ **絶対値が他の共役よりも大きい**

1. 背景
   - stem product
   - growth function
2. 研究目的
3. 研究結果
   - growth function 有理式表示
   - growth rate の性質
4. 証明
   - 標準形導出の規則
   - 標準形の分類
   - 標準形の growth function
   - 標準形 ZU(Z=id) の growth function
5. まとめ
6. 参考文献

標準形

growth function の公式を導出するために
有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$ の要素に対してただ 1 つの文字列である標準形 (canonical form) を定めた。

標準形導出の規則 1

次の規則 1〜4 により、標準形が決定

規則 1 (有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$)

x の乗数を $-f_1(p) \sim f_2(p)$、y の乗数を $-f_1(q) \sim f_2(q)$、
z の乗数を $-1 \sim 2$ にする。
ただし、$f_1(p), f_2(p), f_1(q), f_2(q)$ は

$$f_1(p) = \begin{cases} \frac{p-1}{2} & (p = 2m+1) \\ \frac{p-2}{2} & (p = 2m) \end{cases} \qquad f_2(p) = \begin{cases} \frac{p-1}{2} & (p = 2m+1) \\ \frac{p}{2} & (p = 2m) \end{cases}$$

となる。(m は整数。$f_1(q)$ は $f_1(p)$、$f_2(q)$ は $f_2(p)$ と同様)

Example 2 (p=4,q=3, 文字列 $x^6yz^{-3}y^4z^{-3}x^5z^{-1}y^{-1}zyz^2xz^{22}$)

x の乗数を $-1 \sim 2$,y の乗数を $-1 \sim 1$ にする

$x^4x^2yz^{-3}y^4z^{-3}x^5z^{-1}y^{-1}zyz^2xz^{22} \rightarrow z^2x^2yz^{-3}z^2yz^{-3}z^2xz^{-1}y^{-1}zyz^2xz^{22}$

z の乗数を $-1 \sim 2$ にする

$z^2x^2yz^{-1}yz^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyz^2xz^{20}z^2 \rightarrow z^2x^2yz^{-1}yz^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyz^2xz^2$

標準形導出の規則 2

規則 2 (有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$)

有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, x^q = z^2, z^4 = id >$ **の要素を表す** Z $(z^{-1} \sim z^2)$ **と** U $(x^{-f_1(p)} \sim x^{f_2(p)}, y^{-f_1(q)} \sim y^{-f_2(q)})$ **に分解**

(1) $$\cup_{i \geq 0}^{\infty} Z \ (U \ \ Z)^i \ U$$

Example 3 (p=4,q=3, 文字列 $z^2x^2yz^{-1}yz^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyz^2xz^2$)

$z^2x^2yz^{-1}yz^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyz^2xz^2 \rightarrow ZUZUZUZUZUZUZ$

標準形導出の規則 3

規則 3 (有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$)

Z に z^2 が含まれている場合は、全て左端に移動する。また、z^{-1} が偶数個含まれている場合は全て z に変形、奇数個の場合は一番右にある z^{-1} 以外は全て z に変形する。その結果、z^{-1} は文字列中に 0 または 1 個含まれる。z^{-1} が含まれる場合は、右端の Z の位置にある z と入れ替え

Example 4 (p=4,q=3, 文字列 $z^2x^2yz^{-1}yz^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyz^2xz^2$)

z^2 を全て左端に移動

$z^2x^2yz^{-1}yz^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyz^2xz^2 \to z^2z^2z^2x^2yz^{-1}yz^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyx$

一番右にある z^{-1} 以外は全て z に変形

$z^6x^2yz^2z^{-1}yz^2z^{-1}xz^{-1}y^{-1}zyx \to z^6x^2yzyzxz^{-1}y^{-1}zyx$

z^{-1} を右端の Z の位置にある z と入れ替え

$z^6x^2yzyzxz^2z^{-1}y^{-1}z^{-2}zyx \to z^6x^2yzyzxzy^{-1}z^{-1}yx$

標準形導出の規則 4

規則 4 (有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$)

Z の左端は、有限生成群の関係式 $z^4 = id$ により、$z^{-1}, z^0 = id, z, z^2$ になっていることにしても良い。また、Z が 2 個以上存在し、z^2 と z, z^{-1} を含む場合は変形を行い、z^2 を消去 (z, z^{-1} のどちらも含む場合は z^{-1} を z に、z のみ含む場合は一番右にある z を z^{-1} に変形)

Example 5 (p=4,q=3, 文字列 $z^6x^2yzyzxzy^{-1}z^{-1}yx$)

左端の z^6 を z^2 に変形

$z^4z^2x^2yzyzxzy^{-1}z^{-1}yx \rightarrow z^2x^2yzyzxzy^{-1}z^{-1}yx$

z^2 を消去

$z^2z^2x^2yzyzxzy^{-1}z^2z^{-1}yx \rightarrow x^2yzyzxzy^{-1}zyx$

最短標準形 (canonical form) 導出の規則5

導出した全ての標準形の長さが最短とは限らないため、標準形の長さを最短にする規則5が必要

規則5 (有限生成群 $< x, y, z | x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$)

Z が1個のみ存在し、かつ z^2 のとき、U の中の要素を以下のように変形し、z^2 を消去

(1) p,q が奇数の場合

U の中の最も左にある $x^{\pm\frac{p-1}{2}}, y^{\pm\frac{q-1}{2}}$ を $x^{\mp\frac{p-1}{2}+1}, y^{\mp\frac{q-1}{2}+1}$ に変形

(2) p が偶数,q が奇数の場合

(i) U の中で最も左にある $x^{\pm\frac{p}{2}}$ を、$x^{\mp\frac{p}{2}}$ に変形

(ii) U の中に $x^{\pm\frac{p}{2}}$ が含まれていない場合、最も左にある $y^{\pm\frac{q-1}{2}}$ を $y^{\mp\frac{q-1}{2}+1}$ に変形

(3) p,q が偶数の場合

U の中の最も左にある $x^{\pm\frac{p}{2}}, y^{\pm\frac{q}{2}}$ を $x^{\mp\frac{p}{2}}, y^{\mp\frac{q}{2}}$ に変形

最短標準形導出の規則 5

規則 5

文字列の長さを最短にするため、Z が 1 個のみ存在し、かつ $z^2(=z^{-2})$ のとき、U の中の要素の以下のように変形し、$z^2(=z^{-2})$ を消去

(2) p **が偶数**,q **が奇数の場合**

(i) U **の中で最も左にある** $x^{\pm\frac{p}{2}}$ **を、** $x^{\mp\frac{p}{2}}$ **に変形**

(ii) U **の中に** $x^{\pm\frac{p}{2}}$ **が含まれていない場合、最も左にある** $y^{\pm\frac{q-1}{2}}$ **を** $y^{\mp\frac{q-1}{2}+1}$ **に変形**

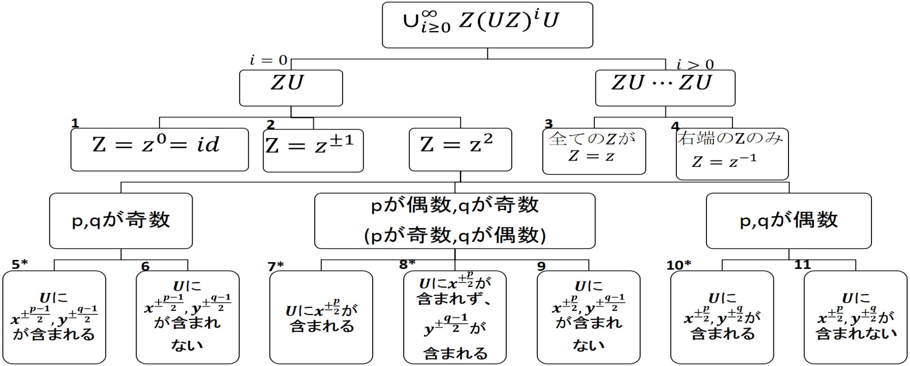
Example 6 (p=4,q=3, 文字列 z^2x^2y, 規則 5(2)(i))

x^2 **を** x^{-2} **に変形し、**z^2 **を消去**

$z^2z^2z^{-2}x^2y \rightarrow x^{-2}y$

標準形の分類

規則 1∼5 **より、標準形を以下のように分類可能**



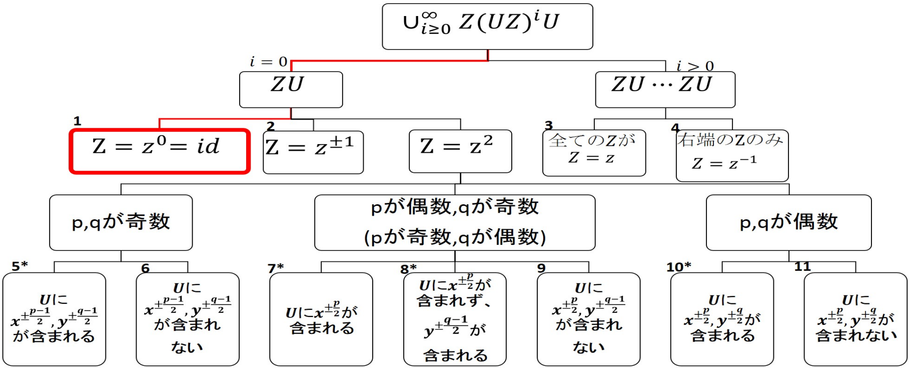
＊5,7,8,10の標準形は最短標準形ではないため、growth functionを求める際に規則5の適用が必要となる

有限生成群 $< x, y, z \mid x^p = z^2, y^q = z^2, z^4 = id >$ **の** growth function

- p,q **が奇数の場合、**1∼6 **の標準形の** growth function **の合計**
- p **が偶数**,q **が奇数の場合、**1∼4,7∼9 **の標準形の** growth function **の合計**
- p,q **が偶数の場合、**1∼4,10,11 **の標準形の** growth function **の合計**

標準形 ZU(Z=id) の growth function

標準形 ZU **の** growth function **を求める際は、**Z=id,$z^{\pm1}$,z^2 **の場合に分けて、各々最短標準形とその** growth function **を求める必要がある。**



＊5,7,8,10の標準形は最短標準形ではないため、growth functionを求める際に規則5の適用が必要となる

標準形 ZU (Z=id)

最短標準形は、規則 1∼4 **まで適用された以下の形**

$$
\begin{array}{ll}
Z & U \\
\downarrow & \downarrow \\
\{id\} & \{id, x^{-f_1(p)} \sim x^{f_2(p)}\} * \{id, y^{-f_1(q)} \sim y^{f_2(q)}\}
\end{array}
$$

{} **内は、**Z,U **の要素を表す。**
$f_1(p), f_2(p), f_1(q), f_2(q)$ **は**

$$
f_1(p) = \begin{cases} \frac{p-1}{2} & (p = 2m+1) \\ \frac{p-2}{2} & (p = 2m) \end{cases} \qquad f_2(p) = \begin{cases} \frac{p-1}{2} & (p = 2m+1) \\ \frac{p}{2} & (p = 2m) \end{cases}
$$

となる。(m **は整数。**$f_1(q)$ **は** $f_1(p)$**、**$f_2(q)$ **は** $f_2(p)$ **と同様**)

したがって、growth function **は以下のように表される。**

$$
C_p * C_q
$$

1. 背景
   - stem product
   - growth function
2. 研究目的
3. 研究結果
   - growth function 有理式表示
   - growth rate の性質
4. 証明
   - 標準形導出の規則
   - 標準形の分類
   - 標準形の growth function
   - 標準形 ZU(Z=id) の growth function
5. まとめ
6. 参考文献

まとめ

p,q が奇数の場合の growth function の公式

$$\frac{B_{p,q}B_{p-2,q-2}X^2(X-1)+B_{p-2,q-2}X(1-X^2)+B_{p,q}(B_{p,q}X^2-B_{p,q}X-X^2-2X-1)}{B_{p,q}X-X-1}$$

p が偶数,q が奇数の場合の growth function の公式

$$\frac{B_{p,q}B_{p-1,q-2}X^2(X-1)+B_{p-1,q-2}X(1-X^2)+B_{p,q}B_{p-1,q}X(X-1)+B_{p-1,q}(1-X^2)-2B_{p,q}(1+X)}{B_{p,q}X-X-1}$$

p,q が偶数の場合の growth function の公式

$$\frac{(X+1)(B_{p,q}B_{p-1,q-1}X^2-B_{p-1,q-1}X^2-B_{p,q}B_{p-1,q-1}X+B_{p-1,q-1}-2B_{p,q})}{B_{p,q}X-X-1}$$

参考文献

[1] A.Mann, How Groups Grow, London Mathematical Society Lecture Note Series: 395, 2012