On handlebody-knot pairs which realize exteriors of knotted surfaces in S^3

長田　俊耐

九州大学　数理学府 M2

(結び目の数学 VIII, 2015/12/25)

S^3 内の曲面

S^3 内に埋め込まれた, 向き付け可能な連結閉曲面について考える.

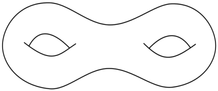
F : S^3 内の曲面
F の**外部** : F の正則近傍 $N(F)$ の補空間 $S^3 \setminus N(F)$ の閉包
V_F, W_F : F の外部の連結成分 (c.f. Alexander 双対定理)

定義

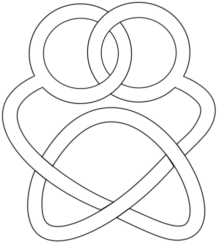
(1) F は **unknotted**
$\Leftrightarrow$ V_F と W_F がともにハンドル体に同相.

(2) F は **knotted**
$\Leftrightarrow$ F は unknotted ではない.

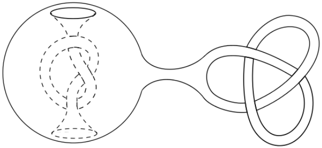
(種数 2 の場合)



unknotted



knotted(1)



knotted(2)

注意：種数 0 ならいつでも unknotted(Alexander, 1924)

S^3 内の曲面の結び目型について

定義

S^3 内の 2 つの曲面 F_1 と F_2 は**同値** ($F_1 \cong F_2$)
$\Leftrightarrow$ F_1 と F_2 は S^3 のイソトピーで移り合う.

与えられた 2 つの曲面はいつ同値になるのか？？

S^3 内の曲面の結び目型について

定義

S^3 内の 2 つの曲面 F_1 と F_2 は**同値** $(F_1 \cong F_2)$
$\Leftrightarrow$ F_1 と F_2 は S^3 のイソトピーで移り合う.

与えられた 2 つの曲面はいつ同値になるのか？？

- **Unknotted な曲面について**
  $\to$ S^3 内の同じ種数を持つ 2 つの unknotted な曲面は同値である.
  (Waldhausen, 1968)

S^3 内の曲面の結び目型について

定義

S^3 内の 2 つの曲面 F_1 と F_2 は**同値** $(F_1 \cong F_2)$
$\Leftrightarrow$ F_1 と F_2 は S^3 のイソトピーで移り合う.

与えられた 2 つの曲面はいつ同値になるのか？？

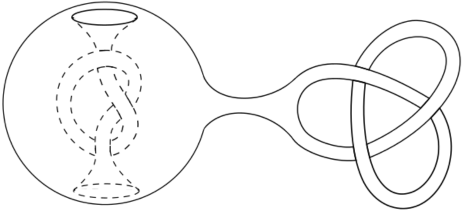
- **Unknotted な曲面について**
  $\to$ S^3 内の同じ種数を持つ 2 つの unknotted な曲面は同値である.
  (Waldhausen, 1968)

- **Knotted な曲面について**
  曲面の外部の連結成分のどちらか一方がハンドル体と同相な場合
  $\to$ **ハンドル体結び目**理論
  (非自明なハンドル体結び目の境界は knotted な曲面である.)

Bi-knotted な曲面

定義

曲面 F は **bi-knotted**
$\Leftrightarrow$ V_F と W_F はどちらもハンドル体に同相でない.



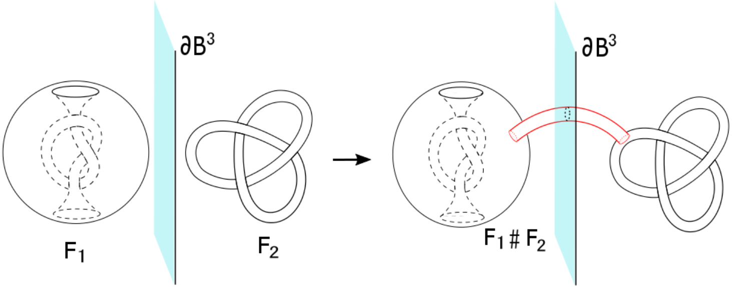
種数 2 の bi-knotted な曲面の例

曲面のイソトピー和

定義

F_1, F_2 : S^3 内の曲面
$\exists B^3$: S^3 内の 3 次元球体 s.t. $F_1 \subset \mathrm{int} B^3$ かつ $F_2 \subset S^3 \setminus B^3$ とする.

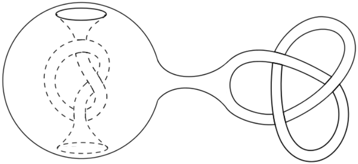
F_1 と F_2 を (ある自然な条件を満たす) $S^1 \times [-1, 1]$ で「つないで」得られる曲面のことを F_1 と F_2 の**イソトピー和**と呼び, $F_1 \sharp F_2$ と表す.



S^3 内の曲面の分解と素な曲面

定義

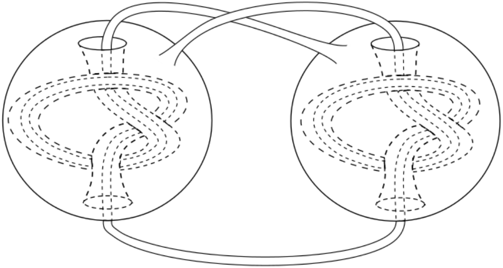
- 曲面 F が $F_1 \sharp F_2 \sharp \cdots \sharp F_k$ (各 F_i は曲面) と同値であるとき, $F_1 \sharp F_2 \sharp \cdots \sharp F_k$ を F の F_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ への**分解**と呼ぶ.
- $F (\not\cong S^2)$ が**素**
  $\Leftrightarrow$ F の任意の分解 $F \cong F_1 \sharp F_2$ に対して, F_1 または F_2 が S^2 と同値.



種数 2 の 素でない bi-knotted な曲面

素で bi-knotted な曲面の例

本間の曲面 (1954)

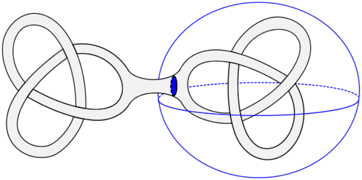


既約なハンドル体結び目

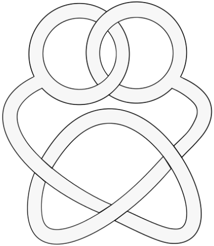
定義

(1) ハンドル体結び目 H は**可約**
$\Leftrightarrow \exists S^2$: S^3 内の 2 次元球面 s.t. $H \cap S^2$ がちょうど 1 つの H に適切に埋め込まれた本質的な 2 次元円板となる.

(2) ハンドル体結び目 H は**既約** $\Leftrightarrow$ H は可約でない.



可約なハンドル体結び目



既約なハンドル体結び目

Knotted, unknotted な曲面の外部について

定理 (Fox, 1948)

M: S^3 の連結かつコンパクトな 3 次元部分多様体
M の境界は連結かつ空でない
$\Rightarrow \exists H$: ハンドル体結び目 s.t. $S^3 \setminus \mathrm{int}\, H \approx M$(同相).

Knotted, unknotted な曲面の外部について

定理 (Fox, 1948)

M: S^3 の連結かつコンパクトな 3 次元部分多様体
M の境界は連結かつ空でない
$\Rightarrow \exists H$: ハンドル体結び目 s.t. $S^3 \setminus \mathrm{int}\, H \approx M$(同相).

F: S^3 内の曲面
V_F, W_F : F の外部の連結成分

Knotted, unknotted な曲面の外部について

定理 (Fox, 1948)

M: S^3 の連結かつコンパクトな 3 次元部分多様体
M の境界は連結かつ空でない
$\Rightarrow \exists H$: ハンドル体結び目 s.t. $S^3 \setminus \mathrm{int}\, H \approx M$(同相).

F: S^3 内の曲面
V_F, W_F : F の外部の連結成分
$\Rightarrow \exists H_V, H_W$: ハンドル体結び目 s.t.
$S^3 \setminus \mathrm{int}\, H_V \approx V_F$ かつ $S^3 \setminus \mathrm{int}\, H_W \approx W_F$.

Knotted, unknotted な曲面の外部について

定理 (Fox, 1948)

M: S^3 の連結かつコンパクトな 3 次元部分多様体
M の境界は連結かつ空でない
$\Rightarrow \exists H$: ハンドル体結び目 s.t. $S^3 \setminus \mathrm{int}\, H \approx M$(同相).

F: S^3 内の曲面
V_F, W_F : F の外部の連結成分
$\Rightarrow \exists H_V, H_W$: ハンドル体結び目 s.t.
$S^3 \setminus \mathrm{int}\, H_V \approx V_F$ かつ $S^3 \setminus \mathrm{int}\, H_W \approx W_F$.

定義

上の (H_V, H_W) を曲面 F の**ハンドル体結び目対**と呼ぶ.

曲面のハンドル体結び目対

問題

S^3 内の曲面に対し，どのようなハンドル体結び目対が現れるのか？？

曲面のハンドル体結び目対

問題

S^3 内の曲面に対し, どのようなハンドル体結び目対が現れるのか？？

F : S^3 内の曲面
(H_1, H_2) : F のハンドル体結び目対

F **が unknotted**$\rightarrow$ H_1, H_2 はともに自明なハンドル体結び目.
F **が knotted**$\rightarrow$ H_1, H_2 のうち, 少なくともどちらか一方は非自明なハンドル体結び目.
F **が bi-knotted**$\rightarrow$ H_1, H_2 はともに非自明なハンドル体結び目.

曲面のハンドル体結び目対

問題

S^3 内の曲面に対し，どのようなハンドル体結び目対が現れるのか？？

F : S^3 内の曲面
(H_1, H_2) : F のハンドル体結び目対

F **が unknotted**→ H_1, H_2 はともに自明なハンドル体結び目.
F **が knotted**→ H_1, H_2 のうち，少なくともどちらか一方は非自明なハンドル体結び目.
F **が bi-knotted**→ H_1, H_2 はともに非自明なハンドル体結び目.

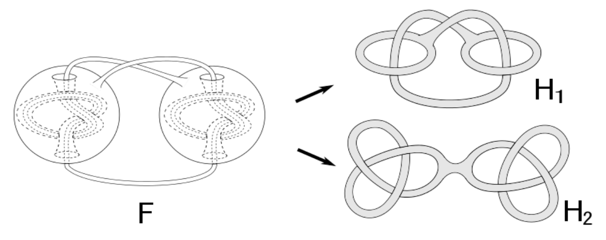
素で bi-knotted な曲面のハンドル体結び目対は？？

素な曲面のハンドル体結び目対

F : S^3 内の 種数 2 の曲面
(H_1, H_2) : F のハンドル体結び対

命題

F が素で bi-knotted な曲面
$\Rightarrow$ H_1 と H_2 のうち，どちらか一方は既約であり，もう一方は可約である．



後述の定理 [Y.Tsukui, 1973] を用いるとすぐに示せる．

主定理

逆に, 与えられたハンドル体結び目対を, 素で bi-knotted な曲面で実現できるか？？

主定理

逆に, 与えられたハンドル体結び目対を, 素で bi-knotted な曲面で実現できるか？？

主定理

(1) H_1 : 種数 2 の既約なハンドル体結び目で, 性質 $\widetilde{\mathrm{T}}$ を満たす
H_2 : 種数 2 の可約なハンドル体結び目で, 非自明
$\Rightarrow \exists F$: 種数 2 の素で **bi-knotted** な曲面
s.t. (H_1, H_2) は F のハンドル体結び目対.

主定理

逆に, 与えられたハンドル体結び目対を, 素で bi-knotted な曲面で実現できるか？？

主定理

(1) H_1：種数 2 の既約なハンドル体結び目で, 性質 $\widetilde{\mathrm{T}}$ を満たす
H_2：種数 2 の可約なハンドル体結び目で, 非自明
$\Rightarrow \exists F$：種数 2 の素で **bi-knotted** な曲面
s.t. (H_1, H_2) は F のハンドル体結び目対.

(2) H_1：種数 2 の既約なハンドル体結び目で, 性質 T を満たす
$H_2 = T_1 \natural T_2$：可約なハンドル体結び目, T_1 は非自明な結び目の管状近傍, T_2 は自明な solid torus
$\Rightarrow \exists F$：種数 2 の素で **bi-knotted** な曲面
s.t. (H_1, H_2) は F のハンドル体結び目対.

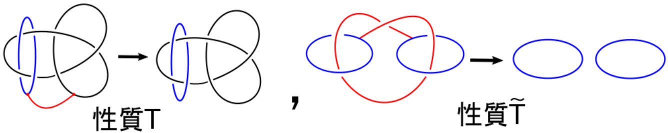
性質 T, 性質 $\widetilde{\mathrm{T}}$ を満たすハンドル体結び目

S^3 内に埋め込まれたハンドカフグラフ K の“鎖”の部分を忘れると，
2 成分絡み目 $L = L_1 \cup L_2$ が得られる.

定義

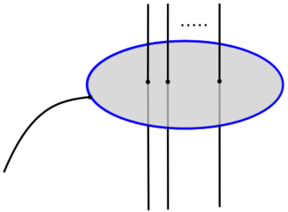
(1) 種数 2 ハンドル体結び目が**性質 T を満たす** $\Leftrightarrow$ L_1 または L_2 が自明な結び目となるようなハンドカフグラフ K の正則近傍.

(2) 種数 2 ハンドル体結び目が**性質 $\widetilde{\mathrm{T}}$ を満たす** $\Leftrightarrow$ L が自明な絡み目となるようなハンドカフグラフ K の正則近傍.

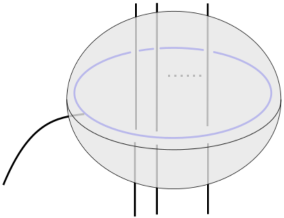


主定理の曲面の構成 (その 1)

H_1 が性質 T を満たすとする.
(片方が自明結び目となるハンドカフグラフ K の正則近傍.)
$\Rightarrow \exists D^2$: S^3 内に埋め込まれた 2 次元円盤
s.t. ∂D^2=(K の自明な結び目部分)
$N(D^2)$ を D^2 の正則近傍とする.



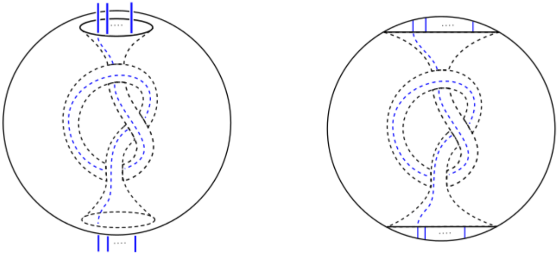
自明な結び目部分と D^2



$N(D^2)$

主定理の曲面の構成 (その 2)

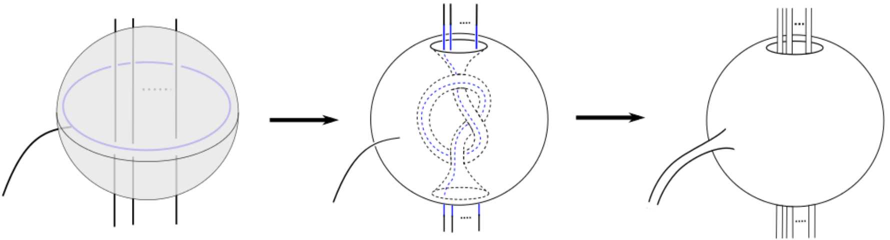
次に下図のような 3 次元球体 B^3 内のトーラスといくつかの弧 ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ とおく) を準備する.
トーラス $\rightarrow$ 非自明な弧に沿ったトンネルを持つ (H_2 をもとに選ぶ).
いくつかの弧 $\rightarrow$ トンネルに沿って平行.



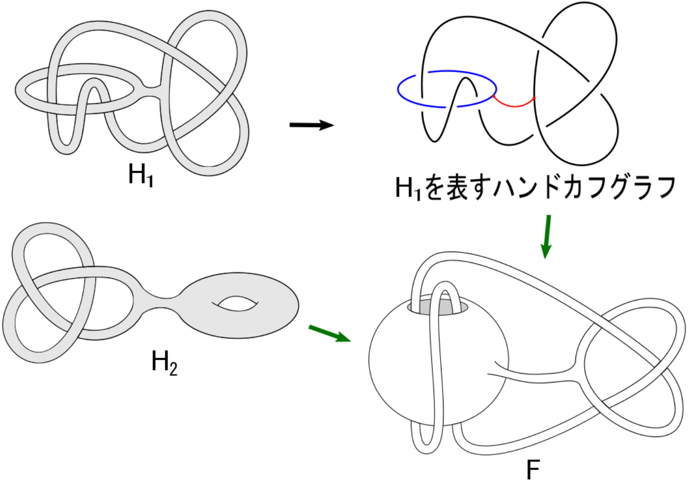
(右は真横から見た図)

主定理の曲面の構成 (その 3)

最初の $N(D^2)$ と先ほどの 3 次元球体 B^3 を “入れ替える”.
(ただし, $\partial N(D^2) \cap K = \partial B^3 \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \cdots \cup \alpha_k)$ となるようにする.)
最後に, K の残りの部分と B^3 内の弧を太らせ, その境界の曲面を F とする.



具体的な構成の例



主定理の証明の概略

次の定理を用いる.

定理 (Y.Tsukui,1973)

F : S^3 内の種数 2 の曲面
V_F, W_F : F の外部の連結成分
以下は同値

(1) F は素な曲面である

(2) $\pi_1(V_F)$ と $\pi_1(W_F)$ のどちらか一方が自由積に関して分解されない

系

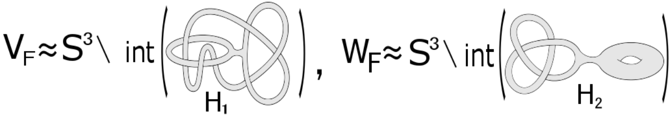
H : 種数 2 のハンドル体結び目
以下は同値

(1) H は既約である

(2) $\pi_1(S^3 \setminus \mathrm{int} H)$ は自由積に関して分解されない

主定理の証明の概略

(証明の概略)



- $\pi_1(V_F) \cong \pi_1(S^3 \setminus \mathrm{int} H_1)$
- $\pi_1(W_F) \cong$ (non-trivial knot group) $* \mathbb{Z}$

H_1 は種数 2 の既約なハンドル体結び目. (仮定)
$\to \pi_1(V_F)$ は自由積に関して分解されない. ($\because$ 先ほどの系)
$\to F$ は素な曲面. ($\because$ 定理 [Tsukui])

また, $\pi_1(V_F)$ と $\pi_1(W_F)$ はともに自由群ではないので,
F は bi-knotted. $\square$

今後の課題

- 性質 T や $\widetilde{\mathrm{T}}$ を満たすハンドカフグラフで表せないハンドル体結び目は存在するのか？？
  存在したら, どのように実現したらいいのか？？

- 種数 3 以上の曲面については？？

ありがとうございました