被覆絡み目のミルナー不変量

和田 康載（Kodai WADA）

早稲田大学大学院教育学研究科 博士課程 1 年

小林奈津花氏，安原晃氏（東京学芸大学）
との共同研究

目次

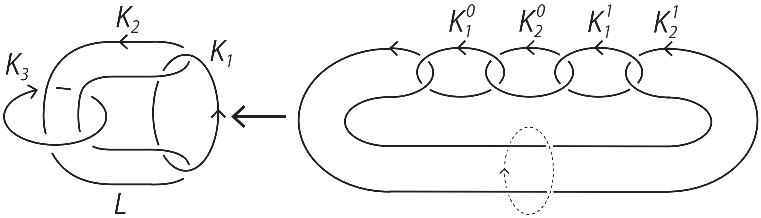
1 動機

2 ミルナー不変量

3 被覆ミルナー不変量

4 ブルニアン絡み目

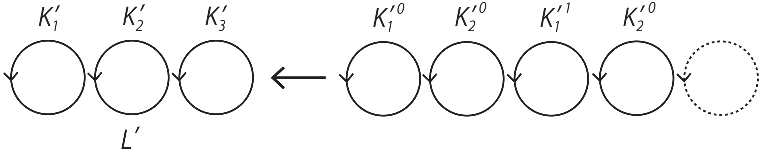
動機



$$lk(K_i, K_j) = 0$$
$$\updownarrow$$
$$lk(K'_i, K'_j) = 0$$

$$lk(K_1^0, K_2^0) = 1$$
$$\updownarrow$$
$$lk(K_1'^0, K_2'^1) = 0$$

被覆リンケージ不変量



R. Hartely; K. Murasugi, *Covering linkage invariants*, Canad. J. Math. 29 (1977) no. 6, 1312–1339.

被覆ミルナー不変量

$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{n+1}$: S^3 内の $n+1$ 成分絡み目
w/. K_{n+1} : 自明，$lk(K_i, K_{n+1}) \equiv 0 \mod 2$
$f : \Sigma(K_{n+1}) \to S^3$: K_{n+1} で分岐する S^3 の二重分岐被覆

注意 1.1

$$\Sigma(K_{n+1}) = 3 \text{ 次元球面}$$

$K_i^0 \cup K_i^1 := f^{-1}(K_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$
$\underline{L(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)} := K_1^{\varepsilon_1} \cup \cdots \cup K_n^{\varepsilon_n} \subset \Sigma(K_{n+1})$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$
L の被覆絡み目

$$\{L(0\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i \in \{0,1\}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{L(1\delta_2 \cdots \delta_n) \mid \delta_i \in \{0,1\}\}$$

定義 1.2

I : $\{1, 2, \ldots, n\}$ の元を項とする数列

被覆ミルナー不変量 $M_L(I) := \{\overline{\mu}_{L(0\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)}(I) \mid \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$

問題 (1)

被覆ミルナー不変量はどの様な性質をもつか？

問題 (2)

被覆ミルナー不変量は，ミルナー不変量よりも強い不変量か？

ミルナー不変量

L : S^3 **内の順序付けられた有向** n **成分絡み目**
$G := \pi_1(S^3 \setminus L)$
$G_q = [G, G_{q-1}]$: G **の第** q **番目降中心部分群**

定理 2.1 (Chen '52, Milnor '57)

$$G/G_q \cong \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid [\alpha_i, \lambda_i](i = 1, \ldots, n), \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_q \rangle$$

α_i : L **のメリディアン，** λ_i : L **のロンジチュード**

$$\longrightarrow \lambda_j^q = [\lambda_j] \in G/G_q \text{ は，} \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ の語で表される．}$$

[Chen '52] K.T. Chen, *Commutator calculus and link invariants*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952) 44–55.
[Milnor '57] J. Milnor, *Isotopy of links. Algebraic geometry and topology*, in: A Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, pp.280–306.

λ_j^q のマグナス展開 E を考える．

準同型写像 $E : \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle \to \mathbb{Z}[[X_1, X_2, \ldots, X_n]]$ **は，**

- $E(\alpha_i) = 1 + X_i$,
- $E(\alpha_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \cdots \ (i = 1, 2, \ldots, n)$

で定義される．($X_1, X_2, \ldots, X_n$ **は，非可換変数である．**)

定義 2.2 (Milnor '54, '57)

数列 $I = i_1 i_2 \ldots i_k j \ (k < q, i_m \in \{1, 2, \ldots, n\})$ **に対して，**

- $\mu_L(I) := E(\lambda_j^q)$ **における** $X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}$ **の係数（**$\mu_L(j) = 0$**）**
- $\Delta_L(I) = \gcd \left\{ \mu_L(J) \,\middle|\, J : I \text{ の任意の部分数列} \right\}$

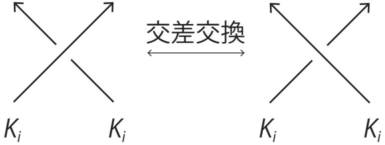
ミルナーの $\overline{\mu}-$ **不変量** $\overline{\mu}_L(I) := \mu_L(I) \ mod \ \Delta_L(I)$

[Milnor '54] J. Milnor, *Link groups*, Ann. Math. (2) 59 (1954) 177–195.
[Milnor '57] J. Milnor, *Isotopy of links. Algebraic geometry and topology*, in: A Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, pp.280–306.

$\overline{\mu}-$ 不変量の性質

$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$: S^3 **内の** n **成分絡み目**

- $\overline{\mu}_L(ij) = lk(K_i, K_j)$ $(1 \leq i < j \leq n)$
- $\overline{\mu}_L$ **はイソトピー不変量である．** [Milnor '57]
- $\overline{\mu}_L$ **はコボルディズム不変量である．** [Casson '75]
- **数列** I **の項に重複がない**
  $\Longrightarrow \overline{\mu}_L(I)$ **はリンク・ホモトピー不変量である．** [Milnor '54]



[Casson '75] A.J. Casson, *Link cobordism and Milnor's invariant*, Bull. London Math. Soc. 7 (1975) 39–40.
[Milnor '54] J. Milnor, *Link groups*, Ann. Math. (2) 59 (1954) 177–195.
[Milnor '57] J. Milnor, *Isotopy of links. Algebraic geometry and topology*, in: A Symposium in Honor of S. Lefschetz, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, pp.280–306.

主結果

$L \subset S^3$: $n+1$ **成分絡み目** w/. K_{n+1} : **自明，** $lk(K_i, K_{n+1}) \equiv 0 \mod 2$
$L(0\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) \subset \Sigma(K_{n+1})$: L **の被覆絡み目**
数列 I **に対して，** $M_L(I) = \{\overline{\mu}_{L(0\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n)} \mid \varepsilon_i \in \{0,1\}\}$

定理 3.1 (N. Kobayashi-W-Yasuhara)

任意の数列 I **に対して，**

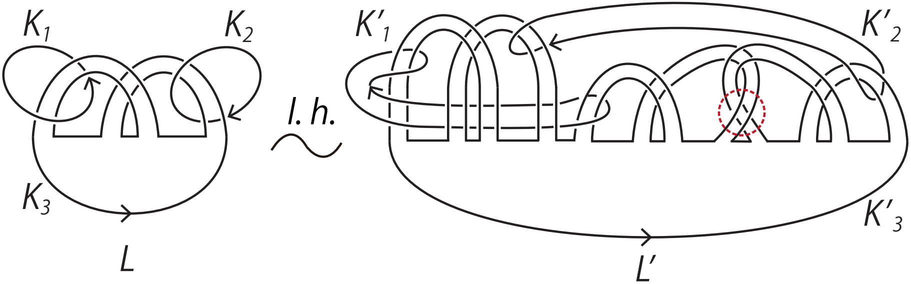
$M_L(I)$ **は** L **のコボルディズム不変量である．**

$M_L(I)$ **は** L **のリンク・ホモトピー不変量では“ない”．**

L **と** L' **がコボルダントである．**
$\overset{\text{def}}{\iff} \exists \mathcal{A} \subset S^3 \times [0,1]$: n **個のアニュラスの非交和** s.t.$\partial \mathcal{A} = L \cup -L'$.

例

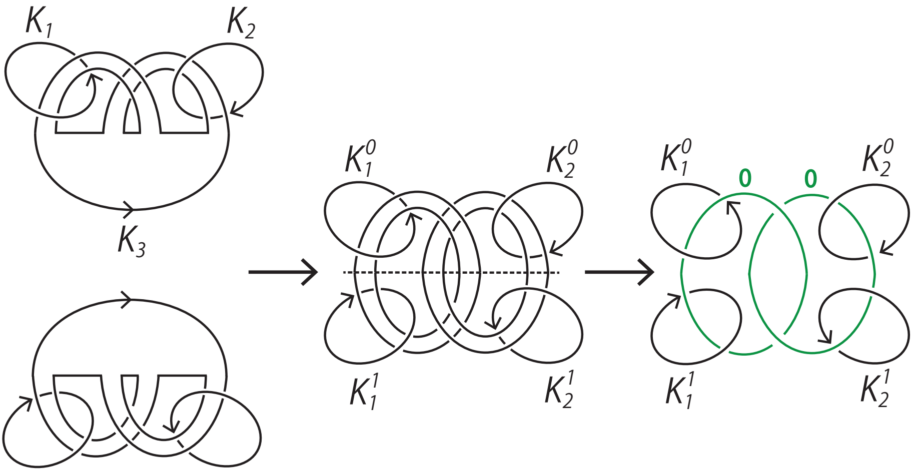
$L \overset{l.h.}{\sim} L'$ **であるが，** $M_L \neq M_{L'}$ **となる．**



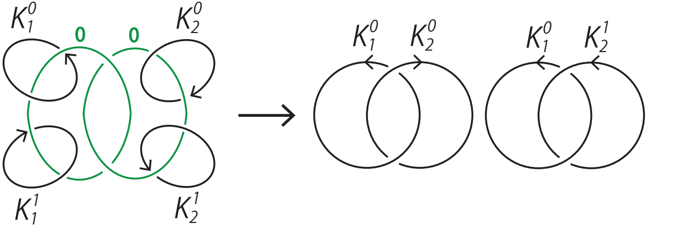
次を考察する．

$$M_L(12) = \{\overline{\mu}_{L(00)}(12), \overline{\mu}_{L(01)}(12)\},$$
$$M_{L'}(12) = \{\overline{\mu}_{L'(00)}(12), \overline{\mu}_{L'(01)}(12)\}$$

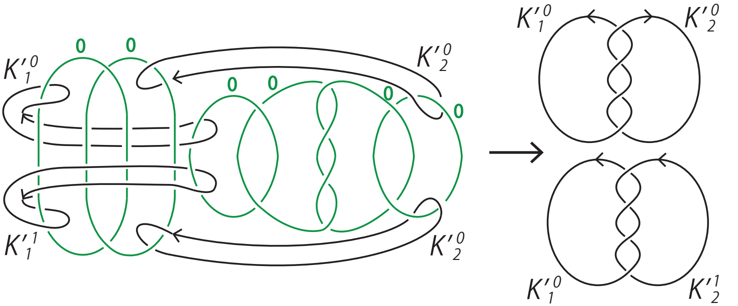
Akbult-Kirby の構成法



S. Akbulut; R. Kirby, *Branched covers of surfaces in 4-manifolds*, Math. Ann. 252 (1979/80) no. 2, 111–131.



$$\overline{\mu}_{L(00)}(12) = 1, \overline{\mu}_{L(01)}(12) = -1 \qquad \therefore M_L(12) = \{1, -1\}$$

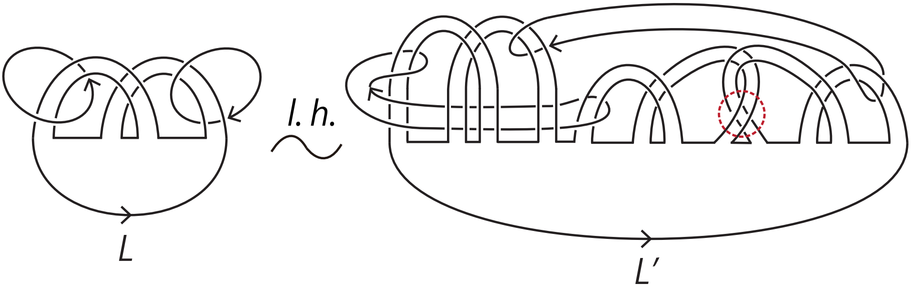


$$\overline{\mu}_{L'(00)}(12) = 2, \overline{\mu}_{L'(01)}(12) = -2 \qquad \therefore M_{L'}(12) = \{2, -2\}$$

問題 (2)

$L \subset S^3$: $n+1$ **成分絡み目** $w/.$ K_{n+1} : **自明，** $lk(K_i, K_{n+1}) \equiv 0 \mod 2$

M_L は $\overline{\mu}_L$ より強い不変量か？



$$\overline{\mu}_L(123) = 1 \longrightarrow \overline{\mu}_{L'}(123) = 1$$

$$M_L(12) = \{1, -1\} \neq \{2, -2\} = M_{L'}(12)$$

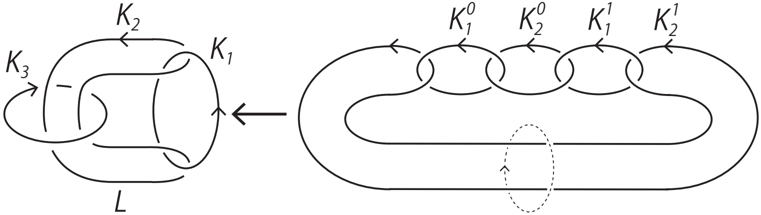
ブルニアン絡み目

$L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{n+1}$: S^3 内の $n+1$ 成分ブルニアン絡み目

(L : ブルニアン $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ L の任意の真部分絡み目が自明である.)

$\Sigma(K_{n+1})$: K_{n+1} で分岐する S^3 の二重分岐被覆

$L(0\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) \subset \Sigma(K_{n+1})$: L の被覆絡み目, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$



$\overline{\mu}_L(123) = 1 \longleftrightarrow \overline{\mu}_{L(00)}(12) = 1$

問題 (3)

$\overline{\mu}_L$ と $\overline{\mu}_{L(0\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)}$ との関係は？

主結果

定理 4.1 (N. Kobayashi-W-Yasuhara)

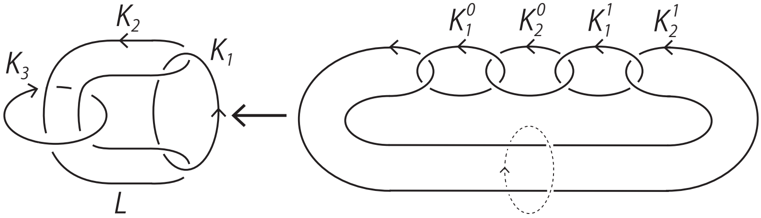
$\forall I : \{1, 2, \ldots, n+1\}$ **の元を項とする重複のない数列**
$\forall \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$

$$\overline{\mu}_L(I) \equiv \sum_{(\delta_3,\ldots,\delta_n)\in {\mathbb{Z}_2}^{n-2}} \overline{\mu}_{L(0\varepsilon_2\delta_3\cdots\delta_n)}(I \setminus (n+1)) \mod 2$$

注意 4.2

$L(0\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n) \subset \Sigma(K_{n+1})$ **は再びブルニアン絡み目となる** $(\varepsilon_i \in \{0, 1\})$.

$$\longrightarrow \overline{\mu}_L(I) \equiv \overline{\mu}_{L(0\varepsilon_2)}(12) \mod 2$$

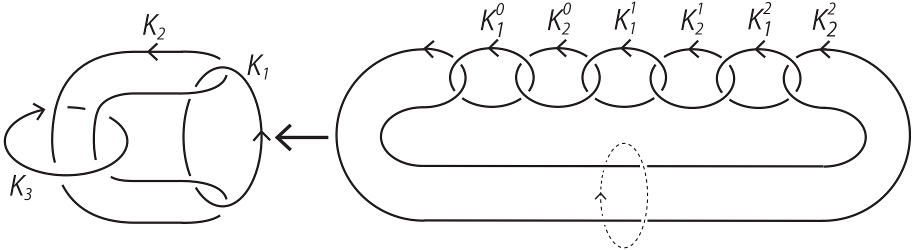


注意 4.3

$$\overline{\mu}_L(123) = 1 \longleftrightarrow \begin{cases} \overline{\mu}_{L(00)}(12) = 1 \\ \overline{\mu}_{L(01)}(12) = -1 \end{cases}$$

問題

$m(\geq 3)$ 重分岐被覆はどうなるのか？



$$\overline{\mu}_L(123) = 1 \longleftrightarrow \begin{cases} \overline{\mu}_{L(00)}(12) = 1 \\ \overline{\mu}_{L(02)}(12) = -1 \\ \overline{\mu}_{L(01)}(12) = 0 \end{cases}$$