# Character variety における Bowditch 空間の補集合の判定条件

山本 早記

奈良女子大学大学院 M2

2015 年 12 月 26 日

# character variety

$T$ : 一つ穴空きトーラス

$\pi := \pi_1(T) =< X,\ Y >$

$SL(2,\ \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \right\},\quad tr \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$

$Hom(\pi,\ SL(2,\ \mathbb{C})) = \{\rho : \pi \to SL(2,\ \mathbb{C}) \mid \rho$ は準同型 $\}$

character variety $\mathcal{X}$

$\mathcal{X} := \{[\rho] \in Hom(\pi,\ SL(2,\ \mathbb{C}))/SL(2,\ \mathbb{C}) : tr\ [\rho](XYX^{-1}Y^{-1}) = -2\}$

$\rho \in Hom(\pi,\ SL(2,\ \mathbb{C}))$ に対し、

$x = tr\ \rho(X),\ y = tr\ \rho(Y),\ z = tr\ \rho(XY)$ を対応させる

$$Hom(\pi,\ SL(2,\ \mathbb{C})) \to \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = xyz\} \cong \mathcal{X}$$

$$\rho \longmapsto (tr\ \rho(X),\ tr\ \rho(Y),\ tr\ \rho(XY))$$

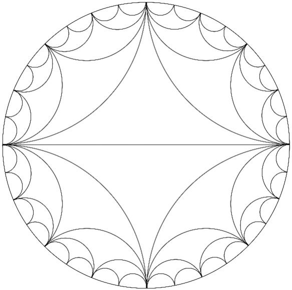
$x = 0$ のとき、$\{(0,\ y,\ yi) \mid y \in \mathbb{C}\} \quad (i = \sqrt{-1})$

- 対応する $\rho$ が離散的かつ単射のとき — Riley slice
- 離散的かつ単射ではない $\rho$ からは 2 橋絡み目の双曲構造などが得られる

# Farey triangularion

Farey triangulation とは、単位円板を無限個の三角形に分割する方法である。

$V$ :Farey triangularion の頂点の集合



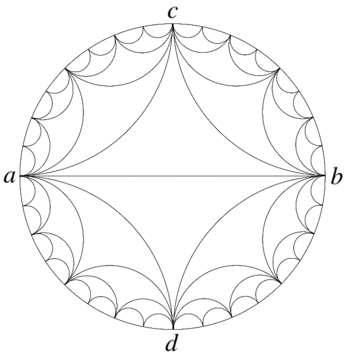
# Markov 写像

$V$ :Farey triangularion の頂点の集合

**定義 (Markov 写像)**

Markov 写像 $\phi : V \to \mathbb{C}$

$$^{\forall}a, b, c, d \in V$$
$$\phi(d) = \phi(a)\phi(b) - \phi(c)$$




character variety
$\mathcal{X} \cong \{(x,\ y,\ z \mid x^2 + y^2 + z^2 = xyz)\}$ が与えられたとき、

$$\phi(a) = x,\ \phi(b) = y,\ \phi(c) = z$$

により Markov 写像を定める。

# BQ 条件

$V$ :Farey triangularion の頂点の集合

**定義 (BQ 条件)**

Markov 写像 $\phi : V \to \mathbb{C}$

- 任意の $v \in V$ に対し $\phi(v) \notin [-2, 2]$
- $|\phi(v)| \leq 2$ となる要素 $v \in V$ が有限個

Bowditch 空間 $\mathcal{X}_{\mathrm{BQ}}$ ： BQ 条件を満たす character variety $\mathcal{X}$ の部分集合

# 先行研究

### 予想 (Bowditch)

Bowditch 空間は quasi-Fuchsian 空間と等しい。
quasi-Fuchsian 空間の要素 $\rho$ は、離散、1 対 1、$tr\,\rho(XYX^{-1}Y^{-1}) = -2$ を満たしている。

### Jorgensen の不等式

$[\rho] \in \mathcal{X}$ について、$|\phi(v)| < 1$ となる $v \in V$ が存在するとき、
$[\rho]$ は非離散表現に対応している。

### 定理 (Ng-Tan)

$[\rho] \in \mathcal{X}$ について、$|\phi(v)| < 0.5$ となる $v \in V$ が存在するとき、
$[\rho] \in int(\mathcal{X} \backslash \mathcal{X}_{\mathrm{BQ}})$ である。

$V$ :Farey triangularion の頂点の集合

# 研究目的

Bowditch の予想が正しければ、定理 (Ng-Tan) の不等式の右辺は 1.0 まで拡張できる。

**主定理**

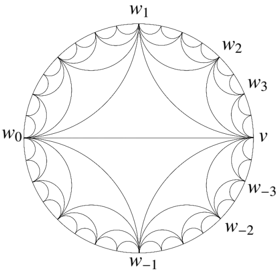
$[\rho] \in \mathcal{X}$ について、$|\phi(v)| < 1.0$ となる $v \in V$ が存在するとき、$[\rho] \in int(\mathcal{X} \backslash \mathcal{X}_{\mathrm{BQ}})$ である。

Bowditch 空間の補集合とは、BQ 条件を満たさないような $\mathcal{X}$ の部分集合

BQ 条件の否定は

- ある $v \in V$ が存在して、 $\phi(v) \in [-2, 2]$
- $|\phi(v)| \leq 2$ となる要素 $v \in V$ が無限個

ここで、$v \in V$ が存在して $|\phi(v)| < 1$ とする。




- $\phi(v) \in \mathbb{R}$ のとき
  $\Rightarrow \phi(v) \in [-2, 2]$ となり、
  BQ 条件を満たさない
- $v$ の近傍 $w \in V$ が $|\phi(w)| < |\phi(v)|$ となるとき
  $\Rightarrow |\phi(w)| \leq 2$ となる $v$ の近傍 $w$ が無限に存在し、BQ 条件を満たさない

**補助定理**

$[\rho] \in \mathcal{X}$ について、$|\phi(v)| < 1.0,\ \phi(v) \notin \mathbb{R}$ となる $v \in V$ があるとする。
このとき、$V$ に $|\phi(w)| < |\phi(v)|$ をみたす $v$ の近傍 $w$ が存在する。

以下、$x = \phi(v),\ y_n = \phi(w_n)$ と表し、
$|y_0| < |x|$ または $|y_1| < |x|$ となることを証明する。

# 証明

$\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$x = \lambda + \lambda^{-1} \tag{1}$$

$$|\lambda| > 1 \tag{2}$$

また、$\lambda = re^{i\theta}, \theta = arg\lambda$ 　とおくと以下が成立 $(A,\ D \in \mathbb{C})$

$$|\cos\theta| < \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$y_n = A\lambda^n + D\lambda^{-n} \tag{4}$$

$$AD = \frac{x^2}{x^2 - 4} \tag{5}$$

以下の不等式を満たすように $y_n$ を $y_0$ とする　（番号の付け替え）

$$1 \le \left|\frac{D}{A}\right| \le |\lambda| \tag{6}$$

## 例

もし、$y_0 = A + D$ で $\left|\frac{D}{A}\right| < 1$ の場合
$1 \le \left|\frac{D\lambda^{-n}}{A\lambda^{n}}\right| \le |\lambda|$ となるような $A\lambda^n,\ D\lambda^{-n},\ y_n$ を見つけ、それぞれ新たに $A,\ D,\ y_0$ とする。

(5), (6) 式から

$$\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \le |D^2| \le \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| |\lambda| \tag{7}$$

$A = r_1 e^{i\theta_1}, D = r_2 e^{i\theta_2}$ とおき、$\alpha = \theta_1 - \theta_2$ とする。
$|y_0|$ について、余弦定理より

$$\begin{aligned} |y_0|^2 &= |A + D|^2 \\ &= |A|^2 + |D|^2 - 2|A||D| \cos(\pi - |\alpha|) \\ &= \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|^2 \frac{1}{|D|^2} + |D|^2 + 2\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \cos\alpha \end{aligned} \tag{8}$$

$\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \le |D^2| \le \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| |\lambda|$ の範囲で $|y_0|^2$ は単調増加

$$\begin{aligned} |y_0|^2 &\le \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|^2 \frac{1}{\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| |\lambda|} + \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| |\lambda| + 2\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \cos\alpha \\ &= \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \left( |\lambda| + \frac{1}{|\lambda|} + 2\cos\alpha \right) \end{aligned} \tag{9}$$

$$
\begin{aligned}
&|y_0| < |x| \\
&\Leftrightarrow |y_0|^2 < |x|^2 \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|\left(|\lambda| + \frac{1}{|\lambda|} + 2\cos\alpha\right) < |x|^2 \\
&\Leftrightarrow \cos\alpha < \frac{|x^2-4| - |\lambda| - \frac{1}{|\lambda|}}{2} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

同様に $|y_1|$ について、余弦定理より

$$\begin{aligned}|y_1|^2 &= |A\lambda + D\lambda^{-1}|^2 \\ &= |A|^2|\lambda|^2 + |D|^2\frac{1}{|\lambda|^2} - 2|A||D|\cos(\pi - |\alpha + 2\theta|) \\ &= \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|^2 \frac{|\lambda|^2}{|D|^2} + \frac{|D|^2}{|\lambda|^2} + 2\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|\cos(\alpha + 2\theta) \qquad (11)\end{aligned}$$

$\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \leq |D^2| \leq \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right||\lambda|$ の範囲で $|y_1|^2$ は単調減少

$$\begin{aligned}|y_1|^2 &\leq \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|^2 |\lambda|^2 \frac{1}{\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|} + \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \frac{1}{|\lambda|^2} + 2\left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|\cos(\alpha + 2\theta) \\ &= \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right|\left\{|\lambda|^2 + \frac{1}{|\lambda|^2} + 2\cos(\alpha + 2\theta)\right\} \qquad (12)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|y_1| < |x| \\
&\Leftrightarrow |y_1|^2 < |x|^2 \\
&\Leftrightarrow \left|\frac{x^2}{x^2-4}\right| \left\{ |\lambda|^2 + \frac{1}{|\lambda|^2} + 2\cos(\alpha + 2\theta) \right\} < |x|^2 \\
&\Leftrightarrow \cos(\alpha + 2\theta) < \frac{|x^2-4| - |\lambda|^2 - \frac{1}{|\lambda|^2}}{2}
\end{aligned} \tag{13}
$$

(13) 式の右辺について

$$\begin{aligned}\frac{|x^2-4|-|\lambda|^2-\frac{1}{|\lambda|^2}}{2} &= \frac{|(\lambda+\lambda^{-1})^2-4|-|\lambda|^2-\frac{1}{|\lambda|^2}}{2}\\ &= \frac{-2\cos 2\theta}{2}\\ &= -\cos 2\theta \geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

また $|\lambda|>1$ のとき、$|\lambda|+\frac{1}{|\lambda|}<|\lambda|^2+\frac{1}{|\lambda|^2}$

$$\frac{|x^2-4|-|\lambda|^2-\frac{1}{|\lambda|^2}}{2} < \frac{|x^2-4|-|\lambda|-\frac{1}{|\lambda|}}{2}$$

したがって

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|x^2-4|-|\lambda|^2-\frac{1}{|\lambda|^2}}{2} < \frac{|x^2-4|-|\lambda|-\frac{1}{|\lambda|}}{2}$$

$|y_0| \geq |x|$ のとき、すなわち $\cos\alpha \geq \frac{|x^2-4|-|\lambda|-\frac{1}{|\lambda|}}{2} > \frac{1}{2}$ のとき、
$\cos(\alpha + 2\theta)$ の値は、$\frac{\pi}{3} \leq |\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$ より

$$\frac{\pi}{3} < \cos(\alpha + 2\theta) < \frac{5}{3}\pi$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha + 2\theta) < \frac{1}{2}$$

よって $\cos(\alpha + 2\theta) < \frac{1}{2} \leq \frac{|x^2-4|-|\lambda|^2-\frac{1}{|\lambda|^2}}{2}$
すなわち $|y_1| < |x|$ となる
したがって、$|y_0| \geq |x|$ のとき $|y_1| < |x|$ となる

# 参考文献

[1] B.H.Bowditch, Markoff triples and quadi-Fucksian groups, Proc.London Math.Soc.77(1998), 697-736.

[2] S.P.K. Ng and S.P.Tan, ”The complement of the Bowditch space in the SL(2, $\mathbb{C}$) character variety”,Osaka Jornal of Math.44(2007), 247-254.