

結び目射影図の領域の不可避集合について

広島大学大学院理学研究科 清水理佳

概要

結び目射影図の既約度とは、結び目射影図がどれくらい既約であるかを表すものである。本稿では結び目射影図の領域の不可避集合を調べることによって既約度について考察する。

1 はじめに

本稿では結び目の射影図は S^2 上にあり、交点を 1 つ以上持ち、向きが与えられているものとする。必要に応じて、図 1 の P のように矢印によって結び目射影図の向きを表す。結び目射影図 P が図 2 のようであるとき P は

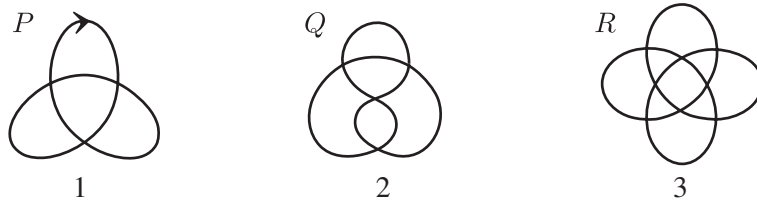


図 1 結び目射影図.

可約である、 p は可約な交点であるという。ただし T, T' は結び目射影図の一部である。可約でない結び目射影

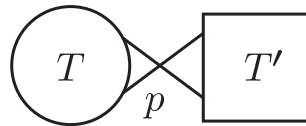


図 2 可約な結び目射影図.

図は既約であるという。例えば図 1 の結び目射影図はみな既約である。可約な交点はちょうど 3 つの領域に囲まれており、それ以外の交点はちょうど 4 つの領域に囲まれている。

半ひねりスプライス A とは図 3 左のような結び目射影図における局所変形である [6] ([2] も参照)。すなわち、逆向きの 2 本の弧を 1 つの交点を持つように置き換える変形のことである。半ひねりスプライスの逆変形 A^{-1}



図 3 半ひねりスプライス.

は図 3 右のような、成分数を変えないように交点の周りをつなぎかえる変形となる。 A および A^{-1} は結び目射影図の向きには依らない。任意の既約な結び目射影図を、1 回の A によって可約となるように変形できる (図 4)。一方、任意の既約な結び目射影図を A^{-1} を用いても有限回で可約にすることができる。 A^{-1} によって交点を 1 つずつ減らしていくとやがて 2 交点の可約な結び目射影図を得るからである。結び目射影図 P を可約にする

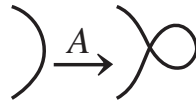


図 4 半ひねりスプライスによって可約にできる.

ために必要な A^{-1} の最小数を P の既約度といい, $r(P)$ と書く. 例えば図 1 の結び目射影図 P, Q, R の既約度はそれぞれ 1, 2, 3 である (図 5 に $r(Q) = 2$ である様子を示した). 定義から可約な結び目射影図の既約度は 0 である. 既約な結び目射影図においては既約度は交点数マイナス 2 以下であることがすぐにわかるが, さらに次

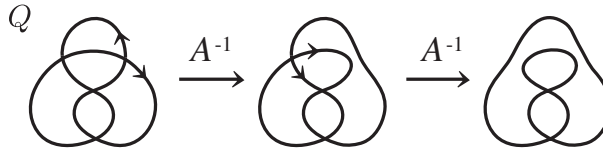


図 5 結び目射影図 Q の既約度は 2.

が成り立つ.

定理 1.1. 任意の結び目射影図の既約度は 4 以下である.

次の問題は未解決である.

問題 1.2. 任意の結び目射影図の既約度は 3 以下であるか?

すなわち既約度が 4 の結び目射影図は存在するのか? この問いを念頭に置き, 2 章では定理 1.1 を示し, 3 章で結び目射影図の不可避集合について考える.

2 定理 1.1 の証明

この章ではコード図を用いて既約度を考察し, 定理 1.1 を証明する. コード図とは, 結び目射影図 P を S^1 の S^2 へのはめ込みとみなしたときの逆像において, 同一の点となる 2 点をコードでつないだものである [5]. 結び

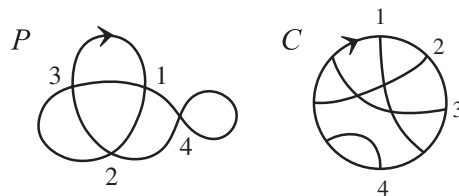


図 6 P のコード図 C .

目射影図が可約であることと, そのコード図が交点を持たないようなコードを持つことは同値である. 例えば図 6 において 4 番のコードは可約点に対応している. コード図における半ひねりスプライス A^{-1} は図 7 のようになる. すなわち A^{-1} をする交点に対応するコードに沿ってコード図を切り, 片方の半円を裏返してもとに戻す. 図 8 は, 図 6 のコード図 C において 2 番の番号がふられた交点における A^{-1} の様子を表している.

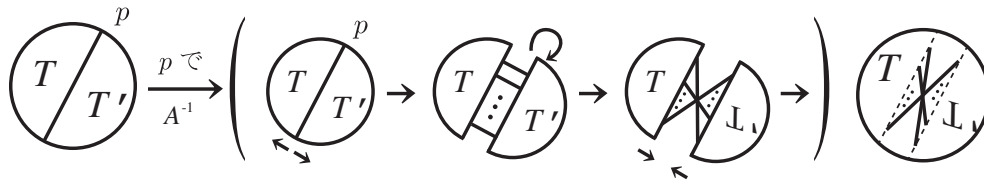


図7 コード図における A^{-1} .

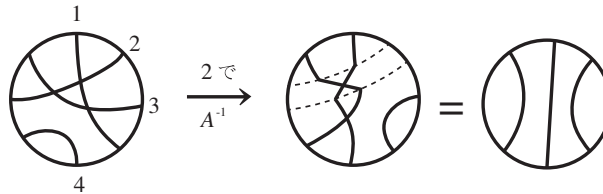


図8 コード図における A^{-1} の例.

結び目射影図が2辺形を持つとき、それは境界が一方の向きを持つ場合と一方でない(平行な)向きを持つ場合のどちらかである(図9左). コード図における2辺形はそれぞれ図9右のようになる. ここでコード図にお

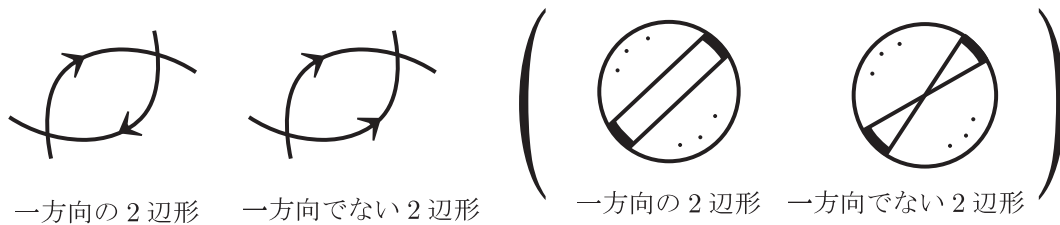


図9 2辺形.

ける太線はこの間にコードを持たないことを表す. 2辺形を持つ結び目射影図において次が成り立つ.

補題 2.1. 結び目射影図 P が一方方向でない2辺形を持つなら, $r(P) \leq 1$.

証明. 一方方向でない2辺形の1つの交点で A^{-1} をするともう一方が可約な交点になる. これをコード図で見ると図10のようになる. □

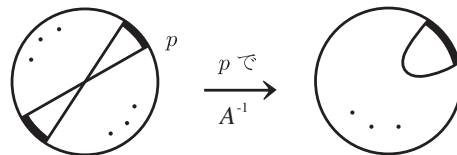


図10 一方方向でない2辺形.

補題 2.2. 結び目射影図 P が一方方向の2辺形を持つなら $r(P) \leq 2$.

証明. P が可約なら既約度は0. P が既約なら図11のコード図において p のようなコードが存在するから, p で A^{-1} すれば一方方向でない2辺形が出てくる. よって既約度は2以下である. □

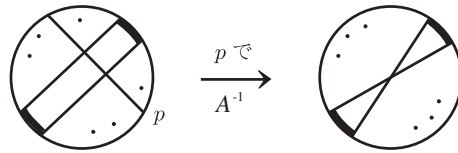


図 11 一方向の 2 辺形.

結び目射影図における 3 辺形は外側のつながり方によって図 12 の 4 つの型に分けられる. これらの 3 辺形はコード図において図 13 のように現れる. 次の補題が成り立つ.

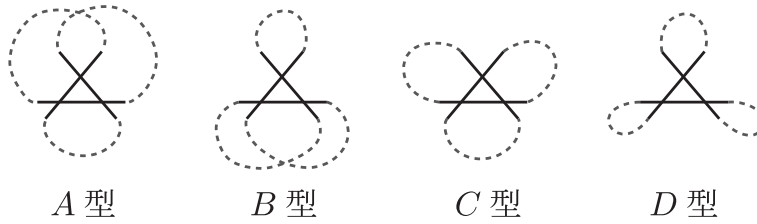


図 12 3 辺形.

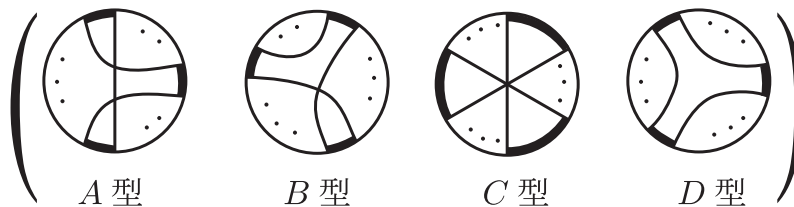


図 13 コード図における 3 辺形.

補題 2.3. 結び目射影図 P が A 型の 3 辺形を持つなら $r(P) \leq 2$.

証明. コード図において図 14 のように p で A^{-1} すれば一方向でない 2 辺形が現れる. □

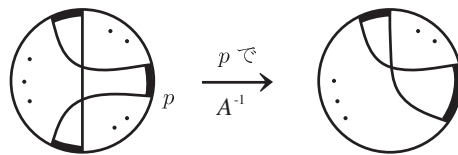


図 14 A 型 3 辺形.

補題 2.4. 結び目射影図 P が B 型の 3 辺形を持つなら $r(P) \leq 3$.

証明. コード図において p で図 15 のように A^{-1} を行えば一方向の 2 辺形が現れる.

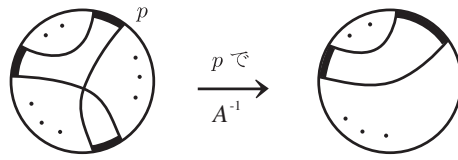


図 15 B 型 3 辺形.

□

補題 2.5. 結び目射影図 P が C 型の 3 辺形を持つなら $r(P) \leq 3$.

証明. 図 16 の C 型 3 辺形の外側の弧 l, m, n が全く互いに交わらない場合は, P は図 17 のような既約度が 1 以下の射影図となる (図の四角は射影図の部分を表す). P の外側の弧 l, m, n が互いに 1 つでも交点 p を持つな

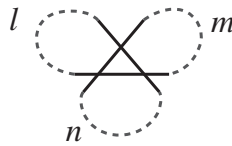


図 16 C 型 3 辺形の外側の弧.

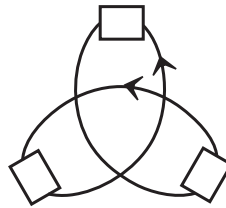


図 17 外側の弧同士が交わらない場合.

ら, 図 18 のように p で A^{-1} をすることによって A 型 3 辺形を持つようにできる.

□

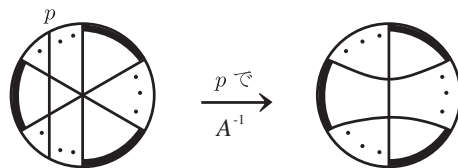


図 18 C 型の 3 辺形.

補題 2.6. 結び目射影図 P が D 型の 3 辺形を持つなら $r(P) \leq 4$.

証明. P が可約なら既約度は 0. P が既約ならコード図において p で図 19 のように A^{-1} を行えば B 型の 3 辺形を得る.

□

もうひとつ補題を紹介する.

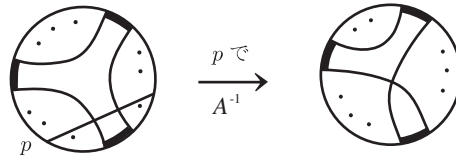


図 19 D 型 3 辺形.

補題 2.7 (Adams, 新庄, 田中 [1]). 任意の既約な結び目射影図は 2 辺形または 3 辺形を持つ.

この補題は球面のオイラー標数 $v - e + f = 2$ から

$$2C_2 + C_3 = 8 + C_5 + 2C_6 + 3C_7 + 4C_8 + \dots \quad (2.1)$$

(C_n は n 辺形の個数) という等式を得ることによって示されている. ここで定理 1.1 を証明する.

定理 1.1 の証明. 可約な結び目射影図は既約度 0 である. 既約な結び目射影図は 2 辺形または 3 辺形を必ず持つ (補題 2.7). P が一方向でない 2 辺形を持つなら $r(P) \leq 1$. P が一方向の 2 辺形または A 型の 3 辺形を持つなら $r(P) \leq 2$. P が B 型あるいは C 型の 3 辺形を持つなら $r(P) \leq 3$. D 型の 3 辺形を持つなら $r(P) \leq 4$. よって既約度は 4 以下である. \square

3 不可避集合

ここでは結び目射影図の領域またはタングルの不可避集合について考える. 結び目射影図のタングルとは結び目図式のタングルと同様に射影図の部分を表す. S を結び目射影図のタングルからなる集合とする. 任意の結び目射影図が S のうちの少なくとも 1 つのタングルを部分として持つとき, S は結び目射影図の領域 (またはタングルの) 不可避集合であるという. 例えば前章で見たように, 既約な結び目射影図は 2 辺形または 3 辺形を持つから, 図 20 の S_0 は既約な結び目射影図の不可避集合である. 放電法を用いて得られる不可避集合の例も紹介する.

例 3.1. 図 20 の S_1 は既約な結び目射影図の不可避集合である.

放電法を使う. まず, S_1 のうちのどれも持たない既約な結び目射影図 P が存在すると仮定する. この P の各領域に対して, n 辺形に $4 - n$ という電荷を与える. このとき, 電荷の総和は $2C_2 + C_3 - C_5 - 2C_6 - 3C_7 - 4C_8 - \dots$ ($C_2 = 0$) であり, 等式 2.1 から 8 となる. ここで 3 辺形領域で図 21 のような放電を行う. すなわち, 3 辺形に与えられている電荷 1 をその周りの 6 つの領域に $1/6$ ずつ移動させる. この放電によって電荷の総和は変わらないということ, また仮定から電荷の移動先に 3 辺形はないということにも注意. 放電後の各領域の電荷を考える. まず 3 辺形の電荷は 0 である. 4 辺形の電荷も, 仮定より 3 辺形から電荷を受け取ることはなく 0 のままである. 5 辺形について, 5 辺形の周りに 3 辺形が m 個あったとすると放電後の電荷は $-1 + 1/6 \times m$. $-1 + 1/6 \times m \geq 0$ とすると $m \geq 6$ となり 5 辺形の周りの 10 領域のうち 6 つ以上が 3 辺形ということになり, 3 辺形同士が S_1 にあるような配置になってしまう. よって $-1 + 1/6 \times m < 0$, すなわち電荷は負となる.

$$S_0 = \left\{ \text{Diagram 1}, \text{Diagram 2} \right\}$$

$$S_1 = \left\{ \text{Diagram 3}, \text{Diagram 4}, \text{Diagram 5}, \text{Diagram 6}, \text{Diagram 7} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \text{Diagram 8}, \text{Diagram 9}, \text{Diagram 10}, \text{Diagram 11} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \text{Diagram 12}, \text{Diagram 13}, \text{Diagram 14}, \text{Diagram 15} \right\}$$

図 20 不可避集合.

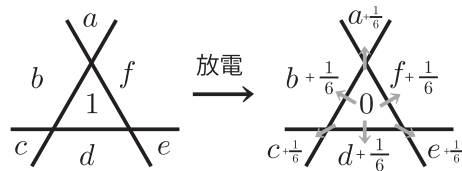


図 21 放電.

n 辺形 ($n \geq 6$) について, 放電後の電荷は $(4-n) + 1/6 \times m$ (m は周りの 3 辺形の数). $(4-n) + 1/6 \times m \geq 0$ とすると $m \geq 6n - 24$. $n \geq 6$ においては $6n - 24 \geq 2n$ であるから m は $2n$ 以上となり, n 辺形の周りの $2n$ 領域全てが 3 辺形ということになり仮定と矛盾する. よって電荷は負となる. 放電後の電荷の総和は負となり, 放電前の 8 と矛盾する. よって S_1 は既約な結び目射影図の不可避集合である.

同様に, 3 辺形の周りの辺を共有する 3 つの領域に電荷を $1/3$ ずつ移動する放電によって, また対角の関係にある 3 つの領域に $1/3$ ずつ移動することによって, 不可避集合 S_2 と S_3 を得る. (不可避集合および放電法について, 詳しくはグラフ理論の教科書 [3], [4] 等, 4 色問題の文献 [7] 等を参照.) 3 辺形を前章のように 4 つの型に分けるとどの型が必要となるのか. 次の問題も未解決である.

問題 3.2. 図 22 の集合 S_4 は既約な結び目射影図の不可避集合か? すなわち, 任意の既約な結び目射影図は 2 辺形, A 型, B 型または C 型の 3 辺形を必ず持つか?

$$S_4 = \left\{ \text{Diagram 16}, \text{Diagram 17 (A型)}, \text{Diagram 18 (B型)}, \text{Diagram 19 (C型)} \right\}$$

図 22 不可避集合?

この問題の答えが Yes なら, 問題 1.2 の答えも Yes である. 図 23 の集合 T_1, T_2 は既約な結び目射影図の不可避集合ではない. 図 24 のような反例が存在するからである. 図 24 の 3 辺形は全て一方向であることに注意.

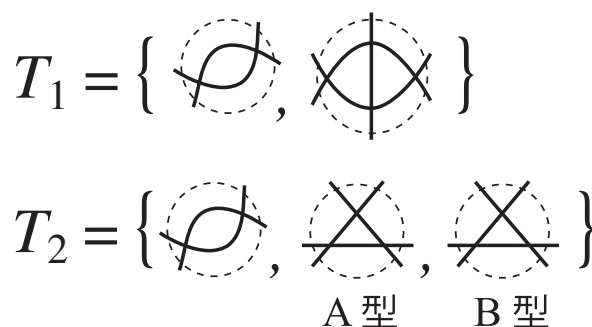


図 23 不可避集合でない.

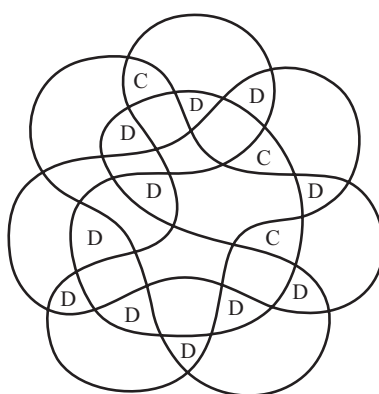


図 24 2 辺形, A 型 3B 型 3 辺形を持たない既約な結び目射影図.

謝辞

研究会「結び目の数学 V」での講演の機会を与えてくださった早稲田大学の谷山公規先生, 新庄玲子先生に心より感謝いたします. また本研究を進める中で助言をくださった安部哲哉先輩, 親身に相談に乗ってくださった鎌田聖一先生, 新庄玲子先生, 田中心先生を初め多くの方に感謝いたします.

参考文献

- [1] C. C. Adams, R. Shinjo and K. Tanaka, Complementary regions of knot and link diagrams, *Ann. Comb.* **15** (2011), 549–563.
- [2] J. A. Calvo, Knot enumeration through flypes and twisted splices, *J. Knot Theory Ramifications* **6** (1997), 785–798.
- [3] G. Chartrand, *Introductory graph theory*, Dover Publications (1984).
- [4] G. Chartrand and P. Zhang, *A first course in graph theory*, Dover Publications (2012).
- [5] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, Finite type invariants of classical and virtual knots, *Topology* **39** (2000), 1045–1068.
- [6] N. Ito and A. Shimizu, The half-twisted splice operation on reduced knot projections, to appear in *J. Knot Theory Ramifications* **21** (2012).
- [7] ロビン・ウィルソン著, 茂木健一郎翻訳, 4 色問題, 新潮社 (2004).