ツイスト結び目のデーン手術と左不変順序

袴田 綾斗（広島大学大学院教育学研究科）

要約

3 次元球面内の双曲型ツイスト結び目から係数 r のデーン手術で得られる 3 次元多様体に対して，もし $0 < r < 4$ ならば，その基本群が左不変順序を許容することを示す.

1 概説

研究のテーマ

今回参加させていただいた研究集会「結び目の数学 V」では本稿の題にもあるように，ある 3 次元多様体の基本群に対する左不変順序許容性について発表した．まずはその左不変順序とは何かについて定義する.

定義 1.1 群 G が左からの積に関して関係を保存するような狭義の全順序を許容するとき，G は *left orderable* であるという．研究集会ではこのことを簡単に「G は LO である」または「$G = \mathrm{LO}$」などと表しており，この報告集においても同様に表記することにする.

ここで，狭義の全順序とは任意の異なる $a, b \in G$ に対し $a < b$ または $b < a$ のいずれか一方が成立し，かつ

$$(1)\, a \not< a \quad (2)\, a < b, b < c \Longrightarrow a < c.$$

を満たすような関係のことである．また，左からの積に関して関係を保存するとは，任意の $a, b, g \in G$ に対し $a < b \Longrightarrow ga < gb$ が成り立つことである.

研究の動機

2011 年に Boyer, Gordon, Watson が次のような予想を発表した.

予想 1.1 (L 空間予想) 既約な有理ホモロジー球面 M に対して次が成り立つと期待される.

$$M \text{ が } L \text{ 空間である} \Longleftrightarrow \pi_1(M) \neq \mathrm{LO}$$

この予想における L 空間とは $\widehat{HF}(M)$ のランクが $|H_1(M;\mathbb{Z})|$ に等しい有理ホモロジー球面のことをいう．しかし，この L 空間は定義そのものが難しい概念であり，3 次元多様体の中で重要なグループをなしていることがわかっているにもかかわらず，定義以外の特徴付けが未だになされていない．もしこの L 空間予想が正しければ，より簡単な概念での代数的な特徴付け（言い換え）

ができるため，大きな価値のある予想だと考えられる．L 空間予想に関してその対偶命題を考えると，

$$M \text{ が } L \text{ 空間でない} \Longleftrightarrow \pi_1(M) = \mathrm{LO}$$

となり「L 空間でなく，かつ既約な有理ホモロジー球面 M に対して $\pi_1(M) = \mathrm{LO}$ である」ことを示せば，予想をサポートするエビデンスになるということがわかる．

これが研究の大きな方向性を決める動機となっているのであるが，対象となる「L 空間でなく，かつ既約な有理ホモロジー球面 M」について以下の事実（及び予想）が知られており，研究の大まかな方向性からより結び目やデーン手術に関する具体的な問題を得るための手掛かりになる．

- 任意の結び目に対し $r\,(\neq 0)$ 手術で得られる 3 次元多様体は有理ホモロジー球面である
- 双曲型結び目に対し r 手術で得られる 3 次元多様体は既約であることが期待される（ケーブル予想）
- L 空間をデーン手術で生むような結び目には強い制約がある（多くの結び目からのデーン手術では L 空間は生まれない）

これらの事実（及び予想）を踏まえると「L 空間でなく，かつ既約な有理ホモロジー球面 M」が双曲型結び目のデーン手術によって容易に作り出せるということがわかる．そして，この手術によって得られた 3 次元多様体の基本群が LO であることを示せば，上述のように予想をサポートになると考えられる．

先行研究

この問題に直接的に関連した研究を Boyer,Gordon,Watson が先行して行っている．

事実 1.1 (Boyer, Gordon, Watson, 2011) 8 の字結び目 K から r 手術によって得られる 3 次元多様体 $K(r)$ に対して

$$-4 < r < 4 \Longrightarrow \pi_1(K(r)) = \mathrm{LO}$$

が成り立つ．ここで，以下のことは既知である．

- 任意の結び目に対して $\pi_1(K(0)) = \mathrm{LO}$
- 双曲型 2 ブリッジ結び目のデーン手術からは既約な 3 次元多様体しか得られない．
- 8 の字結び目のデーン手術からは L 空間を得ることはできない．

この先行研究において，3 氏は「$-4 < r < 4$ のときに $\pi_1(K(r))$ から $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ への表現が存在することを示す」という手法により定理を証明している．この手法によって証明が可能であることの理由は，次の事実による．

事実 1.2
- $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})} = \mathrm{LO}$.
- LO な群の非自明な部分群は LO である．

- 既約な 3 次元多様体 M について，$\pi_1(M)$ から LO な群への全射準同型が存在すれば $\pi_1(M) = \mathrm{LO}$ が成り立つ．

これは LO であることを示したい群に対してそれを直接示すのではなく，LO であることがすでに分かっている群とのある種の関係性によって，対象となる群が LO であることを示すための道具として有用である．研究集会で発表した結果も，この手法を別の（より一般的な）結び目に適用することで得られた．

目標と成果

本稿での研究の目標は，前節で挙げた先行研究の手法を双曲型ツイスト結び目 K に適用し，$\pi_1(K(r)) = \mathrm{LO}$ となるような r の範囲を求めることである．そして，研究の成果として以下を得ることができた．

定理 1.1 双曲型ツイスト結び目 K から r 手術で得られる 3 次元多様体 $K(r)$ に対して

$$0 < r < 4 \Longrightarrow \pi_1(K(r)) = \mathrm{LO}$$

が成り立つ．

2 証明の概要

本節では定理 1.1 の証明の概要について述べていく．証明の骨子は先行研究の手法にもあったように，$\pi_1(K(r))$ から $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ への表現が存在することを示すという方法をとる．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(K(r)) \arrow[r] & \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \arrow[d] \\
\pi_1(S^3 - K) \arrow[u, two heads] \arrow[ur, "{}^{\exists}\widetilde{\rho_s}", "\widetilde{\rho_s}(x^p\mathcal{L}^q)=(0,0)"'] \arrow[r, "\rho_s", "\rho_s(x^p\mathcal{L}^q)=I"'] & SL_2(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

$\pi_1(K(r))$ から $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ への表現を得るために，図式にあるような，結び目群 $\pi_1(S^3 - K)$ から $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ への表現 $\widetilde{\rho_s}$ が存在することを示す．しかし，直接その存在を示すことは難しく，$\pi_1(S^3 - K)$ から $SL_2(\mathbb{R})$ への表現 ρ_s を一度経由して考察することで，目標となる表現の存在を示していく．

$SL_2(\mathbb{R})$ への表現

本稿では図 1 のようなツイスト結び目 K を扱う．図 1 において，$n > 0$ のときは右手系のツイストであり，$n < 0$ のときは左手系のツイストである．また，$n = 1$ のときは 8 の字結び目，

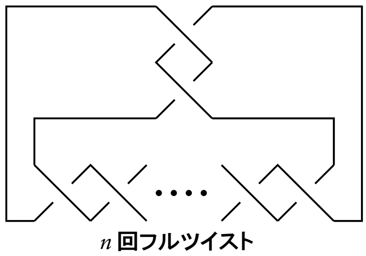

図 1　対象とするツイスト結び目

$n=-1$ のときはトレフォイルとなる．まず，結び目群 $G:=\pi_1(S^3-K)$ から $SL_2(\mathbb{R})$ への表現を考える．そのために G の群表示が必要となるが，ツイスト結び目の群表示はよく知られており，

$$G=\langle x,y \mid w^n x = y w^n\rangle, \quad w=xy^{-1}x^{-1}y$$

となる．ここで，x,y はメリディアンであり，ロンジチュード $\mathcal{L}$ は w の文字を逆に並べた $w_*=yx^{-1}y^{-1}x$ を用いて $\mathcal{L}=w_*^n w^n$ と表される．この群表示の生成元（メリディアン x,y）を $SL_2(\mathbb{R})$ の元に対応させることで表現を考える．実数 $s>0, t>1$ に対しそれぞれの対応を

$$\rho_s(x)=\begin{pmatrix}\sqrt{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t}}\end{pmatrix}, \quad \rho_s(y)=\begin{pmatrix}\frac{t-s-1}{\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}} & \frac{s}{\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2}-1 \\ -s & \frac{s+1-\frac{1}{t}}{\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}}\end{pmatrix}$$

と定める．このとき，$\rho_s: G\to SL_2(\mathbb{R})$ が表現を与えていることと関係式が保存されることは同値であり，さらにこの関係式の保存については，s,t がライリー多項式の根になっていることと同値である．したがって，ライリー多項式とその根について考察する必要がある．

ライリー多項式

ライリー多項式は表現に依存して変わるが，共役な表現においてそのライリー多項式は等しくなる．そこで，よりシンプルな表現で ρ_s と共役なものを用いることでライリー多項式 $\phi(s,t)$ は

$$\phi(s,t)=\frac{\lambda_+^{n+1}-\lambda_-^{n+1}}{\lambda_+-\lambda_-}-\left(t+\frac{1}{t}-1-s\right)\frac{\lambda_+^n-\lambda_-^n}{\lambda_+-\lambda_-}$$

で得られる．ここで，$\lambda_\pm$ は行列 $W=\rho_s(w)$ の固有値であり

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}(W)\pm\sqrt{\left(\mathrm{tr}(W)\right)^2-4}\right\}$$

と表される．s,t が $\phi(s,t)=0$ を満たせば ρ_s が（非可換）表現になるわけであるが，このライリー多項式の根について，次の結果が得られた．

定理 2.1 任意の $s>0$ に対して

$$s+2<t+\frac{1}{t}<s+2+\frac{4}{s} \quad \text{かつ} \quad \phi(s,t)=0$$

を満たす $t>1$ が存在する．

これによって G から $SL_2(\mathbb{R})$ への表現が存在することがわかった．ここからさらに $\pi_1(K(r))$ から $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ への表現の存在を証明していく．そのために，手術のスロープ $x^p\mathcal{L}^q$ について考えていく．

スロープ $\rho_s(x^p\mathcal{L}^q)$

$\pi_1(K(r))$ からの表現を得るためには, ρ_s によりスロープ $x^p\mathcal{L}^q$ が潰れる, すなわち $\rho_s(x^p\mathcal{L}^q) = I$ となるような ρ_s を与えればよい．$\rho_s(x^p\mathcal{L}^q)$ を求めるためには $\rho_s(\mathcal{L})$ がどのような形をしているか知る必要がある（$\rho_s(x)$ は ρ_s の定義からすでに対角行列であることが分かっている）が，これに関しては次のことが得られた.

定理 2.2 ロンジチュード $\mathcal{L}$ に対して，

$$\rho_s(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} \frac{t-s-1}{-1+(1+s)t} & 0 \\ 0 & \frac{-1+(1+s)t}{t-s-1} \end{pmatrix}$$

となる（この形は n によらない).

$\rho_s(\mathcal{L})$ も対角行列になることが分かったので，$\rho_s(x^p\mathcal{L}^q)$ が容易に計算できる．ここで，$\rho_s(x)$ の $(1,1)$ 成分を $A_s\ (=\sqrt{t})$，$\rho_s(\mathcal{L})$ の $(1,1)$ 成分を B_s とおくと，

$$\begin{aligned} \rho_s(x^p\mathcal{L}^q) = I &\iff {A_s}^p {B_s}^q = 1 \\ &\iff -\frac{\log B_s}{\log A_s} = \frac{p}{q} \end{aligned}$$

であるから，関数 $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$g(s) = -\frac{\log B_s}{\log A_s}$$

とおき，その値域を求めれば $\rho_s(x^p\mathcal{L}^q) = I$ となる $r = p/q$ の範囲がわかる．そこでこの関数 $g(s)$ の極限を計算すると，

$$\lim_{s\to+0} g(s) = 0, \quad \lim_{s\to\infty} g(s) = 4$$

となることが分かり，したがって，$g(s)$ の像は区間 $(0,4)$ を含むといえる（Mathematica による実験では (0,4) に一致しているようだが，その事実はここでは必要としない).

以上より，任意の $p/q \in (0,4)$ に対して $g(s) = p/q$ となる実数 $s > 0$ が存在すること，すなわち任意の $p/q \in (0,4)$ に対して $\rho_s(x^p\mathcal{L}^q) = I$ となる実数 $s > 0$ が存在することが示された．ここまでの議論により $\rho_s : G \to SL_2(\mathbb{R})$ で，スロープがつぶれるものが存在することが分かったが，これに対し，ρ_s のリフト $\widetilde{\rho_s} : G \to \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ が存在することは知られている（$H^2(M;\mathbb{Z}) = 0$ ゆえ).しかし，$\widetilde{\rho_s}(x^p\mathcal{L}^q) = (0,0)$（$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ の単位元）とは限らないことに注意が必要であり，証明を完了するためには $\widetilde{\rho_s}(x^p\mathcal{L}^q) = (0,0)$ を満たすリフトの存在を示す必要がある.

しかしこの問題については，もし $\widetilde{\rho_s}(x^p\mathcal{L}^q) = (0,0)$ とならない場合は,「適当なリフト $\widetilde{\rho'}$ が存在して，$\widetilde{\rho'}(x^p\mathcal{L}^q) = (0,0)$ となるようにすることができる」という事実により解決される．した

がって，$0 < r < 4$ のとき $\widetilde{\rho_s}(x^p\mathcal{L}^q) = (0,0)$ となるような表現 $\widetilde{\rho_s} : \pi_1(K(r)) \to \widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ が存在することが示され，定理 1.1 が得られる．

参考文献

[1] R. Hakamata and M. Teragaito, *Left-orderable fundamental group and Dehn surgery on the knot* 5_2 , preprint, `arXiv:1208.2087.`

[2] R. Hakamata and M. Teragaito, *Left-orderable fundamental group and Dehn surgery on twist knots* , preprint, `arXiv:1212.6305.`