正結び目の結び目解消数と自明化数について

諸井　克己
奈良教育大学大学院

概 要

結び目の自明化数 [4] という不変量が自明な準射影図 [3] を介して定義されている．この不変量と結び目の結び目解消数に対して, 10 交点までの正結び目の結び目解消数は自明化数の半分であると示されている．そして, その結果から, 「正結び目の結び目解消数は自明化数の半分である」という予想が挙げらている．この報告書では, まず, 結び目の自明化数と結び目解消数の 2 つの不変量を紹介する．そして, 先ほどの予想と, 予想について知られている結果を紹介し, 新たに, 11, 12 交点の正結び目に対して行った考察結果を紹介する．その後, 正結び目の決定に用いた定理などを紹介する．

1　定義

1.1　ダイアグラムと射影像

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内にある有向な結び目 [oriented knot]K を考える．

自然な射影 p とは, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; (x, y, z) \mapsto (x, y)$ である写像をいい, p が結び目 K の**射影 [projection]** であるとは, $p|_K$ の多重点が横断的な二重点のみのときをいう (図 1)．このとき, この像を**射影像**といい, P で表す．

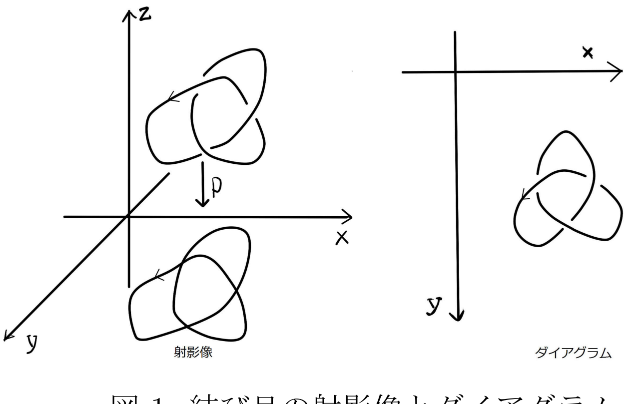

図 1: 結び目の射影像とダイアグラム

ダイアグラム [diagram]D とは, 射影像 P の各二重点に上下の情報を与えたもののことをいう．このとき, D **は** P **から得られる [D is obtained from P]** という．逆に, ダイアグラム D の交点の上下の情報をすべて二重点にした射影像 P は D **の射影像 [the projection of a diagram D]** であるという．また, ダイアグラム D は自

然に空間にある結び目 K を表していると見なせる. そのとき, K **は** D **で表される結び目** [K **is represented by** D] という. そして, 上下の情報の入った二重点を**交点** [**crossing**] と呼び, 上下の情報の入っていない二重点を**前交点** [**pre-crossing**] と呼ぶ. ダイアグラムは交点をもつが, 前交点をもたない.

1.2 結び目解消数と自明化数について

この章では, 結び目解消数と自明化数の関係を調べる前に, この 2 つの結び目の不変量を紹介する. 結び目解消数は, 以下のように定義されている.

$$u(D) := \min\{n | D \text{ のある } n \text{ 個の交点を交差交換すると自明な絡み目を表すダイアグラムになる}\},$$
$$u(K) := \min\{u(D) | D \text{ は } K \text{ のダイアグラム}\}.$$

そして, $u(D)(u(K))$ を**ダイアグラム** D**(結び目** K**) の結び目解消数** [**unknotting number of** $D(K)$] と呼ぶ.

次に, 自明化数の定義を紹介する. 自明化数は**準射影図** [**pseudo diagram**][3] と呼ばれる射影像の一部の前交点に上下の情報を入れたものを用いて定義されている. また, 射影像 P の一部の前交点に上下の情報を入れて得られる射影図 Q は P **から得られる準射影図** [Q **is obtained from** P] という. さらに, 準射影図 Q の全ての前交点に上下の情報を入れて得られるダイアグラム D は Q **から得られるダイアグラム** [D **is obtained from** Q] という. そして, Q から得られる全てのダイアグラムが自明な結び目を表しているダイアグラムであるとき, Q **は自明な準射影図** [**trivial pseudo diagram**] という. ここで, Q の交点数を $c(Q)$ で表す.

$$tr(P) := \min\{c(Q) | Q \text{ は } P \text{ から得られる自明な準射影図}\}.$$

そして, $tr(P)$ を P **の自明化数** [**trivializing number of** P] と呼ぶ.

このとき, 以下の定理が成り立っている.

定理 1 [3] *P を結び目の射影像とする. 自明化数 $tr(P)$ は部分コード図として図 2 のようなコード図を含まないようにするために排除する最小本数となっている. さらに, $tr(P)$ は偶数である.*

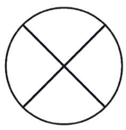

図 2: 排除するコード

また, ダイアグラム D と結び目 K に対しても自明化数が定義されている [4, 5].

$$tr(D) := \{tr(P) | P \text{ は } D \text{ の射影像}\}$$
$$tr(K) := \min\{tr(D) | D \text{ は } K \text{ のダイアグラム}\}.$$

このとき, $tr(D)$ $(tr(K))$ を**ダイアグラム** D**(結び目** K**) の自明化数** [**trivializing number of** $D(K)$] と呼ぶ. 図 3 は同じ結び目であっても, ダイアグラムを変えることにより, 自明化数が変わることを示している.

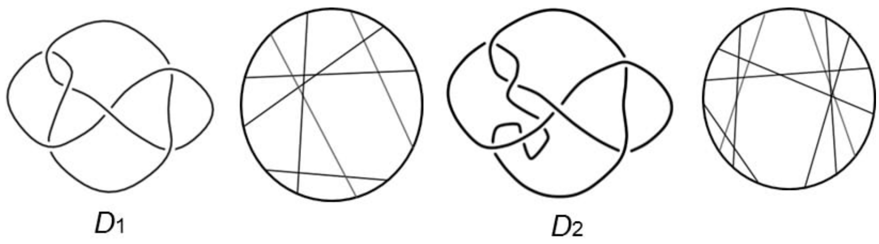

図 3: $tr(D_1) = 4, tr(D_2) = 6$

1.3　4 次元種数と結び目解消数

結び目の結び目解消数は下から評価する強い不変量があまり知られていない．よって, 一般に結び目の結び目解消数を求めるのは困難とされている．ここで, 次の命題が知られている．

命題 2 [14] K を結び目とする．そのとき, $u(K) \geqq g_4(K)$ が成り立つ．

一般に, 4 次元種数を求めるのは難しいが, 正ダイアグラムに対して, 以下の定理が成り立っている．

定理 3 [9, 13] D を正ダイアグラムとする．K を D で表される結び目とし $O(D)$ を D のザイフェルト円周の個数とする．また, $g_4(K), g(K)$ をそれぞれ, 結び目の 4 次元種数, 結び目の種数とすると, $2g_4(K) = 2g(K) = c(D) - O(D) + 1$ が成り立つ．

この定理によって, 正結び目の 4 次元種数は容易に求めれる．しかし, 一部の正結び目の結び目解消数を求めることは容易ではない．

2　正結び目の自明化数と結び目解消数

この章では, 結び目の自明化数と結び目解消数の間にはどのような関係があるのかを見ていく．

この 2 つの不変量の間には次の命題が成り立っている．

命題 4 [4, 5] P を射影像, D を P から得られるダイアグラムとし, K を D で表される結び目とする．そのとき, $u(K) \leqq \dfrac{tr(K)}{2}$ が成り立つ．

命題 4 の等号が成立する十分条件について次の命題が分かっている．また, 正結び目ではなくても, $u(K) = \dfrac{tr(K)}{2}$ が成り立つ結び目は存在する．

命題 5 [4] K を $c(K) \leqq 10$ を満たす正結び目とする．そのとき, $u(K) = \dfrac{tr(K)}{2}$ が成り立つ．さらに, $tr(K)$ は正ダイアグラムで実現される．

命題 5 から次の予想がある．

予想 1 [4] K を正結び目とする．そのとき, $u(K) = \dfrac{tr(K)}{2}$ が成り立つ．さらに, K の正ダイアグラム D において, $tr(D) = tr(K)$ が成り立つ．

また, 予想 1 は問題 1 と関連がある.

問題 1 [16] 全ての正結び目の結び目解消数は正ダイアグラムで実現するか？

もし, 予想 1 が解決されたならば, 問題 1 も解決されたことになる. なぜならば, $tr(K) = 2u(K)$ は正結び目の自明化数を実現するダイアグラムで結び目解消数が実現されることを意味している. さらに, $tr(D) = tr(K)$ で, そのときのダイアグラムは正ダイアグラムであると言っているからである. また, 予想 1 の部分的な解答として次の定理が分かっている.

定理 6 [4] K を正組紐結び目とする. そのとき, $u(K) = \dfrac{tr(K)}{2}$ が成り立つ. さらに, K の正組紐ダイアグラム D において, $tr(D) = tr(K)$ が成り立つ.

この研究では, 命題 5 の拡張として, 最小交点数が 11 交点の正結び目について予想 1 が成り立つかを考察した. 方法として, まず, 11 交点の正結び目を決定した (次章で示す). また, 命題 2, 命題 4, 定理 3 より, 補題 7 が成り立つことが分かる.

補題 7 P を射影像, D を P から得られる正ダイアグラム, K を D で表される正結び目とする. そのとき, $\dfrac{tr(P)}{2} \geqq \dfrac{tr(K)}{2} \geqq u(K) \geqq g_4(K) = g(K)$ が成り立つ.

補題 7 より, $\dfrac{tr(P)}{2} = g(K)$ を証明すれば, $\dfrac{tr(K)}{2} = u(K)$, $tr(D) = tr(K)$ が証明されることが分かる.

さらに, 補題 7 から次の命題が成り立つことが分かる.

命題 8 P を $tr(P) = n$ を満たす射影像, D を P から得られる正ダイアグラム, K を D で表されて $g(K) = \dfrac{n}{2}$ を満たす正結び目とする. そのとき, $\dfrac{tr(K)}{2} = u(K)$, $tr(D) = tr(K)$ が成り立つ.

$tr(P) = 2, 4$ に対して, 次の命題を示した. また, $tr(K) = 0$ である結び目は自明な結び目であることが分かっている.

命題 9 P を $tr(P) = 2, 4$ を満たす射影像, D を P から得られる正ダイアグラム, K を D で表される正結び目とする. そのとき, $\dfrac{tr(P)}{2} = u(K)$, $tr(D) = tr(K)$ が成り立つ.

ここまでで, 10 交点までの正結び目と, 上記の仮定のもとで自明化数が $tr(P) = 2, 4$ または $tr(P) = 2g(K)$ である結び目 K に対して, 予想 1 が成り立つことが分かった. すると, 11 交点の正結び目に対しては, $tr(P) = 6, 8$ となる射影像 P から得られるダイアグラムで表される正結び目だけを考察すればいいことになる (正結び目の自明化数と結び目解消数と 4 次元種数の一覧参考). しかし, 結び目の結び目解消数を決定できていない結び目もあるため, ダイアグラムの結び目解消数について考察を行った.

命題 10 P を射影像, D を P から得られるダイアグラムとする. このとき, $\dfrac{tr(P)}{2} \geqq u(D)$ が成り立つ.

また, $tr(P)=2g(K)$ のときは命題 8 より予想 1 が成り立つ. よって, $tr(P)>2g(K)$ だけを考察した. つまり, 以下の問題について考えた.

問題 2 P を $tr(P)=6,8$ を満たす $p(P)=11$ となる射影像, D を P から得られる正ダイアグラムとする. さらに, K を D で表されて $tr(P)>2g(K)$ となる正結び目とする. このとき, $\dfrac{tr(P)}{2}=u(D)$ となるか？ここで, $p(P)$ は前交点の個数である.

問題 2 は, ダイアグラムの交点を虱潰しに交差交換し, 調べ, $\dfrac{tr(P)}{2}=u(D)$ であることを示した. 12 交点の結び目についても同様に示す予定である.

3 正結び目の性質と決定

11, 12 交点の正結び目の決定方法として, 次の定理を用いた. また, 結び目の不変量の値については Knot info[7] を参考にしている.

定理 11 [2] 正結び目は正コンウェイ多項式を持つ.

定理 12 [12] 自明でない正結び目の符号 $\sigma(K)$ は負である.

定理 13 [11] K を結び目, D を K のダイアグラムそして, $V_K(t)$ を K のジョーンズ多項式とする. そのとき,

$$\min degV_K(t) \geqq -c_-(D)-\frac{1}{2}\sigma(K)$$

が成り立つ. また, $c_-(D)$ は D の負の交点数である.

さらに, 正交代結び目については以下の定理が分かっている.

定理 14 [8] 正交代結び目の非本質的な交代ダイアグラムは, 正ダイアグラムである.

そして, 定理 3 より, 正結び目は結び目の種数と 4 次元種数が一致することが分かっている. また, 11_{550} は Stoimenow[15] によってダイアグラムの交点を増やすことにより正ダイアグラムを持つことが明らかにされた. この結び目に対しても命題 15 により予想 1 が成り立つことが分かっている.

命題 15 [4] 11_{550} は最小交点ダイアグラムで自明化数を実現せず, 12 交点の正ダイアグラムで自明化数を実現する.

定理 3, 定理 11, 定理 12, 定理 13, 定理 14, Stoimenow[15] から, 11 交点の結び目の正結び目の決定ができた.

さらに, 12 交点の正結び目に対しても決定を試みたが, 定理 3, 定理 11, 定理 12, 定理 13, 定理 14 だけでは 12 交点の結び目では 12_{1436}, 12_{1564}, 12_{1581}, 12_{1609}, 12_{1617}, 12_{1654}, 12_{1720},12_{1816}, 12_{1926}, 12_{1930}, 12_{1948}, 12_{2038}, 12_{2118} が正結び目ではないと言えなかった. しかし, 他の方法によっていくつか解決できたので紹介する. まず, 12_{1581}, 12_{1609}, 12_{1720}, 12_{1930} は種数が 2 であることが分かっている. 種数が 2 の正結び目には次の性質がある.

定理 16 [6] 種数が 2 の正結び目は擬交代的である.

結び目が擬交代的である説明については [6] を参考. また, 結び目が擬交代的であるための条件として次の定理が分かっている.

定理 17 [10] 結び目が擬交代的のとき, コバノフホモロジーの幅は 2 である.

コバノフホモロジーの計算結果より, 12_{1581}, 12_{1609}, 12_{1720}, 12_{1930} のコバノフホモロジーの幅が 3 であることが分かる. よって, 定理 16, 定理 17 より, 12_{1581}, 12_{1609}, 12_{1720}, 12_{1930} は正結び目ではないことが分かる.

また, 12_{1926} についても解決できた. 図 4 の (b) より, 12_{1926} は正結び目であるこ

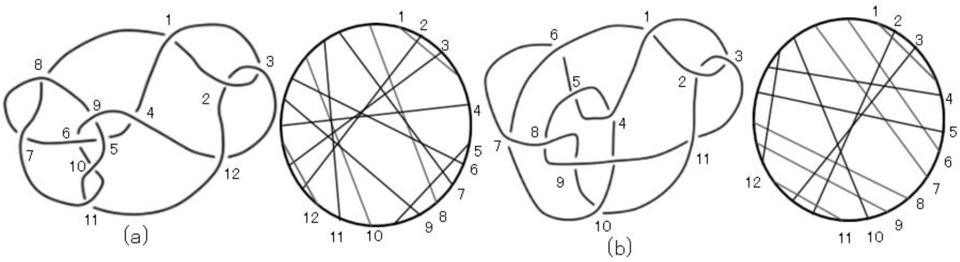

図 4: 12_{1926} の 2 つダイアグラム

とが分かる. さらに, 同じ結び目の最小交点ダイアグラムであっても, 自明化数が異なっていることと, 正ダイアグラムで自明化数を実現していることが分かる. 図 4 の (a) のダイアグラムを D_1, (b) のダイアグラムを D_2 とすると, $tr(D_1) = 8$, 右図は $tr(D_2) = 6$ である. また, 似たような結び目として, ペルコ対と呼ばれる結び目がある [4].

最後に, 正結び目の自明化数 $tr(K)$ と結び目の解消数 $u(K)$ と 4 次元種数 $g_4(K)$ の一覧を Knot info[7] を参考に載せる (正結び目でないと判断できなかった結び目の番号の後ろに?をつけて記載している. また, 11_{292} については 11_{292} の正ダイアグラム D を調べると $u(D) = 3$ であり, 11_{292} の結び目解消数が 2 であるダイアグラムが見つからなかったため, 結び目の結び目解消数の欄は 2?と記載している).

正結び目	$u(K)$	$tr(K)$	$g_4(K)$	正結び目	$u(K)$	$tr(K)$	$g_4(K)$
11_{43}	3	6	3	11_{335}	3	6	3
11_{94}	3	6	3	11_{336}	3, 4	6, 8	3
11_{95}	2	4	2	11_{337}	2, 3	4, 6	2
11_{123}	3	6	2	11_{338}	4	8	4
11_{124}	3	6	3	11_{339}	3	6	3
11_{186}	3	6	3	11_{340}	3, 4	6, 8	3
11_{191}	3	6	3	11_{341}	2, 3	4, 6	2
11_{192}	2, 3	4, 6	2	11_{342}	2	4	2
11_{200}	2	4	2	11_{343}	2	4	1
11_{227}	3	6	3	11_{353}	3, 4	6, 8	3

11_{234}	4	8	4	11_{354}	2, 3, 4	4, 6, 8	2
11_{235}	3	6	3	11_{355}	4	8	4
11_{236}	3	6	3	11_{356}	3, 4	6, 8	3
11_{237}	2, 3	4, 6	2	11_{357}	3, 4	6, 8	3
11_{238}	2	4	2	11_{358}	3	6	3
11_{240}	4	8	4	11_{359}	2, 3	4, 6	2
11_{241}	3	6	3	11_{360}	2, 3	4, 6	2
11_{242}	3	6	3	11_{361}	2, 3, 4	4, 6, 8	2
11_{243}	2	4	2	11_{362}	2, 3	4, 6	1
11_{244}	3	6	3	11_{363}	2, 3	4, 6	1
11_{245}	3	6	3	11_{364}	4	8	4
11_{246}	2	4	2	11_{365}	3, 4	6, 8	3
11_{247}	1	2	1	11_{366}	2, 3, 4	4, 6, 8	2
11_{263}	4	8	4	11_{367}	5	10	5
11_{291}	3, 4	6, 8	3	11_{444}	4	8	4
11_{292}	2?	4, 6	2	11_{460}	3	6	3
11_{298}	3, 4	6, 8	3	11_{493}	3	6	3
11_{299}	2, 3	4, 6	2	11_{503}	3	6	3
11_{318}	3	6	3	11_{536}	3, 4	6, 8	3
11_{319}	3, 4	6, 8	3	11_{538}	2, 3	4, 6	2
11_{320}	2, 3	4, 6	2	11_{547}	3, 4	6, 8	3
11_{329}	2, 3	4, 6	2	11_{548}	2, 3	4, 6	2
11_{334}	4	8	4	11_{550}	3	6	3

正結び目	$u(K)$	$tr(K)$	$g_4(K)$	正結び目	$u(K)$	$tr(K)$	$g_4(K)$
12_{43}	3	6	3	12_{1398}	3	6	3
12_{52}	4	8	4	12_{1421}	3	6	3
12_{53}	3	6	3	12_{1424}	4	8	4
12_{55}	3	6	3	12_{1436}?	3	6, 8	3
12_{56}	3	6	2	12_{1441}	4	8	3
12_{82}	3	6	3	12_{1454}	4	8	4
12_{93}	4	8	4	12_{1457}	3, 4	6, 8	3
12_{94}	3, 4	8	3	12_{1465}	3	6	3
12_{96}	3	6	3	12_{1475}	4	8	4
12_{97}	2, 3	4, 6	2	12_{1491}	3, 4	6, 8	3
12_{102}	3, 4	6, 8	3	12_{1505}	4	8	3
12_{107}	3, 4	6, 8	3	12_{1530}	5	10	5
12_{143}	4	8	4	12_{1531}	4	8	4
12_{144}	3, 4	6, 8	3	12_{1532}	4	8	4
12_{145}	3, 4	6, 8	3	12_{1533}	3, 4	6, 8	3

12_{152}	2, 3	4, 6	2	12_{1539}	3	6	3
12_{156}	2, 3, 4	4, 6, 8	2	12_{1547}	3, 4	6, 8	3
12_{276}	4	8	4	12_{1564}?	3	6, 8	3
12_{277}	3	6	3	12_{1577}	3	6	3
12_{293}	3	6	3	12_{1580}	4	8	4
12_{295}	3	6	3	12_{1593}	4	8	4
12_{319}	3, 4	6, 8	3	12_{1596}	3	6	3
12_{320}	2, 3	4, 6	2	12_{1616}	3	6	3
12_{344}	3	6	3	12_{1617}?	3	6	3
12_{345}	2	4	2	12_{1626}	4	8	4
12_{355}	3	6	3	12_{1629}	3	6	3
12_{356}	2	4	2	12_{1654}?	3	6, 8	3
12_{367}	4	8	4	12_{1662}	4	8	4
12_{368}	3, 4	6, 8	3	12_{1674}	4	8	4
12_{391}	3, 4	6, 8	3	12_{1694}	3, 4	6, 8	3
12_{392}	2, 3, 4	4, 6, 8	2	12_{1705}	4	8	4
12_{420}	3	6	3	12_{1714}	4	8	4
12_{421}	2, 3	4, 6	2	12_{1741}	3, 4	6, 8	3
12_{431}	3, 4	6, 8	3	12_{1760}	5	10	5
12_{432}	3	6	3	12_{1761}	4	8	4
12_{442}	3	6	3	12_{1762}	4	8	4
12_{443}	2, 3	4, 6	2	12_{1765}	3, 4	6, 8	3
12_{490}	3	6	3	12_{1790}	4	8	4
12_{574}	4	8	4	12_{1791}	3	6	3
12_{575}	3	6	3	12_{1806}	4	8	4
12_{586}	3, 4	6, 8	3	12_{1816}?	3	6	3
12_{610}	2, 3	4, 6	2	12_{1862}	5	10	5
12_{615}	3	6	3	12_{1863}	4	8	4
12_{647}	4	8	4	12_{1864}	4	8	4
12_{648}	3	6	3	12_{1869}	3	6	3
12_{653}	2, 3	4, 6	2	12_{1873}	3	6	3
12_{659}	3, 4	6, 8	3	12_{1879}	4	8	4
12_{679}	2	4	2	12_{1882}	3	6	3
12_{811}	4	8	4	12_{1888}	3, 4	6, 8	3
12_{813}	4	8	4	12_{1926}	3	6	3
12_{814}	3, 4	6, 8	3	12_{1928}	4	8	4
12_{817}	4	8	4	12_{1932}	3	6	3
12_{828}	3, 4	6, 8	3	12_{1935}	4	8	4
12_{876}	4	8	4	12_{1943}	3	6	3
12_{877}	3, 4	6, 8	3	12_{1948}?	3	6	3

12_{900}	3, 4	6, 8	3	12_{1967}	5	10	5
12_{973}	3, 4	6, 8	3	12_{1968}	4	8	4
12_{974}	2, 3	4, 6	2	12_{1976}	5	10	5
12_{995}	3, 4	6, 8	3	12_{1977}	4	8	4
12_{996}	2, 3	4, 6	2	12_{1979}	4	8	4
12_{1004}	3, 4	6, 8	3	12_{1980}	4	8	4
12_{1035}	3, 4	6, 8	3	12_{1982}	4	8	4
12_{1037}	2, 3, 4	4, 6, 8	2	12_{2013}	5	10	5
12_{1097}	2, 3, 4	4, 6, 8	2	12_{2038}?	3	6, 8, 10	3
12_{1112}	3, 4	6, 8	3	12_{2013}	5	10	5
12_{1113}	2, 3, 4	4, 6, 8	2	12_{2046}	3, 4	6, 8	3
12_{1362}	4	8	4	12_{2052}	3, 4	6, 8	3
12_{1365}	3	6	3	12_{2094}	3, 4	6, 8	3
12_{1376}	3	6	3	12_{2118}?	3	6, 8, 10	3
12_{1379}	4	8	4	12_{2138}	4	8	4
12_{1384}	3	6	3	12_{2139}	3, 4	6, 8	3
12_{1388}	3, 4	6, 8	3	12_{2169}	2, 3	4, 6	2
12_{1393}	4	8	4	12_{2176}	5	10	5

4 謝辞

この度, 講演の機会をいただき, 谷山公規先生, 新庄玲子先生, そして, 関係者の方々には感謝致します. この研究を行うにあたって, 花木良先生, 安部哲哉先生には忙しい中, ご教授いただき感謝致します. 安部哲哉先生には, 定理 16, 定理 17 を教えていただきました. また, 講演では正結び目でないと判定できない結び目が 12_{2038} と 12_{2118} の 2 つだけであると発表したしましたが, こちらの誤りで, 定理 3, 定理 11, 定理 12, 定理 13, 定理 14 の条件だけでは, 新たに, 12_{1436}, 12_{1564}, 12_{1617}, 12_{1654}, 12_{1720}, 12_{1816}, 12_{1930}, 12_{1948} が見つかり, 定理 16 を使いましても, 12_{1436}, 12_{1564}, 12_{1617}, 12_{1654},12_{1816}, 12_{1948} が残ってしまいました. よって, 計 8 個の結び目が正結び目でないと判定できておりません. 確認が不十分だったことを深くお詫び申します. 確認が不十分ではないかとご指摘してくださった東京工業大学の田神慶士氏も, ご指摘いただき感謝致します.

参考文献

[1] J.C.Cha and C.Livingston, *Knotinfo: Table of Knot Invariants, http://www.indiana.edu/ knotinfo/*, today's date(eg. January 16, 2013).

[2] T.D.Cochran and R.E. Gompf, *Applications of Donaldson'stheorems to classical knot concordance, homology 3-spheres*, aTopology. 27 (1988), 495-512.

[3] P.R.Cromwell, *Homogeneous link*, J. London. Math. soc. 39 (1989), 535-552.

[4] R.Hanaki, *Pseudo diagrams of knots, links and spatial graphs*, Osaka J. Math. 47 (2010), 863-883.

[5] R.Hanaki, *Trivialializing number of knots*, J. Math. Soc. Japan, to appeer.

[6] A.Henrich, N.Macnaugton, S.Narayan, O.Pechenik and J.Townsend, *Classical and virtual pseudodiagram theory and new bounds on unknotting numbers and genus*, J. Knot Theory Ramifications. 20 (2011), 625-650.

[7] I. D.Jong and K.Kishimoto, *On positive knots of genus two*, Kobe J. Math. to appear.

[8] T.Nakamura, *Positive Alternating Links Are Positively Alternating*, J. Knot Theory Ramifications. 9 (2000), 107-112.

[9] T.Nakamura, *Four-genus and unknotting number of positive knots and links*, Osaka J.Math. 37 (2000), 441-451.

[10] C. Manolescu, P. Ozsvath, *On the Khovanov and knot Floer homologies of quasi-alternating links*, (English summary) Proceedings of Gokova Geometry-Topology Conference (2007), 60-81, Gokova Geometry/Topology Conference (GGT), Gokova, (2008).

[11] K.Murasugi, *On a certain numerical invariant of link type*, Trans Amer. Math Soc. 314 (1989), 1-49.

[12] J.H.Przytycki, *Positive knots have negative signature*, Bull.Polish Acad. Sci. Math. 37 (1989), 559-562.

[13] J.Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, Invent, Math. 182 (2010), 419-447.

[14] T.Shibuya, *Some relations among various numerical invariants for links*, Osaka J. Math. 11 (1974), 313-322.

[15] A.Stoimenow, *On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton-Williams-Franks*, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 3927-3954.

[16] A.Stoimenow, *Positive knots, closed braids and the Jones polynomial*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 2 (2003), 237-285.

[17] P.Traczyk, *Nontrivial negative links have positive signature*, Manuscripta Math. 61(1988), 279-284.