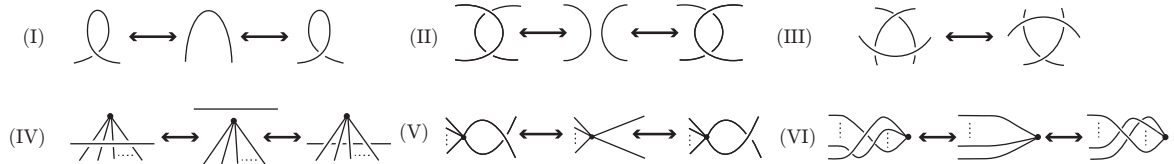


# 4 価の頂点を 1 つ持つ連結な空間グラフの 固定頂点イソトピー型について

大山口菜都美 (お茶の水女子大学人間文化創成科学研究科博士 2 年)

## 1 はじめに

本報告では, 4 価頂点を 1 つ持つ連結で素な空間固定頂点グラフの分類を行う方法を考え, 6 交点以下までの分類表を紹介する. 空間グラフとは, 抽象グラフつまり 1 次元胞体複体を  $S^3$  内に実現したものである. ここでは有限グラフのみを考え, 0 価・1 価の頂点は持たないものとする. 空間グラフに対しては, アンビエントイソトピーの他にも, 頂点の近傍が 2 次元 disk 上に固定されていると考え, その disk を含めた全体のアンビエントイソトピーを考える固定頂点イソトピーという同値関係が知られている. アンビエントイソトピックな空間グラフの正則図は, 図 1 の Reidemeister 変形 (I)~(V) で移り合い, また, 固定頂点イソトピックである空間固定頂点グラフの正則図は, 図 1 の Reidemeister 変形 (I)~(IV), (VI) で移り合う. [1, 2]



3 価頂点については Reidemeister 変形 (V) を固定頂点イソトピーで実現できるため, アンビエントイソトピーと固定頂点イソトピーには差がない. 3 価頂点を持つ空間グラフに対しては, 森内博正氏が  $\theta$ -curve と handcuff graph の分類を行なっている.[4, 6] そこで, アンビエントイソトピーと固定頂点イソトピーに初めて差がでる 4 価頂点を持つ空間グラフを考える.

## 2 4 価頂点を 1 つ持つグラフ

4 価頂点を 1 つだけ持つ連結なグラフとは, 1 つの頂点から 2 本のループがでてくる 2-bouquet graph であるが, 固定頂点グラフとしては 2 つの型がある. 下図のような K 型と L 型である.



以下，これらのグラフを  $S^3$  に埋め込んだものを固定頂点 2-bouquet graph と呼ぶことにし，次に固定頂点 2-bouquet graph の素を定義する．

定義 1 固定頂点 2-bouquet graph  $G$  に対して， $G$  と 2 点で交わる任意の球面  $S^2$  の内部と外部の少なくとも一方が必ず自明弧になっているとき， $G$  は素であるという．



素でない固定頂点 2-bouquet graph

これから，上記の定義による素な固定頂点 2-bouquet graph を数え上げることを考える．

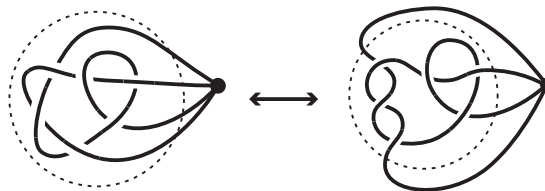
この“素”の定義は，対象とする空間グラフの頂点が 1 つだけであることから，構成方法として使った“タングルの素”の定義に関連づけるために採用したものである．4 価頂点を 2 つ以上持つような空間固定頂点グラフを考えるときは，そのグラフと 4 点で交わるような球面  $S^2$  についての条件を増やし，素の定義を改める必要がある．

### 3 構成方法

ここではタングルから任意の固定頂点 2-bouquet graph を構成することを考える．タングルとは，3 次元球体  $B^3$  と  $B^3$  内に proper に埋め込まれた 2 本の弧  $t_1, t_2$  の組  $(B^3, t_1 \cup t_2)$  のことで，次でタングルの素を定義する．

定義 2 タングル  $(B^3, t_1 \cup t_2)$  内の 2 本の弧  $t_1, t_2$  と 2 点で交わるような任意の球面  $S^2$  に対し， $S^2$  内の弧が必ず自明弧になるとき，タングル  $(B^3, t_1 \cup t_2)$  は素であるという．

任意の素な固定頂点 2-bouquet graph は，素なタングルから下図のようにして構成することができる．



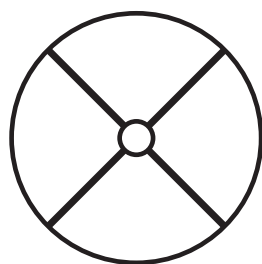
また，素なタングルから構成した固定頂点 2-bouquet graph は素なものになっていて， $n$  交点の正則図を持つ素な固定頂点 2-bouquet graph は， $n$  交点の正則図を持つ素なタングルから得られることがわかる．よって，固定頂点 2-bouquet graph の数え上げは素なタングルの数え上げに帰着される．

そこで、任意の素なタングルを得ることを考え、2001年に山野博史氏が示した以下の補題を引用する.[3]

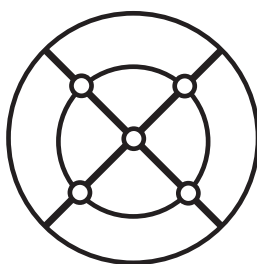
補題 1 素なタングルの正則図は、基本的かつ素な 4-正則円板グラフの各頂点に代数タングルをあてはめたものとみなせる。

一方、森内氏は [5] で、7 交点以下の代数タングルの分類表を与えている。よって、[3] で山野氏が得た 4-正則円板グラフに森内氏の分類した代数タングルを代入することで任意の素なタングルを得ることができる。今回は 6 交点以下の固定頂点 2-bouquet graph を数え上げたいため、6 交点以下の素なタングルが必要であり、そのために 6 頂点までの基本的かつ素な 4-正則円板グラフと 6 交点以下の代数タングルを用いる。

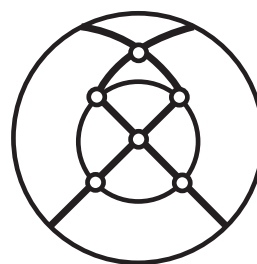
6 頂点までの基本的かつ素な 4-正則円板グラフは、以下の 3 種類である.[3]



$P_1$



$P_5$



$P_6$

これらの 4-正則円板グラフに、分類表 [5] における 6 交点以下の代数タングルを代入することを考える。代入した上で全体の交点数が 6 以下になるのは、次のような場合である。

$P_1$  → ① 6 交点以下の代数タングルそのもの

$P_5$  → ② 5 頂点全てに 1 交点代数タングルを代入  
③ 4 頂点に 1 交点代数タングル, 1 頂点に 2 交点代数タングルを代入

$P_6$  → ④ 6 頂点全てに 1 交点代数タングルを代入

このように各 4-正則円板グラフの頂点に代数タングルを代入したすべての場合を考えて得られたタングルに対して、タングルの分子・分母・ダブルを調べることにより、分類表 [5] で 6 交点までに現れないタングルは図 2 のタングルのみであることがわかる。(このタングルも森内氏により、8 交点であれば代数タングルの形式で図 3 のように表せることがわかっている。)

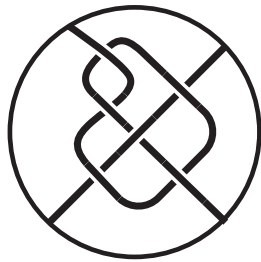


図 2

$\approx$

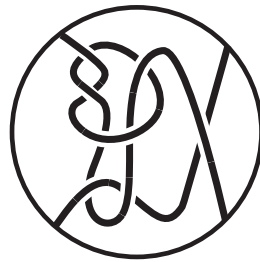


図 3

$((\bar{3}, 2), 2) \bar{1}$

山野氏の補題より，基本的かつ素な 4-正則円板グラフの各頂点に代数タングルを代入することで，すべての素なタングルを得ることができた．よって，上記で得られたすべての素なタングルに 4 価頂点を 1 つつなくことにより得られるもので，候補となる固定頂点 2-bouquet graph は全て尽くされている．

次に，これらが異なる空間固定頂点グラフであるかを判定するために，すべての正則図に対して山田多項式を計算する．

山田多項式  $R(g)(A) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  は空間グラフの正則図  $g$  に対して，次の (1)-(5) の性質を満たすものとして，帰納的に定義される．

- (1)  $R(\bigcirc) = A + 1 + A^{-1}$
- (2)  $R(\bigtimes) = AR(\bigcup) + A^{-1}R(\bigcap) + R(\bigcross)$
- (3)  $R(\bigtriangleright_e \bigtriangleleft) = R(\bigtriangleright \bigtriangleleft) + R(\bigtriangleright \bigtriangleleft \bigtimes)$  ( $e$  はループでないとする)
- (4) 正則図が非交和  $g_1 \sqcup g_2$  になっているとき  $R(g_1 \sqcup g_2) = R(g_1)R(g_2)$
- (5) 正則図が 1 点共有和  $g_1 \vee g_2$  になっているとき  $R(g_1 \vee g_2) = -R(g_1)R(g_2)$

そして，山田多項式は Reidemeister 変形により次のように変化するため， $(-A)^n (n \in \mathbb{Z})$  をかけることを除いて固定頂点イソトピー不変量となっている.[2]

- (I)  $R(\bigcup) = A^2 R(\bigcap)$  ,  $R(\bigcap) = A^{-2} R(\bigcup)$
- (II)  $R(\bigcirc) = R(\bigcup) = R(\bigcap)$
- (III)  $R(\bigcup) = R(\bigcap)$
- (IV)  $R(\bigcup) = R(\bigcap) = R(\bigcup)$
- (VI)  $R(\bigcup) = (-A)^n R(\bigcup)$  ,  $R(\bigcup) = (-A)^{-n} R(\bigcup)$

得られたすべての固定頂点 2-bouquet graph の正則図に対して求めた山田多項式のすべてが， $(-A)^n (n \in \mathbb{Z})$  をかけることを除いて異なるため，それぞれが固定頂点イソトピックでないことを確認し，次の分類表を得た．

固定頂点 2-bouquet graph( $K$  型)



$0_1^k$



$2_1^k$



$3_1^k$



$4_1^k$



$4_2^k$



$4_3^k$



$5_1^k$



$5_2^k$



$5_3^k$



$5_4^k$



$5_5^k$



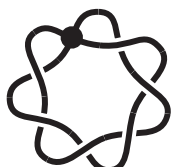
$5_6^k$



$5_7^k$



$5_8^k$



$6_1^k$



$6_2^k$



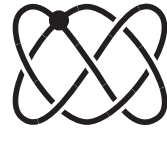
$6_3^k$



$6_4^k$



$6_5^k$



$6_6^k$



$6_7^k$



$6_8^k$



$6_9^k$



$6_{10}^k$



$6_{11}^k$



$6_{12}^k$



$6_{13}^k$



$6_{14}^k$



$6_{15}^k$



$6_{16}^k$



$6_{17}^k$

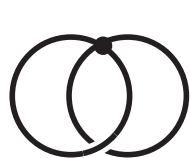


$6_{18}^k$



$6_{19}^k$

固定頂点 2-bouquet graph( $L$  型)



$1'_1$



$3'_1$



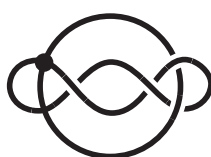
$4'_1$



$5'_1$



$5'_2$



$5'_3$



$6'_1$



$6'_2$



$6'_3$



$6'_4$



$6'_5$



$6'_6$



$6'_7$



$6'_8$



$6'_9$



$6'_{10}$



$6'_{11}$



$6'_{12}$

## 謝辞

本稿の図は, 早稲田大学の新庄玲子先生が提供して下さった図を基に作成させていただきました. また, 原稿の作成にあたりたくさんの助言も頂きました. 心より感謝いたします.

## 参考文献

- [1] L.H.Kauffman, *Invariants of graphs in three-space*, Trans.Amer.Math.Soc. 311 (1989) 697-710.
- [2] S. Yamada, *An Invariant of Spatial Graphs*, J. Graph Theory, Vol.13, No.5 (1989) 537-551.
- [3] H. Yamano, *Classification of tangles of 7 crossings or less (in Japanese)*, Master Thesis, Tokyo Metrop.Univ. (2001)
- [4] H. Moriuchi, *A table of handcuff graphs with up to seven crossings*, OCAMI Studies Vol 1. Knot Theory for Scientific Objects (2007) 179-200.
- [5] H. Moriuchi, *Enumeration of algebraic tangles with applications to theta-curves and handcuff graphs*, Kyungpook Math.J. 48 no.3 (2008) 337-357.
- [6] H. Moriuchi, *An enumeration of theta-curves with up to seven crossings*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 18 no.2 (2009) 167-197.
- [7] N.Oyamaguchi, *On rigid vertex isotopy types of connected spatial graphs having one 4-valent vertex (in Japanese)*, Master Thesis, Ochanomizu Univ. (2011)