

A writhe of a virtual knot and a local move

吉川 真由 (東京女子大学), 大山 淑之 (東京女子大学)

概要

virtual knot に対してある局所変形を定義し, その局所変形で2つの virtual knot が移り合う必要十分条件は Kauffman が定義した odd writhe とよばれる virtual knot の invariant が一致することを示す.

1 Introduction

virtual link diagram とは classical crossing に加え, 図1のような virtual crossing も持つ link diagram のことを言う.

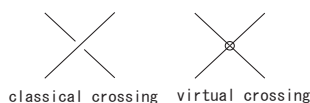


図 1

virtual link diagram において, I, II, III を *classical Reidemeister move*, vI , vII , $vIII$, v を *virtual Reidemeister move* といい, 両方の move をあわせて *generalized Reidemeister move* とよぶ.

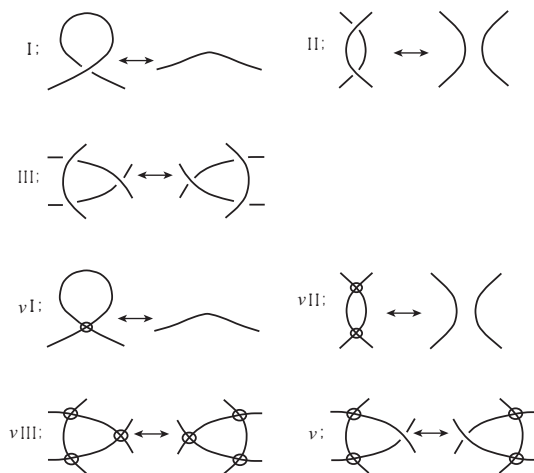


図 2

2つの virtual link diagram が同値とは、それらが有限回の generalized Reidemeister move で移り合うことである。この同値関係による virtual link diagram 全体の集合の同値類を *virtual link* とよぶ。特に、1成分の virtual link を virtual knot とよぶ。([1])

virtual knot は *Gauss diagram* によって表される。 \tilde{K} を virtual knot diagram とする。 \tilde{K} を S^1 から R^2 への immersion f の像と考える。 \tilde{K} の Gauss diagram とは、immersion f の逆像で \tilde{K} の classical crossing に対応する2点を chord で結んだものである。各 chord に under crossing に向かう矢印で crossing の上下の情報を与え、各 crossing の sign も各 chord に与える。

図3は図2の classical Reidemeister move I, II, III を Gauss diagram で表したものである。Gauss diagram の classical Reidemeister move による同値類と virtual knot は1対1に対応している。

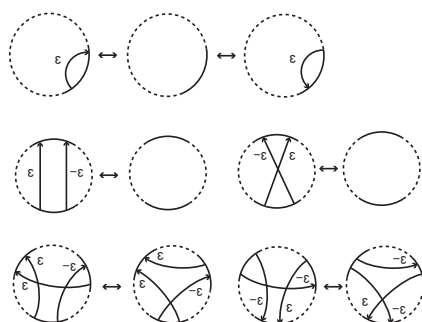


図 3

Definition 1.

virtual knot diagram における図4(a)の局所変形の集合を *3T-move* とよぶ。(b)はその局所変形を Gauss diagram で表したものである。

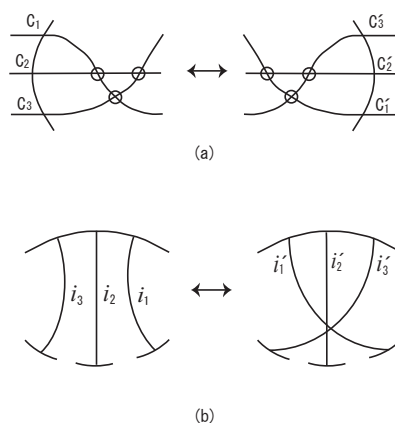


図 4

c_k と $c'_k (k=1,2,3)$ は classical crossing を表し、交差の上下の情報は一貫している。このとき、chord i_k と i'_k は c_k と c'_k に各々対応している。

Kauffman は次の virtual knot の不変量 $J(K)$ を定義した.

Definition 2 ([2]).

K を virtual knot, \tilde{K} を K の virtual knot diagram とする. *odd crossing* c とは, c からスタートし, virtual knot diagram に沿って進み, 初めて c に戻るまでに通過した classical crossing の数が奇数となる classical crossing のことである. $Odd(\tilde{K})$ を \tilde{K} における odd crossing の集合とし, $J(\tilde{K})$ を以下で定義する.

$$J(\tilde{K}) = \sum_{c_i \in Odd(\tilde{K})} sign(c_i).$$

odd crossing は virtual knot diagram の進み方によらず決まり, 次の定理が成立する.

Theorem 3 ([2]).

$J(\tilde{K})$ は virtual knot の invariant である.

以後 $J(\tilde{K})$ を $J(K)$ で表す. 本稿では以下の定理を示す.

Theorem 4.

K と L を virtual knot とする. \tilde{K} を K の virtual knot diagram, \tilde{L} を L の virtual knot diagram とする. \tilde{K} と \tilde{L} が有限回の $3T$ -move と generalized Reidemeister move で移り合う必要十分条件は, $J(K)$ と $J(L)$ が一致することである.

2 Proof of Theorem 4

virtual knot diagram \tilde{K} , \tilde{L} が有限回の $3T$ -move と generalized Reidemeister move で移り合うならば, $J(K) = J(L)$ が成り立つことを示す.

1回の $3T$ -move で J の値が変わらないことを示せばよい.

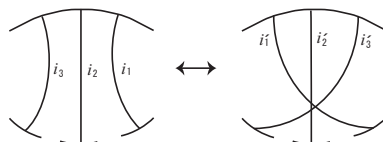


図 5

chord i の head から tail への円周上の 2 つの円弧を A と B とする. $\ell(i)$ を A , B における他の chord の head と tail の数の少ない方とする. chord $i_k (k=1,2,3)$ に関して以下が成り立つ.

$$\ell(i_k) \equiv \ell(i'_k) \pmod{2} .$$

$$\text{sign}(i_k) = \text{sign}(i'_k) \quad (k = 1, 2, 3) .$$

他の classical crossing も odd か否かという性質と sign は変わらない. よって $J(K) = J(L)$ が得られる.

次に $J(K) = J(L)$ ならば \tilde{K} と \tilde{L} が有限回の $3T$ -move と generalized Reidemeister move で移り合うことを示す. 以下の Step1~4 の操作を用いる.

Step 1.

任意の Gauss diagram を $3T$ -move と generalized Reidemeister move I で図 8 のような簡単な形に変形する.

$\ell(i) \equiv 0 \pmod{2}$ となる chord i に着目する.

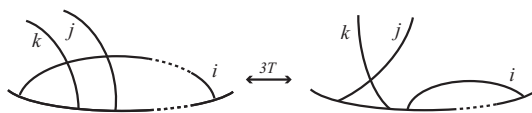


図 6

chord i の head と tail の間の chord の端点を図 6 の操作ですべて外に出し, generalized Reidemeister move I で chord i を取り除く. この操作を繰り返し $\ell(i) \equiv 0 \pmod{2}$ となる chord i はすべて取り除くことができ, $\ell(i) \equiv 1 \pmod{2}$ となる chord のみが残る.

$\ell(i) \equiv 1 \pmod{2}$ となる chord i に着目する. chord i の head と tail の間の chord を図 6 の操作によって chord j 1 本のみに行える.

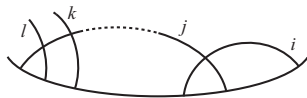


図 7

同様に chord j に対しても図 6 の操作を用い, chord i 以外の chord の端点をすべて外に出す. この操作を繰り返すとすべての chord に対して $\ell(i) = 1$ となるように変形でき, 図 8 の形に変形できる.

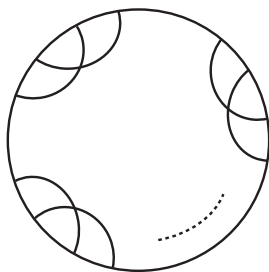


図 8

Step 2.

図 8 の Gauss diagram において, (a)~(d) の chord の pair を考え, $3T$ -move を用いてすべての chord の pair の向きを (a) パターンにする.

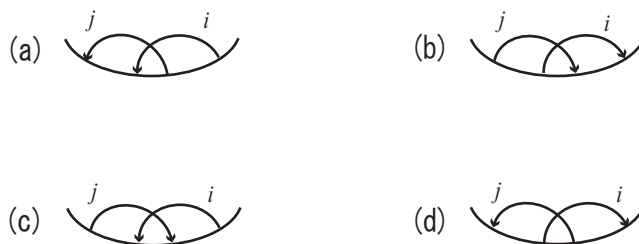


図 9

(c) について, chord j の tail に図 10 の操作を繰り返し用いて, 時計回りに円周上を移動させる.

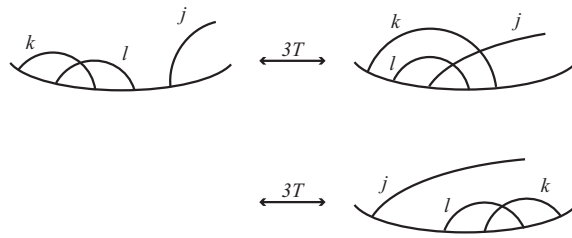


図 10

(c) は (a) に移り, (d) についても同様に, chord i の head に図 10 の操作を繰り返し用いて, 反時計回りに円周上を移動させ, (a) に移す. そのとき他の chord の pair は (b) は (b) に (c) は (d) に, (d) は (c) に移る. (c) と (d) は (a) に移り, (a) と (b) が残る.

ここで, 図 10 の操作を 2 度繰り返すと図 11 の操作が得られる.

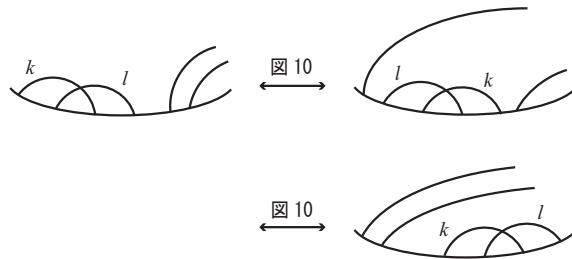


図 11

(b) において図 11 の操作を用いて chord i の head と chord j の head を反時計回りに移動させると (a) に移る. このとき, 他の chord の pair のパターンは変わらないので, すべての (a) の chord の pair となる.

Step 3.

以下の sign が ε だった chord の pair を generalized Reidemeister move II で取り除く.

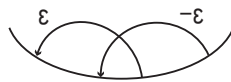


図 12

chord の sign が ε と $-\varepsilon$ の pair は generalized Reidemeister move II によって取り除くことができる. よって, sign の同じ chord の pair のみとなる.

Step 4.

chord の sign をそろえる.

sign ε をもつ chord の pair と sign $-\varepsilon$ をもつ chord の pair が隣り合う場合を考える.



図 13

図 13 に図 10 の操作と $3T$ -move を施すことにより, その chord を取り除くことができる (図 14).

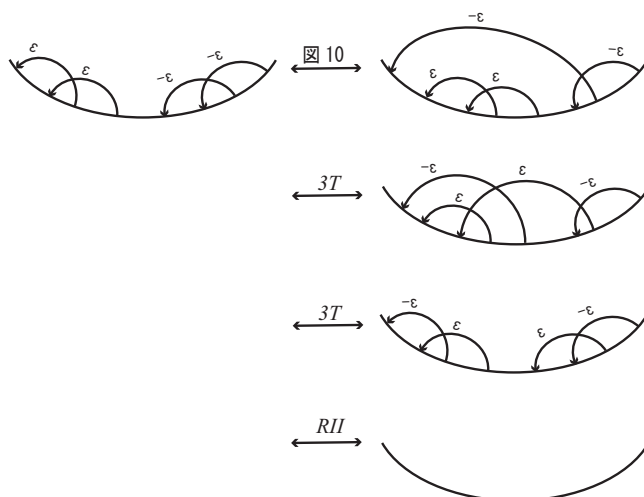


図 14

図 14 の操作を繰り返すと, chord の pair の sign はすべて 1, 又はすべて -1 にできる. すなわち, Step1~4 の操作により, 任意の Gauss diagram を図 15 の形に変形できる.

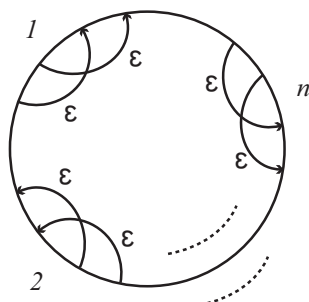


図 15

図 15 で表された chord の pair が n 個ある Gauss diagram を $D_{2\epsilon n}$ とおく. このとき, 各 chord が表す classical crossing は odd crossing なので,

$$J(D_{2\epsilon n}) = 2\epsilon n .$$

3T-move は $J(K)$ の値を変えないので, $J(K) = 2\epsilon n$ となる virtual knot diagram \tilde{K} は Step1~4 の操作により $D_{2\epsilon n}$ を Gauss diagram にもつ virtual knot diagram に移る. よって, $J(K) = J(L)$ ならば \tilde{K} と \tilde{L} が有限回の 3T-move と generalized Reidemeister move で移り合う. 以上により Theorem 4 が証明される.

参考文献

- [1] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory*, Europ. J. Combinatorics 20 (1999) 663-690.
- [2] L. H. Kauffman, *A Self-Linking Invariant of Virtual Knots*, Fund. Math. 184(2004) 135-158.