△ -crossing number of knots and links

坂本 遥子
神戸大学大学院理学研究科

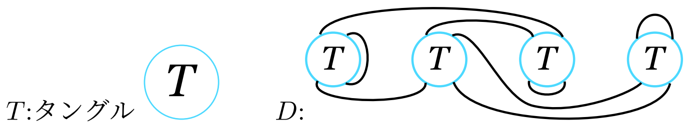
概要

Δ-tangle とは Δ-move に表れる 3 本の arc からなる tangle のことである。任意の knot, link は Δ-tangle だけをもつ図式で表すことができる。結び目 K について Δ-tangle の最少個数を K の Δ-crossing number という。Δ-crossing number が小さいときの knot や link を決定する。また、Δ-crossing number と crossing number の間の評価を与える。

1　イントロダクション

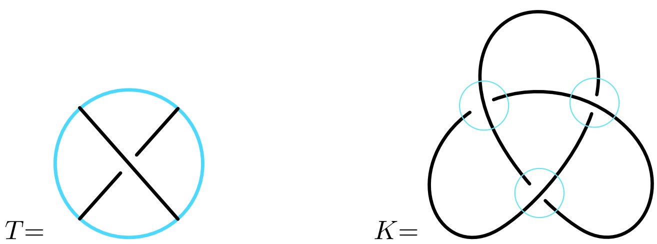
定義 1 図式 D がタングル T に分解できる とは, いくつかの T を外側では交点をつくらないようにつなげて D が得られるときにいう。

例



定義 2 結び目 K が T で表せる とは, K の図式 D で T に分解できるものが存在するときにいう。

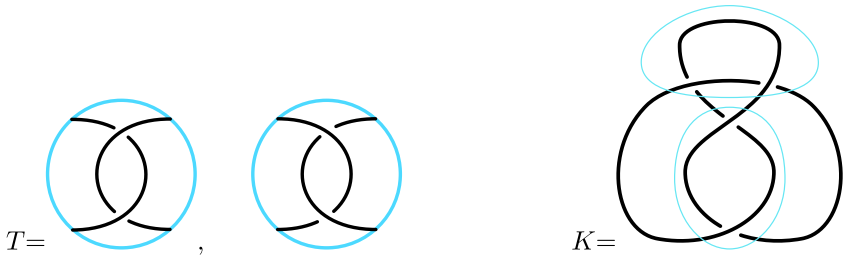
D が T に分解されている例 1



三葉結び目は, 3 個の T で表すことができる。
一般に, 交点 n の結び目は, n 個の T で表せる。

定理 1 (folklore) すべての結び目は T で表せる。

D が T に分解されている例 2

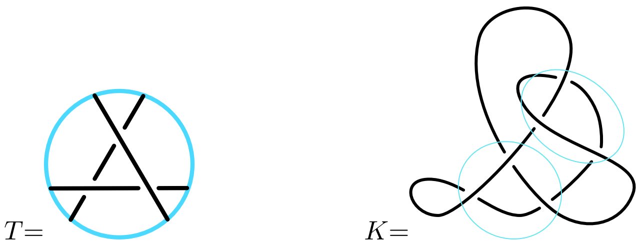


例 1 の図式のままでは, T で分解することはできないが, 上図のように変形して, 三葉結び目がこのタングルでも表せていることがわかる。

定理 2 (Duzhin '11) T で表せない結び目がある。

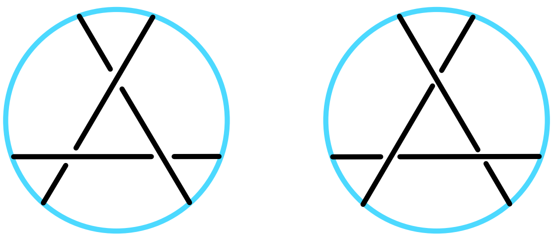
註 Kirby の問題集にのっている。

D が T に分解されている例 3



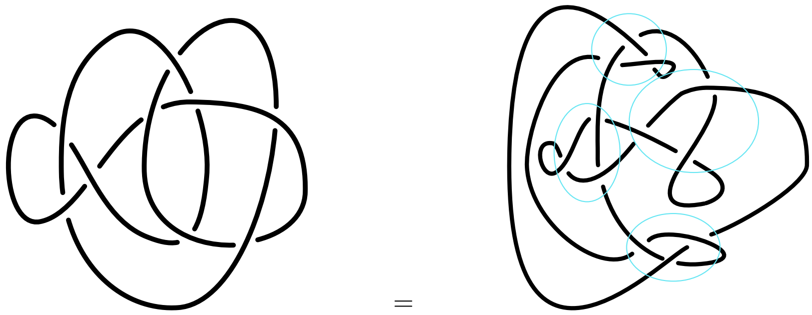
定理 3 (Adams '12) すべての結び目は T であらわせる。

定義 3 次のタングルを, <u>Δ-tangle</u> と定義する。



定理 4 すべての結び目は Δ-tangle で表せる。

例 9_{44}



定義 4 図式 D が Δ-tangle に分解できるとき, D を表す Δ-tangle の最少個数を Δ-crossing number といい, $C_\Delta(D)$ であらわす。

註 Δ-tangle は 2 種類とも使ってよいものとする。

定義 5 結び目 K の Δ-crossing number $C_\Delta(K)$ を, 以下のように定義する。

C_Δ(K)=min{C_Δ(D) | D は K の Δ-tangle で分解された図式 }.

註 9_{44} のとき, $C_\Delta(9_{44}) = 4$

定理 5 K の crossing number を $C(K)$ とおくとき, 以下の不等式が成り立つ。

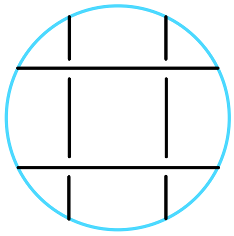
$$\frac{C(K)}{3} \leq C_\Delta(K) \leq 2C(K) - 2.$$

定理 6 以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
C_\Delta(K) = 1 &\Leftrightarrow K = 3_1.\\
C_\Delta(K) = 2 &\Leftrightarrow K = 4_1, 5_1, 5_2, 6_3.\\
C_\Delta(K) = 3 &\Leftrightarrow K = 6_1, 6_2, 7_1, 7_2, 7_3, 7_4, 7_5, 7_6, 7_7,\\
&\qquad\quad 8_{10}, 8_{13}, 8_{14}, 8_{15}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21},\\
&\qquad\quad 9_{23}, 9_{28}, 9_{31}.\\
C_\Delta(K) = 4 &\Leftrightarrow K = 8_1, 8_2, 8_3, 8_4, 8_5, 8_6, 8_7, 8_8, 8_9, 8_{11}, 8_{12}, 8_{16}, 8_{17},\\
&\qquad\quad 9_2, 9_3, 9_4, 9_5, 9_6, 9_7, 9_8, 9_9, 9_{11}, 9_{12}, 9_{13}, 9_{14}, 9_{15},\\
&\qquad\quad 9_{16}, 9_{18}, 9_{19}, 9_{20}, 9_{21}, 9_{22}, 9_{24}, 9_{25}, 9_{26}, 9_{27},\\
&\qquad\quad 9_{30}, 9_{32}, 9_{34}, 9_{35}, 9_{36}, 9_{37}, 9_{38}, 9_{39}, 9_{41}, 9_{42},\\
&\qquad\quad 9_{43}, 9_{44}, 9_{45}, 9_{49}.
\end{aligned}
$$

2 定理 1 の証明

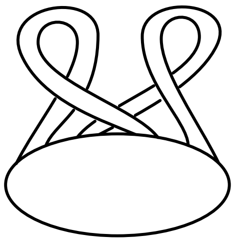
定義 6 次のタングルを, $\sharp$-tangle と定義する。



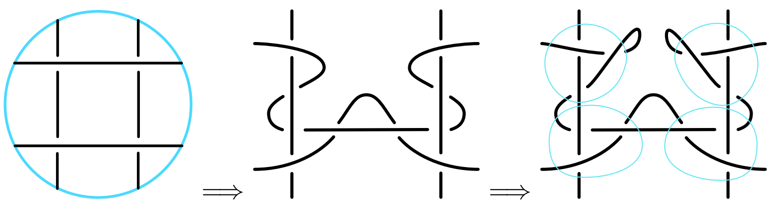
補題 1 すべての結び目は $\sharp$-tangle で表せる。

証明 ザイフェルト膜の標準形を考えればよい。

例 $K = 3_1$



補題 2 $\sharp$-tangle は Δ-tangle で表せる。



これらより, すべての結び目は $\sharp$-tangle で表すことができ, $\sharp$-tangle は Δ-tangle で表すことができるので, すべての結び目は Δ-tangle で表せることがわかる。

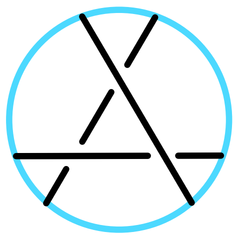
3　定理 2 の証明

(1) $C(K) \leq 3C_{\Delta}(K)$.

$C_{\Delta}(K)$ を実現する図式 D において, 各 Δ-tangle は 3 交点からなるので, $C(D) = 3C_{\Delta}(K)$ である。
よって, $C(K)$=min$\{C(D)\} \leq 3C_{\Delta}(K)$.

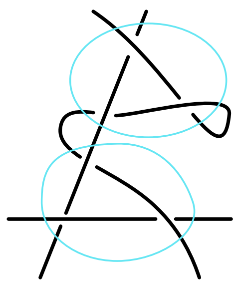
(2) $C_{\Delta}(K) \leq 2C(K) - 2$.

T=



補題 3 (Adams '12) すべての結び目 K は T で表せる。

　T の個数の最小値を $C_3(K)$ とおくと, $C_3(K) \leq C(K) - 1$。
T は以下のように変形できるので, Δ-tangle 2 つで表せることがわかる。



　$C_{\Delta}(K) = 2C_3(K)$ より, $C_{\Delta}(K) \leq 2C(K) - 2$ がわかる。

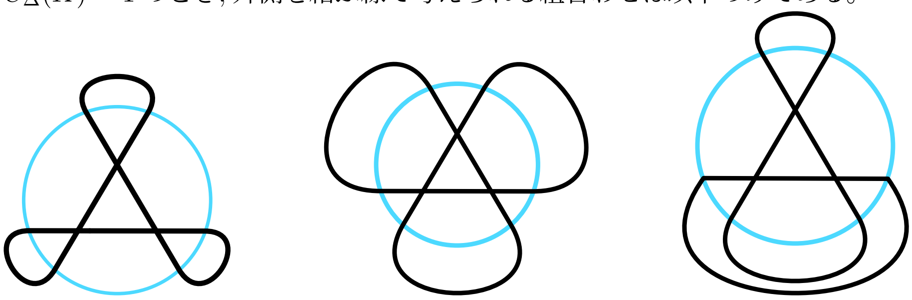
4　定理 3 の証明の概略

補題 4 $C_{\Delta}(K)=0 \Leftrightarrow K$=自明な結び目.

Δ-tangle の外側には交点をつくらないようにしているので, $C_{\Delta}(K)=0$ のときは自明な結び目となる。

命題 $C_{\Delta}(K)=1 \Leftrightarrow K=3_1$.

$C_{\Delta}(K)=1$ のとき, 外側を結ぶ線で考えられる組合わせは以下のみである。



命題 $C_{\Delta}(K)=2 \Leftrightarrow K=4_1, 5_1, 5_2, 6_3$.

$$
\begin{aligned}
C_{\Delta}(K)=3 \Leftrightarrow K=\ & 6_1, 6_2, 7_1, 7_2, 7_3, 7_4, 7_5, 7_6, 7_7, \\
& 8_{10}, 8_{13}, 8_{14}, 8_{15}, 8_{19}, 8_{20}, 8_{21}, \\
& 9_{23}, 9_{28}, 9_{31}.
\end{aligned}
$$

$C_{\Delta}(K)$=2,3 のときも, 外側を結ぶ線の組合わせで考えればよい。

5　わかっていない結び目

最後に, 交点 9 以下の knot で $C_{\Delta}(K)$ の値を決定できていないものを紹介します。
$9_{10}, 9_{17}, 9_{33}, 9_{46}, 9_{47}, 9_{48}$ については、$C_{\Delta}(K) \leq 5$ はわかった。

$8_{18}, 9_1, 9_{40}$ については、以下の評価を与えることができた。
$C_{\Delta}(8_{18}) \leq 6$.
$C_{\Delta}(9_1) \leq 13$.
$C_{\Delta}(9_{40}) \leq 12$.

参考文献

(1)C.Adams; Triple crossing number of knots and links,
arXiv 1207.7332v3

(2)S.V.Duzhin; A proof of Przytycki's conjecture on matched diagrams(Russian),
Dokl Akad Nauk 441 (2011) no2 160–161;
translation in Dokl Math 84(2011) no3 787–788.