

Region crossing changes on virtual link diagrams

門上 晃久 (華東師範大学数学系)

2012 年 12 月 24 日発表
結び目の数学 V (於: 早稲田大学)

Abstract

classical link diagram に対し定義された region crossing change を virtual link diagram の場合に拡張する。2 通りの拡張方法を提唱し、現状の考察、問題をまとめる。

1 Introduction

2010 年に清水理佳 [Sh] が classical link diagram に対し *region crossing change* を定義し、knot diagram の場合、常に unknotting operation であることを示した。2012 年に程志雲 (Zhiyun Cheng) [Ch] が link diagram の場合に unknotting operation となる必要十分条件が、その表す link が proper であることを示した。いずれも結果的に knot や link を表す diagram に依らない結果である。橋爪 [Ha] では diagram を変えない region crossing change の列を決定している。

今回 virtual link diagram に対して 2 通りの region crossing change を定義する。unknotting operation であるための十分条件を述べる。いずれの region crossing change も classical link diagram に対しては元の清水の定義と一致し、一方は diagram に依存するが、他方は link type にのみ依存する。

さらなる設定の拡張も試みたがここでは述べない。bundle の section と見なすことができ、可換にも非可換にも拡張できる。 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を \mathbb{Z} に拡張したものとして、阿原-鈴木 [AS] を挙げる。

2 The case of classical links

Definition 2.1 (一般化した region crossing change (cf. [Sh])) D を compact surface F 上の link diagram とし、 \bar{D} を D の flat diagram (projection) とし、 D および \bar{D} の crossings の集合を \mathcal{C} とする。特に区別するときは後者を $\bar{\mathcal{C}}$ とする。

$$\mathcal{R} = \{F \setminus \bar{D} \text{ の連結成分の閉包} \}$$

の元 $R \in \mathcal{R}$ を F 上の diagram \bar{D} , (F, \bar{D}) , の *region* と定義する。 D に対しても同じ集合 \mathcal{R} を用い、その元を *region* と定義する。region $R \in \mathcal{R}$ に対し、 ∂R を一周した

ときの重複を込めない D の crossings の集合を $\{c_1, \dots, c_k\}$ とし、各 c_i の重複度を λ_i ($1 \leq \lambda_i \leq 4$) とする。 R における *region crossing change* とは、 D における crossing change で、以下の規則に従うものと定義する：

- (i) λ_i が奇数のとき、 c_i で X 型 crossing change する。
- (ii) λ_i が偶数のとき、 c_i で crossing change しない。
- (iii) $\mathcal{C} \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$ では crossing change しない。

Remark 2.2 (1) D が *classical link diagram* とは、 $F = S^2$ の場合と定義する。清水 [Sh] による、このときの *region crossing change* の定義が最初である。(実際は大阪市立大学のセミナーにおける岸本健吾による提唱から始まる。) 河内-岸本-清水による、*region crossing change* を利用したゲーム *Region Select* [KKS] が開発されている。

- (2) D が *classical link diagram* のとき、 $\lambda_i = 1, 2$ のみが起こり得る。 $\lambda_i = 2$ となるのは、 D の split components の 1 つが、1 回の半ひねり connected sum diagram であるものが存在し、その split component の外部を囲む region においてである。
- (3) *region crossing change* は \sharp -move [MuH, MN] や n -gon move [Ai] (Figure 1) の一般化と捉えることができる。

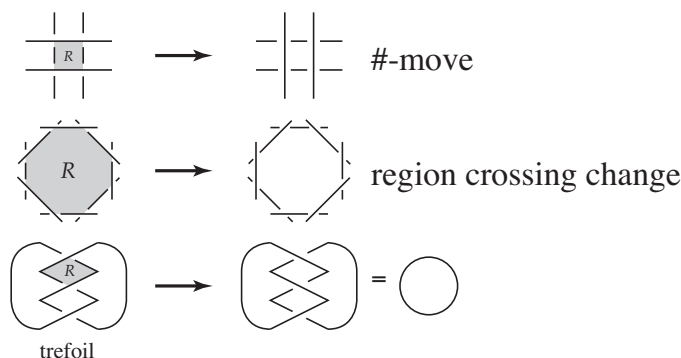


Figure 1: Region crossing change

Definition 2.3 (unknotting operation) *classical link diagram* に対する operation (局所的な部分の取り替えで、結果がまた *classical link diagram* となるもの) が *unknotting operation* とは、適切な箇所に有限回の operation を施すと *trivial link* を表す diagram になるとき、と定義する。virtual link diagram に対しても同様に定義する。

例えば X 型 crossing change は unknotting operation である。

Theorem 2.4 (A. Shimizu [Sh]) region crossing change は任意の classical knot diagram に対する unknotting operation となる。

Proof 任意の crossing c における X 型 crossing change が region crossing change の列で実現することを言えばよい。用いることは、checkerboard coloring に付随した region crossing change が link diagram を変えないこと、である。

c において splice すると 2 成分 link diagram を得る。その一方の成分のみについての checkerboard coloring を、他方を無視しつつやり、それについての region crossing change を元の diagram に対してすると、 c における X 型 crossing change を得る。■

Definition 2.5 (proper link) S^3 内の n 成分 link $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ が *proper* とは、各 i ($1 \leq i \leq n$) において

$$\sum_{j \neq i} \text{lk}(K_i, K_j) \equiv 0 \pmod{2}$$

が成り立つことと定義する。ここで $\text{lk}(K_i, K_j)$ は、 L に適当に向きを付けたときの K_i と K_j の linking number である。proper 性は向きの付け方によらないので、向きのない絡み目に対する概念となる。

(2,4)-torus link や Borromean rings は proper link だが、Hopf link は proper link ではない。

Theorem 2.6 (Z. Cheng [Ch]) region crossing change が classical link diagram に対する unknotting operation となる必要十分条件は、その diagram が表す link が proper であることである。

Remark 2.7 link diagram の projection (flat diagram) から proper 性は決定しない。

Definition 2.8 (RCC-equivalent, RCC-distance, RCC-trivial) 2 つの link diagram D, D' が *RCC-equivalent* とは、 D から D' へ有限回の region crossing change で移り合うとき、と定義する。このとき、移り合う回数の最小値を *RCC-distance* と定義し、 $d_R(D, D')$ と表す。また D' が trivial link の diagram であるとき、つまり region crossing change が D の unknotting operation であるとき、 D を *RCC-trivial* と定義する。

Problem 2.9 flat diagram \bar{D} に対し、全ての RCC-equivalence class を決定せよ。

Problem 2.10 同じ flat diagram を持つ 2 つの diagram に対し、RCC-equivalent かどうかを判定し、RCC-equivalent のとき RCC-distance を決定せよ。

Definition 2.11 (mod 2 total linking vector) n 成分 classical link $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ に対し、各 i ($1 \leq i \leq n$) で

$$u_i = \sum_{j \neq i} \text{lk}(K_i, K_j) \pmod{2}$$

と置く。このとき、 (u_1, \dots, u_n) を L の *mod 2 total linking vector* と定義する。 L が proper であることと、mod 2 total linking vector が $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ であることと同値である。

Lemma 2.12 (1) mod 2 total linking vector (u_1, \dots, u_n) は、 n 成分 classical link diagram の RCC-equivalence class の完全不変量である。

(2) $u_1 + \dots + u_n \equiv 0 \pmod{2}$.

(3) 同じ flat diagram を持つ 2 つの n 成分 classical link diagram の mod 2 total linking vector の加法を成分ごとの和で定義するとき、それらは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上の vector space を成し、その次元は $(n-1)$ 以下である。特に元の flat diagram が non-split のとき、次元は $(n-1)$ である。

(4) (3) で split component 数が k のとき、vector space の次元は $(n-k)$ である。

Remark 2.13 同じ flat diagram を持つ 2 つの diagram が同じ link type を表すとき、diagram として異なることもあり得るが RCC-equivalent ではある。

Lemma 2.14 同じ flat diagram を持つ 2 つの diagram D, D' が crossing number c で split component 数が k のとき、

$$d_R(D, D') \leq \left\lceil \frac{c+k+1}{2} \right\rceil - 1.$$

Problem 2.15 link diagram に対するある種の move 1 つが RCC-equivalence 性にどう影響を与えるか？

3 The case of virtual links

Definition 3.1 (virtual link diagram, virtual link) S^2 上の oriented link diagram で、crossing が Figure 2 にある *real* と *virtual* の 2 種あるものを (*oriented*) *virtual link diagram* と定義する。real crossing は *classical crossing* と呼ばれ、向きが付いた場合、左を *positive crossing*、右を *negative crossing* と符号を込めることがある。diagram に orientation が付かない場合も同様に定義する。virtual crossing がないときが *classical link diagram* である。Figure 3 にある、virtual link diagram に対する局所的な変形を *virtual Reidemeister move* と定義する。これらで生成する同値関係の類を *virtual link* と定義する。

virtual link diagram から所定の手続きにより (cf. 鎌田直子-鎌田聖一 [NS], S. Carter-鎌田聖一-斎藤正彦 [CKS])、orientable compact surface 上の virtual link のない diagram を得る。これを *surface realization* と定義する (Figure 4)。diagram を固定した、minimal genus closed surface 上の表示は本質的に一意に決まる。これを *canonical realization* と定義する。

曲面上の Reidemeister move により surface の minimal genus 性は変化する。virtual link の surface realization は *stable equivalence* で繋がっている。surface realization から $(\text{surface}) \times [0, 1]$ 内の link を得る。これを *space realization* と定義する。virtual link の minimal genus surface realization を *minimal realization* と定義する。G. Kuperberg [Kup] は minimal realization の存在と一意性を示していて、このことが virtual link を geometric に調べる際の基礎となる。

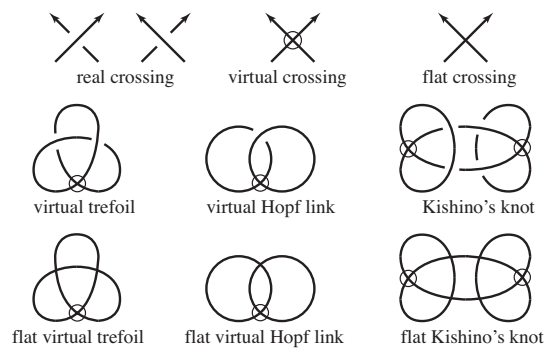


Figure 2: Crossings

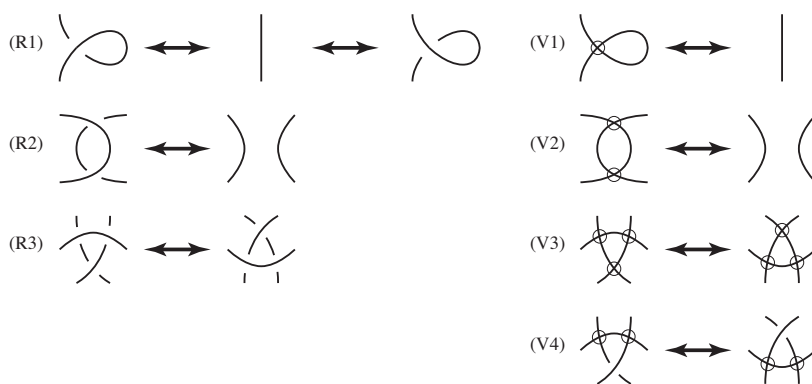


Figure 3: Virtual Reidemeister moves

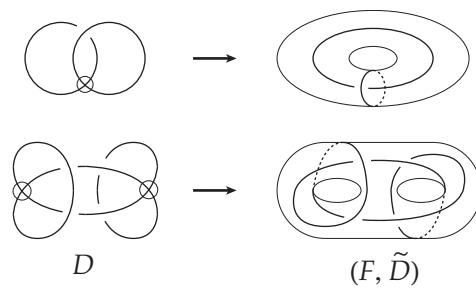


Figure 4: Surface realization

Definition 3.2 (diagrammatic region crossing change) Figure 5 にあるような、 S^2 上の virtual link diagram を元にした region crossing change を *diagrammatic region crossing change* と定義する (cf. Definition 2.1)。2 つの S^2 上の virtual link diagram が diagrammatic region crossing change の有限列で移り合うとき、*DRCC-equivalent* と定義し、一方が trivial link のとき他方を *DRCC-trivial* と定義する。

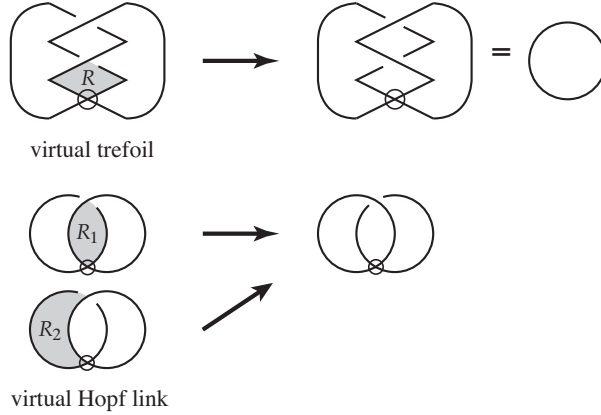


Figure 5: Diagrammatic region crossing change

Definition 3.3 (surface region crossing change) Figure 6 にあるような、virtual link diagram の surface realization を元にした region crossing change を *surface region crossing change* と定義する (cf. Definition 2.1)。2 つの surface realization が surface region crossing change の有限列で移り合うとき、*SRCC-equivalent* と定義し、一方が trivial link のとき他方を *SRCC-trivial* と定義する。

Remark 3.4 diagrammatic region crossing change も surface region crossing change も classical link diagram に制限すると同じ概念となる。

Definition 3.5 (flat equivalent) 2 つの virtual link diagram の flat diagram が同じとき、*flat equivalent* と定義する。一方が trivial link のとき他方を *flat trivial* と定義する。

Remark 3.6 classical link diagram は flat trivial である。

Theorem 2.4 と同様にして以下を得る。

Lemma 3.7 flat equivalent な 2 つの virtual knot diagram は DRCC-equivalent である。

Problem 3.8 flat equivalent な 2 つの virtual knot diagram は常に X 型 crossing change で移り合うか？

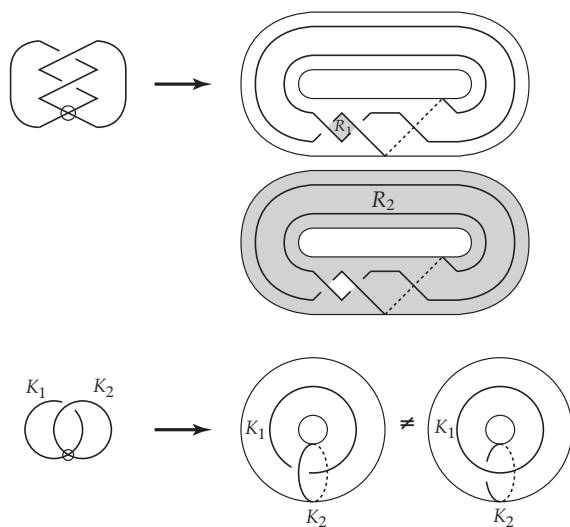


Figure 6: Surface region crossing change

Lemma 3.9 flat equivalent な 2 つの checkerboard colorable virtual knot diagram は SRCC-equivalent である。

Lemma 3.10 DRCC-trivial または SRCC-trivial な virtual link diagram は flat trivial である。

Remark 3.11 Theorem 2.6 より、Hopf link は classical link diagram の範囲では DRCC-trivial ではないが、適当な virtual link diagram により DRCC-trivial となる。よって DRCC-trivial 性は link type によらず、link diagram による概念である。

surface realization に対する proper 性を Definition 2.5 と同様に定義する。

Lemma 3.12 checkerboard colorable surface realization が SRCC-trivial であるとき、proper である。

将来どうにか、checkerboard colorable の仮定を取り除きたい。

Problem 3.13 surface realization が SRCC-trivial である必要十分条件は、flat trivial であり、proper であり、checkerboard colorable であること、は正しいか？

Definition 3.14 (DRCC-proper) $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$ を n 成分 virtual link diagram とする。 $V_{ij}(D) = V_{ji}(D)$ を異なる成分 D_i と D_j の間のできる virtual crossing の集合とする。 $I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid V_{ij}(D) \neq \emptyset\} = \{i_1, \dots, i_m\}$ とするとき、 $D' = D_{i_1} \cup \dots \cup D_{i_m}$, $P(D) = D \setminus D'$ と置く。 D が DRCC-proper とは、 $P(D)$ が proper であることと定義する。

Problem 3.15 virtual link diagram が DRCC-trivial である必要十分条件は、flat trivial であり、DRCC-proper であること、は正しいか？

謝辞 講演の機会を与えていただいた早稲田大学の谷山公規先生、新庄玲子先生に感謝致します。この題材を考察するきっかけは 2012 年 7 月 16 日に程志雲氏の興味深い講演を聴いてのことでした。この題材に関する情報を提供いただいた清水理佳様をはじめとする、2012 年 10 月 5 日に大阪市立大学の Friday Seminar on Knot Theory で講演させていただいた際にコメントいただいた方々にも感謝致します。

References

- [AS] K. Ahara and M. Suzuki, *An integral region choice problem on knot projection*, math.GT/1201.4539, 20p.
- [Ai] H. Aida, *Unknotting operation for polygonal type*, Tokyo J. Math. **15** (1992), no. 1, 111–121.
- [CKS] J. S. Carter, S. Kamada and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), 311–322.
- [Ch] Z. Cheng, *When is region crossing change an unknotting operation ?*, math.GT/1201.1735, 10p.
- [CG] Z. Cheng and H. Gao, *On region crossing change and incidence matrix*, to appear in Science China Mathematics, math.GT/1101.1129, 10p.
- [NS] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), 93–106.
- [Ha] 橋爪恵, *On the homomorphism induced by region crossing changes on link diagram*, 結び目の数学 V 講演 (2012).
- [Kup] G. Kuperberg, *What is a virtual link ?*, Algebr. Geom. and Topol. **3** (2003), 587–591.
- [KKS] K. Kishimoto, A. Kawauchi and A. Shimizu, *Region Select*,
<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/news/gamehp/gametop.html>
<https://play.google.com/store/apps/details?id=jp.co.global.regionselect>
- [MuH] H. Murakami, *Some metrics on classical knots*, Math. Ann. **270** (1985), 35–45.
- [MN] H. Murakami and Y. Nakanishi, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), 75–89.
- [Sh] A. Shimizu, *Region crossing change is an unknotting operation*, to appear in Journal of the Mathematical Society of Japan, math.GT/1011.6304, 12p.

Teruhisa KADOKAMI
Department of Mathematics,
East China Normal University,
Dongchuan-lu 500, Shanghai, 200241, China
mshj@math.ecnu.edu.cn