Character variety における Bowditch 空間の補集合について

大森　万梨子
奈良女子大学大学院　人間文化研究科　情報科学専攻

概要

SL$(2,\mathbb{C})$ の 2 元生成部分群の幾何について考える。Bowditch は type-preserving な 2 元生成部分群 (G) に対し Q-条件を定義し、この条件は G が quasi-fuchsian once-punctured torus groups になるための必要十分条件であることを予想した。また Ng-Tan は G が Q-条件を満たさないための十分条件を与えた。本研究ではこの条件 (Q-条件を満たさないための十分条件) の改良を行い、Bowditch 予想との比較を行う。さらに type-preserving でない場合の数値実験についても言及する。

1　研究背景

この節ではメビウス変換・character variety・無限 3 正則木・Markoff 写像・Bowditch の Q 条件・Bowditch 空間を紹介する。詳細は [1] を参照。

1.1　メビウス変換

T を穴あきトーラスとすると、T の基本群 $\pi = \pi_1(T)$ は 2 元生成群である。今生成元を X, Y で表す。$(\pi := \pi_1(T) =< X, Y >)$ 行列式が 1 である複素 2×2 行列全体の集合を以下のように表す。

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \right\}$$

複素平面上のメビウス変換とは

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

の形で表される関数であり、係数 a, b, c, d は $ad - bc = 1$ を満たす複素数である。メビウス変換の係数と複素 2×2 行列の係数は以下のように自然な対応がある。

$$S(z) \;=\; \frac{az + b}{cz + d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

1.2　character variety

2 元生成自由群 π から $SL(2,\mathbb{C})$ への準同形写像を ρ とし、その準同形写像の集合を R とする。R には $SL(2,\mathbb{C})$ が共役により作用している。$SL(2,\mathbb{C})$ が共役により作用するとは R の要素 ρ と $SL(2,\mathbb{C})$ の要素 A が与えられ、A は R を R へと写すとしたとき $(A\rho)(w)$ が $A \times \rho(w) \times A^{-1}$ で与えられることである。ただし w は π の要素とする。このとき $SL(2,\mathbb{C})$ の元によって互いに共役なものを同一視して得られる集合のことを"character variety"といい、$\mathcal{X}$ で表す。式で書くと以下のようになる。

$$\mathcal{X} = R \;//\; SL(2,\mathbb{C})$$

このとき、次の定理が知られている。

定理 1(Fricke). $[\rho] \in \mathcal{X}$ の対し $[\rho] \leftrightarrow (\mathrm{tr}\rho(X), \mathrm{tr}\rho(Y), \mathrm{tr}\rho(XY)) \in \mathbb{C}^3$ と定義することにより $\mathcal{X}$ は $\mathbb{C}^3$ と同一視される。

補足 1. $\rho(XYX^{-1}Y^{-1}) = -2$ となるとき $\rho \in R$ が type-presreving であるといい、$tr\rho(XYX^{-1}Y^{-1}) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$ である。

以上から $\mathcal{X}_{TP} = \{ [\rho] \in \mathcal{X} \mid \rho$ は type-preserving$\}$ とおくと次が成立する。

$$\mathcal{X}_{TP} \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = -2\}$$

ここで、$(x,\ y,\ z) = (\frac{2+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}i}{2})$ は 8 の字結び目の双曲構造に対応している。本研究では述べないが、結び目群から $SL(2,\mathbb{C})$ への準同形写像を考えることにより、結び目群の character variety も研究されている。

1.3　無限 3 正則木

Q 条件の準備として定義を行う。まず平面上に埋め込まれた無限 3 正則木を Σ、Σ の辺の集合を $E(\Sigma)$ とし、Σ 内の 1 点 v を固定する。次に Σ で切り取られた平面領域の集合を Ω とし、X, Y, Z を v に接する Ω の要素とする。(図 1)

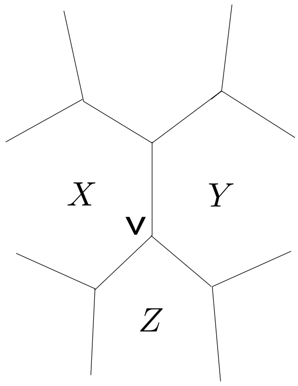


図 1: 無限 3 正則木

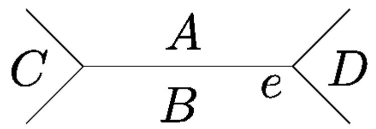
1.4　Markoff 写像

この節でも前節の記号を使用し、Markoff 写像を以下のように定義する。

定義 1(Markoff 写像). 写像 $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ が Markoff 写像であるとは任意の $e \in \mathrm{E}(\Sigma)$ $A, B, C, D \in \Omega$ に対して次の等式を満たすものである

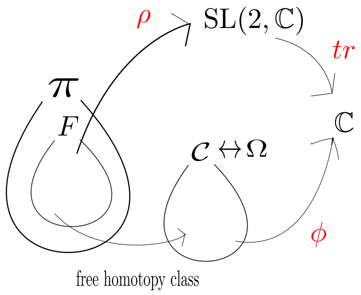
$$\phi(A) \times \phi(B) = \phi(C) + \phi(D)$$

ただし、A, B, C, D と e の関係は以下ようになっている。等式の左辺は掛け算、右辺は足し算になっていることに注意する。



1.5　character variety, $\mathbb{C}^3$, M

M を Markoff 写像 ϕ の集合とし、character variety と $\mathbb{C}^3$ と M の関係について下図を用い説明する。前節までの記号を使用し、他の記号は以下の通りである。



F : T の essential simple closed curves($\subset \pi$) の集合
C : F の free homotopy class の集合
C と Ω は 1 対 1 対応していることが知られている。

上の道では ρ により π から $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ へ写り tr をとることで $\mathbb{C}$ へと写る。下の道では π の部分集合 F が free homotopy class により C へ写り、C と Ω は 1 対 1 対応していることから Markoff 写像 ϕ により $\mathbb{C}$ へ写る。上の道、下の道どちらも π から $\mathbb{C}$ へ写ることから上の図と定理 1 より $\mathcal{X}$ と $\mathbb{C}^3$ と M の関係は以下のようになる。

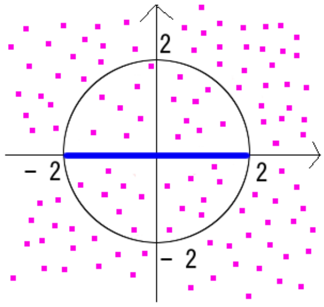
$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{X} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}^3 & \longleftrightarrow & M \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
[\rho] & & (x, y, z) & & \phi
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x = tr\rho(X) & x = \phi(X) \\
y = tr\rho(Y) & y = \phi(Y) \\
z = tr\rho(XY) & z = \phi(Z)
\end{array}$$

定理 1 より $\mathcal{X}$ と $\mathbb{C}^3$ は同一視でき、上の図から $\mathbb{C}^3$ と M も同一視できるので、$\mathcal{X}$ と $\mathbb{C}^3$ と M は同一視される。

1.6 Bowditch の Q 条件と Bowditch 空間

定義 (Bowditch [1] ,Tan-Wang-Zhang [2]).



$\phi \in M$ が

- 任意の要素 $V \in \Omega$ に対し、$\phi(V) \notin [-2, 2]$
- $|\phi(V)| \leq 2$ となる要素 $V \in \Omega$ は有限個

2 つの条件を満たすとき、BQ 条件を満たすという。

2 つの条件は似ているが上の条件は $\phi(V)$ が実数 -2 から 2 に入らないことを意味し、下の条件は原点を中心とする半径 2 の円に入る $\phi(V)$ は有限個であることを意味している。

また BQ 条件を満たす $\mathcal{X}$ の部分集合を Bowditch 空間といい、$\mathcal{X}_{BQ}$ と表す。

2 研究目的

与えられた $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ に対し、これが BQ 条件をみたすかどうかを考える。Bowditch および Tan らにより以下の先行研究がある。

先行研究

- Bowditch(1998)
  $(x, y, z) \in \mathcal{X}_{TP}$ が BQ 条件を満たすための十分条件を与える
- Tan-Wang-Zhang(2008)
  $(x, y, z) \in \mathcal{X}$ が BQ 条件を満たすための十分条件を与える
- Ng-Tan(2007)
  $(x, y, z) \in \mathcal{X}_{TP}$ が BQ 条件を満たさないための十分条件を与える

以上から与えられた $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ が BQ 条件を満たさないための十分条件について考える。この条件については以下の予想と定理がある。

予想 (Bowditch [1]). $(x, y, z) \in \mathcal{X}_{TP} \cap \mathcal{X}_{BQ} \Leftrightarrow (x, y, z)$ が punctured torus group (quasi-fuchsian group)

定理 (Ng-Tan [3]). $(x, y, z) \in \mathcal{X}_{TP}, |\rho(V)| < 0.5$ となるような ある $V \in \Omega$ が存在する $\Rightarrow$ (x, y, z) は BQ 条件を満たさない

定理 (Jorgensen [4]). $(x, y, z) \in \mathcal{X}_{TP}, |\rho(V)| < 1.0$ となるような ある $V \in \Omega$ が存在する $\Rightarrow$ (x, y, z) は punctured torus group でない

Bowditch の予想が正しいならば、定理 (Ng-Tan) の不等式の右辺は 1.0 まで拡張できるはずである。そこで、本研究では定理 (Ng-Tan) の不等式の右辺を 1.0 まで拡張することについて考察する。

3 結果

この節では主定理・主定理に基づく数値計算結果・証明を紹介する。なお節 1.5 より $\mathcal{X}$ と $\mathbb{C}^3$ と M は同一視されるので、補足 1 より $M_{TP} \cong \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2+y^2+z^2-xyz-2=-2\}$ と表すことができ、この節では集合 M_{TP} において話を進めていく。

3.1 主定理

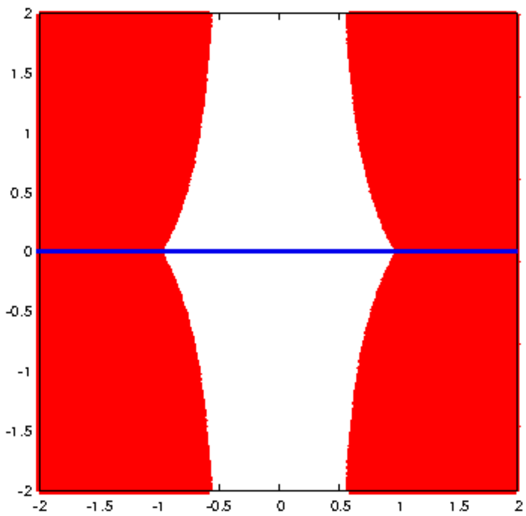
$\phi \in M_{TP}$ とし、ある $V \in \Omega$ が存在して以下を満たすとする。

$$\phi(V) \notin [-2,2],\ Q < \left|\phi(V)^2-4\right|$$

ただし
$\lambda = \dfrac{\phi(V)+\sqrt{\phi(V)^2-4}}{2}$ とし P, Q は各々以下のように λ と $\phi(V)$ で表し、$Re(\lambda)$ は λ の実部とする。
$P = 2|\lambda|^2 - 1 - |\lambda|^4 - |\phi(V)^2-4|^2 + 2\left|\lambda^2\phi(V)^2 - 4\lambda^2\right| + 2\left|\phi(V)^2-4\right|$
$Q = |\lambda|^2+1-\left\{2\left(1+|\lambda|^2-\left|\phi(V)^2-4\right|\right)\dfrac{\mathrm{Re}(\lambda)^2}{|\lambda|^2} - \left(1+|\lambda|^2-\left|\phi(V)^2-4\right|\right) - 2\sqrt{P}\dfrac{\sqrt{|\lambda|^2-\mathrm{Re}(\lambda)^2}}{|\lambda|}\dfrac{\mathrm{Re}(\lambda)}{|\lambda|}\right\}$

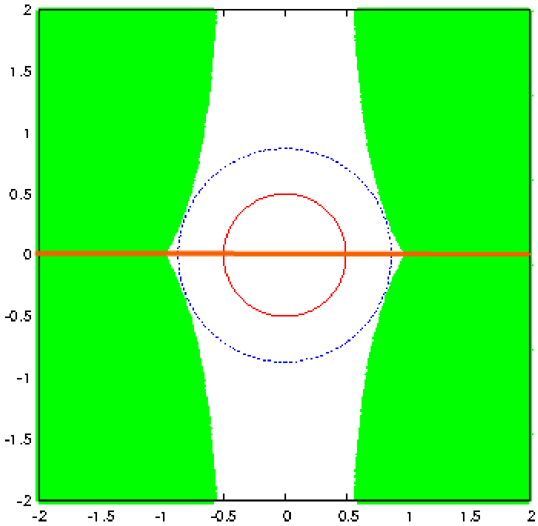
このとき V に隣接する補領域 V' で $|\phi(V')| < |\phi(V)|$ となるものが存在する。

3.2 type-presreving な Markoff 写像における主定理の条件を満たす領域の数値計算結果 1



図は $\phi(V)$ 平面を表しており、白い部分は $|\phi(V')| < |\phi(V)|$ を満たす部分、グレーの部分はどうなるかわからない部分である。白い部分の原点からの距離は 0.5 より大きいように見て取れる。そこで白い部分の原点を中心とする内接円と原点を中心とする半径 0.5 の円を描いて考察し、白い部分の原点からの距離を求める。以後原点を中心とする。

3.3 type-presreving な Markoff 写像における主定理の条件を満たす領域の数値計算結果 2



外側はの円は白い部分の内接円であり、内側の円は半径 0.5 の円である。白い部分の内接円は半径が 0.5 の円より大きいことが見て取れる。また原点からの距離は約 0.91 であった。この結果から以下が言える。

3.4 数値計算による結果

$|\phi(V)| < 0.91$ なら補領域の無限列 $V_1, V_2, V_3 \cdots$ が存在して $|\phi(V_i)| > |\phi(V_{i+1})|$ となる。

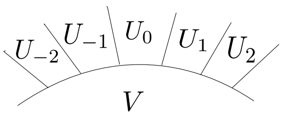
主定理によりある条件において V に隣接する補領域 V' で $|\phi(V')| < |\phi(V)|$ となるものが存在することにより、$\phi(V')$ は $\phi(V)$ の円より半径が小さいところに存在することがわかる。だが、$\phi(V)$ が白い部分に入っても $\phi(V')$ は緑の部分に入るかもしれない。しかし $\phi(V)$ が半径 0.91 の円に入れば、$\phi(V')$ は必ず半径 0.91 の円の中に入り、白い部分に入る。同様に $\phi(V')$ の隣も白い部分に入り、その隣も ··· となるので無限に続いていき、$\phi(V)$ が半径 0.91 の円に入れば無限個が半径 0.91 の円に入ることがわかる。これは前の BQ 条件の定義”$\phi \in M$ が $|\phi(V)| \leq 2$ となる要素 $V \in \Omega$ は有限個” を満たさない。

よって以上のことから”$|\phi(V)| < 0.91$ なら BQ 条件を満たさない”ことがわかる。

3.5　証明

主定理の証明について簡単に説明する。

$V \in \Omega, \quad \phi(V) \notin [-2, 2]$ とし、V に隣接する補領域を $\cdots, U_{-2}, U_{-1}, U_0, U_1, U_2 \cdots$ とおく。
関係は以下の図のようになっている。



$v = \phi(V), \ \ u_n = \phi(U_n)$ とおくと Markoff 写像の定義より $u_{i+2} + u_i = u_{i+1} \times v$ となり

$$u_n = A\lambda^n + D\lambda^{-n}$$

と書くことができる。ただし

$$\lambda = \frac{\phi(V) + \sqrt{\phi(V)^2 - 4}}{2}, \qquad AD = \frac{\phi(V)^2}{\phi(V)^2 - 4}$$

とする。

次に必要なら U_i の番号をつけかえることにより、以下が成立するとする。

$$1 \leq \left|\frac{A}{D}\right| \leq |\lambda|$$

(このように行うことで概ね　$|u_0|, \ |u_1|$ が最小となる。)

このとき

$$\phi(V) \notin [-2, 2], \ \ Q < \left|\phi(V)^2 - 4\right|$$

ならば

$$|u_0| < |v| \text{ または } |u_1| < |v|$$

となる。ただし

$$P = 2|\lambda|^2 - 1 - |\lambda|^4 - |\phi(V)^2 - 4|^2 + 2\left|\lambda^2\phi(V)^2 - 4\lambda^2\right| + 2\left|\phi(V)^2 - 4\right|$$

$$Q = |\lambda|^2 + 1 - \left\{2\left(1 + |\lambda|^2 - \left|\phi(V)^2 - 4\right|\right)\frac{\mathrm{Re}(\lambda)^2}{|\lambda|^2} - \left(1 + |\lambda|^2 - \left|\phi(V)^2 - 4\right|\right) - 2\sqrt{P}\frac{\sqrt{|\lambda|^2 - \mathrm{Re}(\lambda)^2}}{|\lambda|}\frac{\mathrm{Re}(\lambda)}{|\lambda|}\right\}$$

である。

4　type-presreving 以外の場合

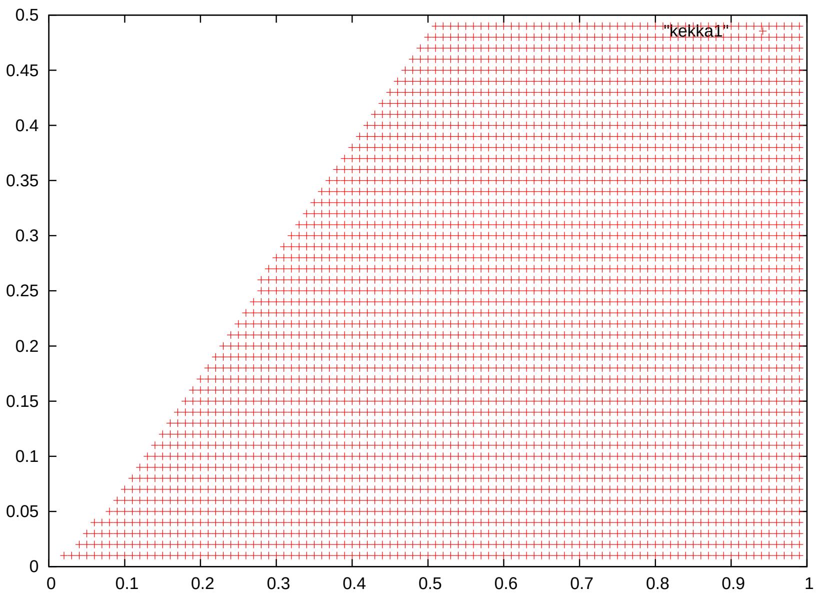
今までは type-presreving の場合を考えていたが、この節では type-presreving 以外の場合において与えられた $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ が BQ 条件を満たさないための十分条件について考える。調べる方法は以下の通りである。

- $\phi \in M$ のとき同じように隣接する補領域の大きさと v の大きさを比べ $|u_0| < |v|$ または $|u_1| < |v|$ となる $|v|$ の範囲を調べる

- $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = k$ とする
  $k = 0$ のとき $\Rightarrow$ type-presreving のときである

- 以下 k が実数の場合の数値実験を行う

4.1　$\phi \in M$ における $\phi(V)$ と k の数値計算



x 軸は k を表し、y 軸は $|\phi(V)|$ を表している。k が少しでも 0 より大きくなると隣に $|\phi(V)|$ より小さくなる補領域がみつからないことがわかる。

5　まとめ・課題

$\phi \in M_{TP}$ において Ng-Tan の不等式の右辺を数値計算で 0.91 まで拡張することに成功した。しかし Bowditch の予想が正しいならば、1.0 まで拡張できるはずなので 1.0 まで拡張したい。

$\phi \in M$ では隣接する補領域 1 つと比べただけではうまくいかなかったので、隣接するところ以外の補領域とも比べることで BQ 条件を満たさない条件を見つけたい。

Ng-Tan の不等式を 0.5 から 0.91 まで拡張できたことは与えられた $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ が BQ 条件を満たしていないことを示すためのアルゴリズムの高速化につながると考えられる。

参考文献

[1] B.H. Bowditch, *Markoff triples and quasi-Fuchsian groups,* Proc. Lond. Math. Soc. 77 (1998), 697-736.

[2] S.P. Tan, Y.L. Wong and Y. Zhang, *Generalized Markoff maps and McShane's identity,* Adv. Math. 217 (2008), 761-813.

[3] S.P.K. Ng and S.P. Tan, *The complement of the Bowditch space in the* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ *character variety,* Osaka Journal of Math. 44 (2007), 247-254.

[4] T. Jorgensen, *On discrete groups of Mobius transformations,* Amer. J. Math. 98(1976), 739-749.