

# 双曲的ファイバー二橋絡み目補空間の標準的分割

阪田 直樹

広島大学理学研究科数学専攻 修士 2 年

## 概要

有限体積カスプ付き 3 次元双曲多様体には標準的分割と呼ばれる理想多面体分割が存在する。Guéritaud-Futer, Akiyoshi-Sakuma-Wada-Yamashita により双曲的二橋絡み目補空間の標準的分割は Sakuma-Weeks が構成した位相的理想単体分割とアイソトピックであることが示されている。本報告では A'Campo により与えられた harmonic 1-cocycle を双曲的ファイバー二橋絡み目補空間の標準的分割に対して具体的に計算することにより、その標準的分割がファイバー構造に関して”layered”であることを証明する。

## 1 はじめに

Epstein-Penner, Weeks は任意の有限体積カスプ付き 3 次元双曲多様体に対して、**標準的分割**と呼ばれる理想多面体分割が唯一つ定まる事を示した (cf. [3], [10])。以下の 2 つの定理を用いることによって、標準的分割の組合せ構造は双曲的結び目の完全不変量になることが知られている。

**定理 1.1** ([5]).  $K, K'$  を結び目とする。  $K$  と  $K'$  が同じ結び目型を持つことの必要十分条件は、結び目補空間  $E(K)$  と  $E(K')$  が同相であることである。

**定理 1.2** (Mostow-Prasad-Marden rigidity theorem).  $M, N$  を有限体積  $n$  次元双曲多様体とする ( $n \geq 3$ )。  $M$  と  $N$  が同相ならば、  $M$  と  $N$  は等長的である。

一般的に標準的分割は理想多面体分割であるが、双曲的二橋絡み目補空間に関しては次の事実が知られている。

**定理 1.3** ([6], [2]). 任意の双曲的二橋絡み目補空間の標準的分割は、Sakuma-Weeks が構成した位相的理想単体分割 (cf. [9]) とアイソトピックである。

次に主定理を述べる準備をする。

**定義 1.1.** 穴あき曲面上の理想 3 角形分割  $T$  に関する **Whitehead move** とは, 2 つの異なる 3 角形が隣接する  $T$  の理想 1-単体に対して, その理想 1-単体を消して, 2 つの隣接する三角形が作る 4 角形の別の対辺に置き換えることである (図 1)。

Whitehead move が行なわれた時, 対辺を入れ替える前の 4 角形と対辺を入れ替えた後の 4 角形を重ね合わせることで理想 4 面体を得る (図 2)。Whitehead move の列に対して, 各 Whitehead move から得られる理想 4 面体を次々と重ねて得られた理想単体分割を Whitehead move で実現されたと言う。

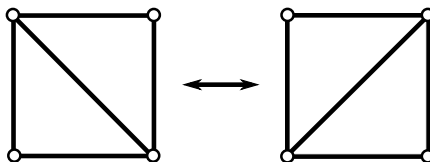


図 1

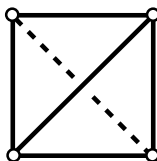


図 2

**定義 1.2.**  $S^1$  上 1 点穴あき曲面バンドルの理想単体分割  $\Delta$  が **layered** であるとは,  $\Delta$  がファイバー曲面の 3 角形分割に関する Whitehead move の列で実現されることである。

本研究の動機となった以下の定理を紹介する。

**定理 1.4** ([7], [1], [6]).  $S^1$  上 1 点穴空きトーラスバンドルの標準的分割は layered である。

本報告では, 上の結果が双曲的ファイバー二橋絡み目補空間でも成り立つことを述べる。

**主定理 1.** 双曲的ファイバー二橋絡み目補空間の標準的分割は layered である。

主定理の証明には A'Campo のファイバー性判定条件を用いる。

## 2 A'Campo のファイバー性判定条件

$M$  を有限体積のカusp付き 3次元双曲多様体とする。 $\Delta$  を  $M$  の理想単体分割とする。 $\mathcal{F}$  を  $\Delta$  の双対複体とする。この時  $\mathcal{F}$  の各辺 (1-単体) は  $\mathcal{F}$  の 3 枚の面 (2-単体) に共有される。また  $\mathcal{F}$  の各頂点 (0-単体) は  $\mathcal{F}$  の 6 枚の面と 4 本の辺に共有される。 $\mathcal{F}$  の頂点  $v$  に対して、 $v$  に隣接する辺を  $\{e_i^{(v)}\}_{i=1,2,3,4}$  とし、頂点から出る向きを正とする。

**定義 2.1.**  $\omega$  を 1-cocycle とする。つまり  $[\omega] \in H^1(\mathcal{F}; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(H_1(\mathcal{F}), \mathbb{R})$  とする。

(i)  $\text{div}_v(\omega) = \sum_{i=1}^4 \omega(e_i^{(v)})$  と定め、頂点  $v$  の **divergence** と言う。

(ii)  $\omega$  が **harmonic** であるとは、 $\mathcal{F}$  の任意の頂点  $v$  に対して  $\text{div}_v(\omega) = 0$  を満たすことである。

(iii)  $\omega$  が頂点  $v$  で **balanced** であるとは、

$$\omega(v) = \begin{cases} \text{正} & (i = 1, 2) \\ \text{負} & (i = 3, 4) \end{cases}$$

を満たすことである。

(iv)  $\omega$  が **balanced** であるとは、 $\mathcal{F}$  の任意の頂点  $v$  に対して  $\omega$  が  $v$  で balanced であることである。

**命題 2.1.** 任意の 1-cocycle  $\omega$  に対して、harmonic 1-cocycle  $\tau$  が唯一つ存在して  $\omega$  と  $\tau$  はコホモロークである。

**規約 2.1.** 任意の 1-cocycle  $\omega$  に対して、以下  $\mathcal{F}$  の各辺の向きは  $\omega$  が正となるように定める。

**定義 2.2.** 群  $G$  の元  $g$  が**原始的**であるとは、 $G$  の元  $h$  が存在して  $g = h^n$  であるならば  $n = \pm 1$  となることである。

A'Campo によって以下の判定条件が与えられた。

**定理 2.1** (A'Campo のファイバー性判定条件).  $f : M \rightarrow S^1$  とする。 $f^*(1) \in H^1(M; \mathbb{Z}) \cong H^1(\mathcal{F}; \mathbb{Z})$  は原始的であるとする。balanced な 1-cocycle  $\omega$  が存在して、 $f^*(1) = [\omega]$  を満たすとする。この時以下が成り立つ。

(i) ファイブレーション  $g_\omega : M \rightarrow S^1$  が存在して、 $f$  と  $g_\omega$  はホモトピックである。

(ii)  $\Delta$  は layered である。

この定理の証明を与える前に、この判定条件の背景について述べる。

A'Campo はコンピュータを用いた実験により、”多くの”双曲的絡み目に対して補空間の標準的分割に付随する harmonic 1-cocycle にファイバー性の判定条件を適用する事で絡み目のファイバー性が判定出来る事を確認した。しかし一般的には harmonic 1-cocycle を用いてファイバー性を判定する事は出来ないことが平澤美可三氏により発見された。これを受けて A'Campo は次のように予想した。

**予想 2.1.** 任意の双曲的二橋絡み目と任意の双曲的スラローム結び目に対して、補空間の標準的分割に付随する harmonic 1-cocycle にファイバー性の判定条件を適用する事で絡み目のファイバー性が判定出来る。

次の主定理によって、この予想の双曲的二橋絡み目の場合が示される。

**主定理 2.** 任意の双曲的ファイバー二橋絡み目に対して、補空間の標準的分割に付随する harmonic 1-cocycle は balanced である。

主定理 1 は主定理 2 と定理 2.1 から直ちに得られる。

判定条件を証明する為の補題を先に示す。

**補題 2.1.**  $\mathcal{F}$  の任意の面  $f$  に対して、 $f$  の境界は丁度 1 つずつの極小点と極大点を持つ。

**証明.** 容易に分かるように、 $\mathcal{F}$  に含まれる頂点の数と面の数は等しい。また各頂点は丁度 1 つの面の極小点と極大点になれる。したがって任意の面  $f$  に対して、 $f$  の境界は丁度 1 つずつの極小点と極大点を持つ。 □

上の補題を踏まえ、ファイバー性判定条件の証明を与える。

**定理 2.1 の証明.**  $\omega$  を積分することによって  $\mathcal{F}$  の 1-骨体から  $S^1$  への連続写像  $g_\omega : \mathcal{F}^{(1)} \rightarrow S^1$  を得る。また  $g_\omega$  が基本群へ誘導する準同型  $(g_\omega)_\# : \pi_1(\mathcal{F}^{(1)}) \rightarrow \pi_1(S^1)$  は  $\mathcal{F}$  の各面の境界を  $1 \in \pi_1(S^1)$  へ写す。よって  $g_\omega$  は  $\mathcal{F}$  からの写像へ拡張出来る (図 3)。 $M$  から  $\mathcal{F}$  への強変形レトラクトを  $r$  とする。前の補題により  $\mathcal{F}$  の各面は境界で極小点と極大点を丁度 1 つずつ持つ。したがって  $p = g_\omega \circ r$  と置くと  $p$  はファイブレーションである。また  $M$  の各理想四面体とファイバー曲面の関係を見ることで、 $\Delta$  は実際に layered である事が分かる (図 4)。 □

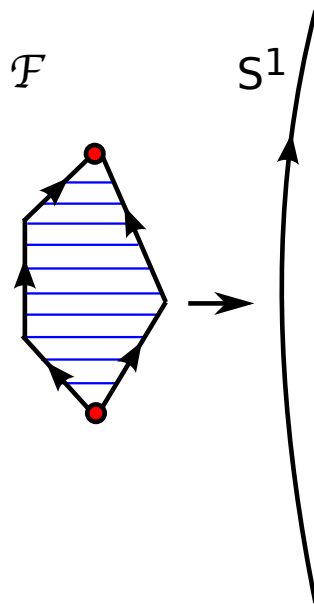


図3

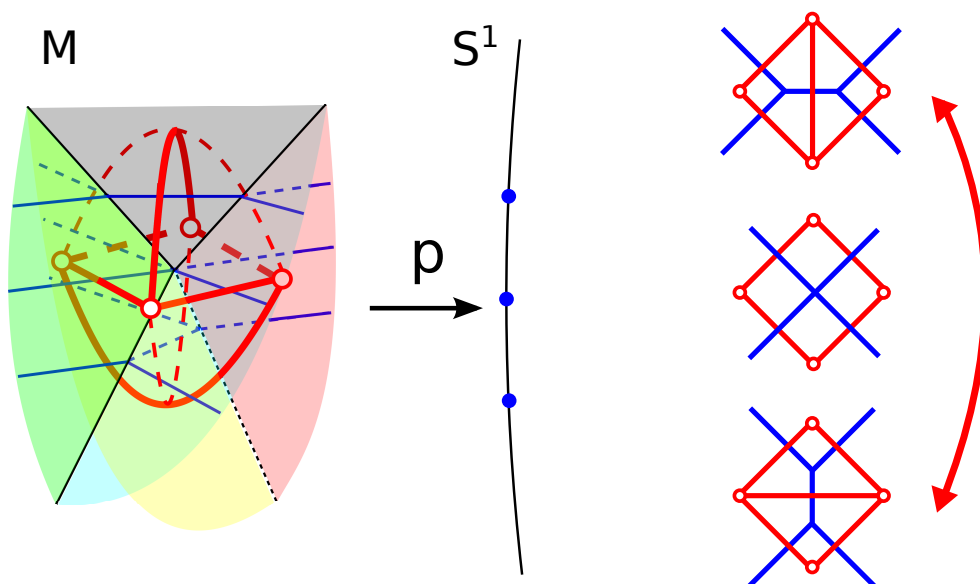


図4

### 3 双曲的ファイバー二橋絡み目補空間へのファイバー性判定条件の適用

二橋絡み目は各成分が偶数から成る連分数展開によって表わす事が出来る。よって  $L = L([2b_1, 2b_2, \dots, 2b_m])$  を二橋絡み目とする ( $b_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ )。ここで

$$[2b_1, 2b_2, \dots, 2b_m] = \frac{1}{2b_1 + \frac{1}{2b_2 + \dots + \frac{1}{2b_m}}} \quad (1)$$

である。

**例 3.1.** 連分数  $[2, 2, -2]$  は図 5 の二橋絡み目を表わす。

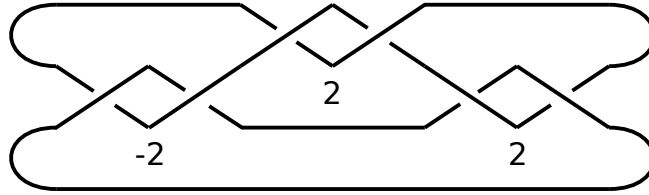


図 5

Murasugi [8] (cf. Gabai [4]) により次が容易に分かる。

**事実 3.1.**  $L$  が双曲的ファイバー絡み目であることの必要十分条件は、任意の  $i$  に対して  $b_i = \pm 1$  であり、かつ  $j$  が存在して  $-b_{j-1} \neq b_j$  である事である。

はじめに述べた通り、双曲的二橋絡み目補空間の標準的分割は Sakuma-Weeks が構成した位相的理想単体分割にアイソトピックである。この理想単体分割を記述する為には各成分が正である連分数が必要である。(1) の連分数は以下の補題により、そのような連分数へ変換できる。

**補題 3.1.**  $[2b_1, 2b_2, \dots, 2b_m]$  に対して、同じ符号が連続している所で列を分割する。つまり  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  に対して  $S_i = (2b_k, 2b_{k+1}, \dots, 2b_{k+l})$  とすると、 $k+1 \leq j \leq k+l$  の任意  $j$  に対して  $-2b_{j-1} = 2b_j$  かつ  $2b_{k-1} = 2b_k, 2b_{k+l} = 2b_{k+l+1}$  であるとする。各  $S_i$  に対して、列の長さを  $\text{len}(S_i)$  とする。また

$$S'_i = \begin{cases} (2) & (\text{len}(S_i) = 1) \\ (1, \text{len}(S_i) - 1, 1) & (\text{len}(S_i) > 1) \end{cases}$$

と置く。この時

$$[2b_1, 2b_2, \dots, 2b_m] = [S'_1, S'_2, \dots, S'_n]$$

である。

Sakuma-Weeks の与えた理想単体分割を見ると容易に分かる通り、補空間の標準的分割に関する双対複体の 1-骨体は図 6 のようになる。

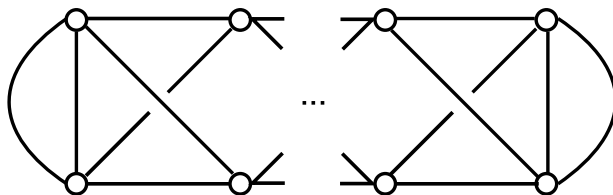


図 6

**例 3.2.** 8 の字結び目補空間の標準的分割は layered である。

**証明.** 8 の字結び目は双曲的ファイバー二橋絡み目  $L([2, 2])$  である。  $f : E(L([2, 2])) \rightarrow S^1$  をファイブレーションとする。  $f^*(1)$  を代表する harmonic 1-cocycle は計算により図 7 で示される 1-cocycle であることが分かる。またこの 1-cocycle は balanced である。したがって定理 2.1 により 8 の字結び目補空間の標準的分割は layered である。  $\square$

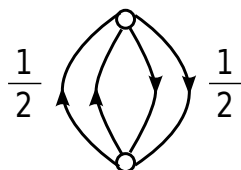


図 7

**定義 3.1.** 双曲的ファイバー絡み目補空間の標準的分割に付随する harmonic 1-cocycle を **canonical 1-cocycle** とする。

この例と同様に全ての双曲的ファイバー二橋絡み目で canonical 1-cocycle を求める。これは連分数の列の長さに関して帰納的に得る事が出来る。

**補題 3.2.** 長さ 3 の連分数で表わされる双曲的ファイバー二橋絡み目の canonical 1-cocycle  $\omega_{[2b_1, 2b_2, 2b_3]}$  は次の図 8 で示されるものである。

$L([2, -2, 2, \dots, -2, 2, 2])$  は連分数の最後にある 2 つの数字以外では、数字の符号が交替的に付いている。このような絡み目の canonical 1-cocycle は、長さ 3 の連分数で表わされる双曲的ファイバー二橋絡み目から帰納的に得る事が出来ない。よってこの場合も先に示しておく。

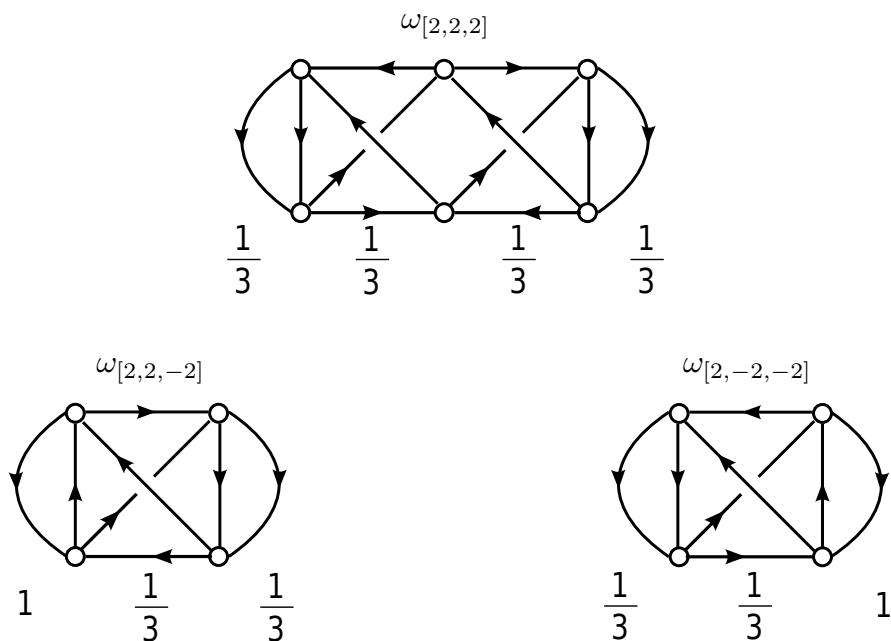


図 8

**補題 3.3.**  $m > 3$  とする。 $[2b_1, 2b_2, \dots, 2b_m]$  は  $1 \leq i \leq m-2$  の任意の  $i$  に対して、 $b_i = -b_{i+1}$  かつ  $b_m = b_{m-1}$  とする。この時連分数  $[2b_1, 2b_2, \dots, 2b_m]$  で表わされる双曲的ファイバー二橋絡み目の canonical 1-cocycle  $\omega_{[2b_1, 2b_2, \dots, 2b_m]}$  は次の図 9 で示されるものである。

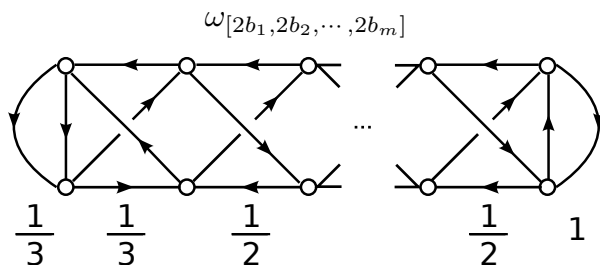


図 9

以上により準備が出来た。後は帰納的に  $L([2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{m-1}])$  の canonical 1-cocycle から  $L([2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{m-1}, 2b_m])$  の canonical 1-cocycle を求めることが出来る。

**補題 3.4.**  $m > 3$  とする。 $L([2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{m-1}])$  の canonical 1-cocycle の左端が図 10 (又は図 11) のように表わされているとする。この時  $2b_{m-1} = 2b_m$  ならば  $L([2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{m-1}, 2b_m])$  の canonical 1-cocycle は図 10 (又は図 11) の左端を除く



て図 12 (又は図 13) とする事で得られる。また  $2b_{m-1} = -2b_m$  ならば図 10 (又は図 11) の左端を除いて図 14 (又は図 15) とする事で得られる。ただし  $L([2b_1, 2b_2, \dots, 2b_{m-1}])$  の canonical 1-cocycle の左端で辺の向きが全て図 10 (又は図 11) と逆ならば, 置き換えるものも辺の向きを全て逆にしたものとなる。

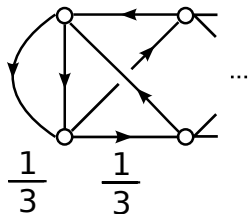


図 10

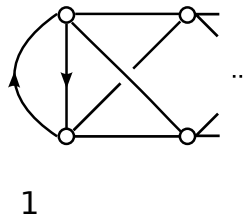


図 11

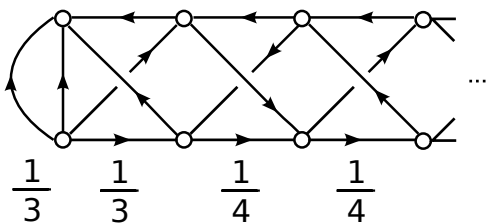


図 12

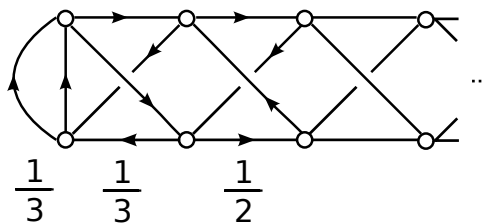


図 13

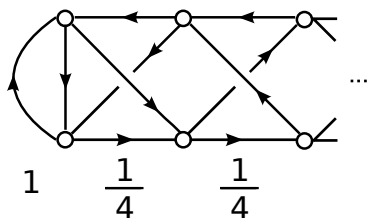


図 14

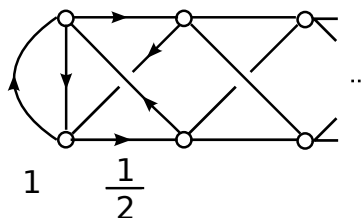


図 15

## 参考文献

- [1] H. Akiyoshi, *On the Ford domains of once-punctured torus groups*, in *Hyperbolic spaces and related topics*. Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku No. 1104 (1999), 109-121.
- [2] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, Y. Yamashita: *Punctured Torus Groups and 2-Bridge Knot Groups I*. Lec. Notes in Math. 1909, Springer (2007).
- [3] D. B. A. Epstein and R. C. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*. J. Differential Geom. Volume 27, Number 1 (1988), 67- 80.

- [4] D. Gabai, *Detecting fibred links in  $S^3$* . Comment. Math. Helv. 61 (1986), no. 4, 519-555.
- [5] C. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*. J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 2, 371-415.
- [6] F. Guéritaud, *On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements*. Geom. Topol. 10 (2006), 1239-1284, With an appendix by D. Futer.
- [7] T. Jørgensen, *On pairs of once-punctured tori*. Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001), 183-207, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 299, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [8] K. Murasugi, *On a certain subgroup of the group of an alternating link*. Amer. J. Math. 85 1963 544-550.
- [9] M. Sakuma and J. Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*. Japan. J. Math. (N.S.) 21 (1995), no. 2, 393-439.
- [10] J. Weeks, *Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic 3-manifolds*. Topology Appl. 52 (1993), no. 2, 127-149.