

Ford domains of quasi-fuchsian once-punctured Klein bottle groups

風呂川 幹央 (広島大学 大学院理学研究科数学専攻 博士課程前期 2 年)

概要

Jørgensen は一点穴開きトーラス擬フックス群のフォード領域の組合せ構造を完全に記述した ([5],[1]). ここでは, 一点穴開きクラインボトル擬フックス群のフォード領域の組合せ構造に関する研究の途中経過報告を行う.

1 一点穴開きクラインボトルフックス群

K を一点穴開きクラインボトルとする. K は図 1 のように, 頂点を除いた四角形の対辺を, 一方は向きを保つ, もう一方は向きを反転する同一視により得られる向き付け不可能な曲面である. 以下特に断りがない限り, $a, b, \omega = aba^{-1}b$ を図 1 の閉曲線またはそれが表す基本群の元とする.

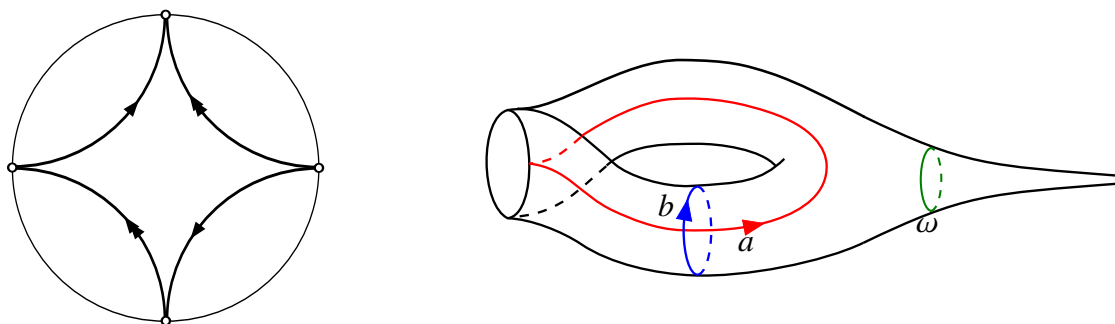


図 1: 一点穴開きクラインボトル

定義 1.1. 表現 $\rho : \pi_1(K) \rightarrow \text{Isom}^+ \mathbb{H}^3$ が以下を満たすとき, **型保存表現 (type-preserving representation)** という.

- (i) 周辺の単純閉曲線 ω に対して, $\rho(\omega)$ は放物的変換である.
- (ii) ρ は既約である.

型保存表現全体の空間を $\text{Hom}_{\text{TP}}(\pi_1(K), \text{Isom}^+ \mathbb{H}^3)$ で表す.

$\text{Isom}^+\mathbb{H}^3$ の $\text{Hom}_{\text{TP}}(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ への作用を共役作用とする. 2つの型保存表現 ρ, ρ' が $\text{Isom}^+\mathbb{H}^3$ による作用で移り合うとき, ρ と ρ' は**同値**であるという.

$\text{Isom}^+\mathbb{H}^3$ は $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ と同型である. そのため, 各 $\rho \in \text{Hom}_{\text{TP}}(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ の持ち上げ $\tilde{\rho} \in \text{Hom}_{\text{TP}}(\pi_1(K), \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ が存在する. ここで, $\pi_1(K) = \langle a, b \mid - \rangle$ と基本群の生成元を固定すると $\tilde{\rho} \in \text{Hom}_{\text{TP}}(\pi_1(K), \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ は $(\tilde{\rho}(a), \tilde{\rho}(b)) \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C})$ により決まる. 一方で, $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ の2つの元 A, B により生成される群は, トレースの3つ組 $(\text{tr}A, \text{tr}AB, \text{tr}B)$ で決まることが知られている ([4, Theorem A]). 従って, 持ち上げによる自由度に気をつければ, 次がわかる.

補題 1.2. $\text{Hom}_{\text{TP}}(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)/\text{Isom}^+\mathbb{H}^3 \cong \chi(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3) \sqcup \chi'(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$

ただし, $\chi(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3) = \{(p, q, r) \in \mathbb{C}^3 \mid p^2 + q^2 + 4 = pqr, r \neq 0\} / \sim$

$\chi'(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3) = \{(p, q, r) \in \mathbb{C}^3 \mid p^2 + q^2 = pqr, r \neq \pm 2\} / \sim$

ここで, $(p, q, r) \sim (-p, -q, r) \sim (-p, q, -r) \sim (p, -q, -r)$

$\text{Hom}_{\text{TP}}(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)/\text{Isom}^+\mathbb{H}^3$ は $\chi(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ と $\chi'(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ の非交和となるが, 次の補題により本質的であるのは $\chi(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ である.

補題 1.3. $\chi'(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ の任意の表現は非離散的である.

$\chi(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ について, 等長的半球面の性質 ([1, Lemma 4.1.1], [7]) を用いれば, 具体的に, 基本群の生成元である a, b の行き先をトレースを用いて表せる.

補題 1.4. 表現 $\rho \in \chi(\pi_1(K), \text{Isom}^+\mathbb{H}^3)$ に対して $pi := \text{tr}\rho(a)$, $qi := \text{tr}\rho(ab)$, $r := \text{tr}\rho(b)$, $\rho(\omega) : z \mapsto z + 2$ とすると,

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} pi & \frac{2}{(pr-qr)}i \\ \frac{(pr-qr)}{2}i & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} \frac{p}{pr-q} & \frac{4}{(pr-q)^2r} \\ r & r - \frac{p}{pr-q} \end{pmatrix}$$

次に, フックス群を定義する.

定義 1.5. 本質的に2次元の型保存表現, すなわち, $\rho(a) \in \text{Isom}^-\mathbb{H}^2$, $\rho(b) \in \text{Isom}^+\mathbb{H}^2$ となる表現 $\rho : \pi_1(K) \rightarrow \text{Isom}\mathbb{H}^2$ を**実表現**と呼ぶ.

補題 1.2 と同様にトレースによる対応を考えることにより, 実表現の同値類全体の空間は $\{(p, q, r) \in \mathbb{R}_+^3 \mid p^2 + q^2 + 4 = pqr, r \neq 0\} \sqcup \{(p, q, r) \in \mathbb{R}_+^3 \mid p^2 + q^2 = pqr, r \neq \pm 2\}$ と同一視できる. $\mathcal{R}(K) = \{(p, q, r) \in \mathbb{R}_+^3 \mid p^2 + q^2 + 4 = pqr, r \neq 0\}$ とする.

定義 1.6. 実表現が離散的かつ忠実であるとき, **フックス表現**と呼ぶ. また, フックス表現による基本群の像を**一点穴開きクライントルフックス群**と呼ぶ. 一点穴開きクライントルフックス群の同値類全体の空間を $\mathcal{F}(K)$ で表す.

補題 1.3 より, $\mathcal{F}(K) \subset \mathcal{R}(K)$ である.

本報告では, $\mathcal{F}(K) = \mathcal{R}(K)$ であることを, $\mathcal{R}(K)$ のフォード領域を具体的に構成することにより証明する. また, フォード領域の組合せ構造を記述する (定理 3.1).

2 諸定義

この章では、主結果を正確に述べるために必要な諸定義を記述する。
まず、フォード領域を構成するために等長的半球面の定義を述べる。

定義 2.1. H_∞ を $H_\infty \cap \gamma^{-1}(H_\infty) \neq \emptyset$ を満たす中心 ∞ のホロ球とする。 $\gamma(\infty) \neq \infty$ となる \mathbb{H}^3 の等長変換 γ に対して、 γ の **等長的半球面** $Ih(\gamma)$ とは、以下で定義される \mathbb{H}^3 の超平面である。

$$Ih(\gamma) := \{x \in \mathbb{H}^3 \mid d(x, H_\infty) = d(x, \gamma^{-1}(H_\infty))\}$$

$Ih(\gamma)$ はユークリッド計量に関しては、 \mathbb{C} に中心を持つ開半球面である。この中心を $c(\gamma)$ 、ユークリッド半径を $r(\gamma)$ で表す。

また、等長的球面を境界とする2つの半空間のうち ∞ を含むものを $Eh(\gamma)$ で表す。

$$Eh(\gamma) := \{x \in \mathbb{H}^3 \mid d(x, H_\infty) \leq d(x, \gamma^{-1}(H_\infty))\}$$

これにより、フォード領域は以下のように定義される。

定義 2.2. $\Gamma < \text{Isom}^+ \mathbb{H}^3$ をクライン群とする。 Γ の **フォード領域** $Ph(\Gamma)$ とは、以下で定義される \mathbb{H}^3 の多面体である。

$$Ph(\Gamma) := \bigcap \{Eh(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty\}$$

ただし、 $\Gamma_\infty := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\infty) = \infty\}$

最後に、弧複体 (arc complex) の定義を述べる。

定義 2.3. K の**弧複体** $\mathcal{D}(K)$ とは、以下で定義される複体である。

0 単体を K 内のプロパー単純弧のイソトピー類 $[v_1]$ とし、 $(n+1)$ 個の 0 単体 $[v_1], \dots, [v_{n+1}]$ に対して、 K 内で互いに交わらない代表元が存在するとき、 $(n+1)$ 個の 0 単体 $[v_1], \dots, [v_{n+1}]$ は n 単体を張るとする。

$\mathcal{D}^{(i)}(K)$ で i 単体全体の集合とする。特に、0 単体を頂点、1 単体を辺、2 単体を三角形と呼ぶ。

ここで、プロパー単純弧と本質的単純閉曲線は 1 対 1 の対応があること、本質的単純閉曲線は $b, ab^n, (ab^n)^2$ だけしかないこと ([6],[8]) に注意すれば、プロパー単純弧も $b, ab^n, (ab^n)^2$ しかないことがわかる。すなわち、 $\mathcal{D}(K)$ の頂点は $b, ab^n, (ab^n)^2$ である。さらに、いつ交わらないかを個々に見ていくと、 $\mathcal{D}(K)$ は図 2 のようになる。

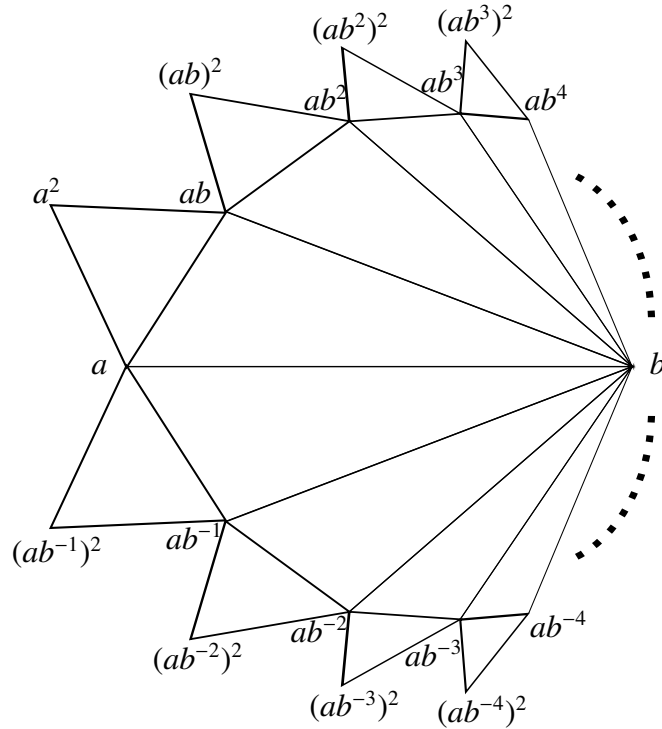


図 2: arc complex $\mathcal{D}(K)$

3 主結果とその証明の概要

定理 3.1 (主結果). $\mathcal{F}(K) = \mathcal{R}(K)$ である. すなわち, $\mathcal{R}(K)$ の任意の元の代表元は離散的かつ忠実である. さらに, 同相写像 $\nu: \mathcal{F}(K) \rightarrow |\mathcal{D}(K)| - \partial|\mathcal{D}(K)|$ が存在し, $\mathcal{F}(K)$ の各元 Γ のフォード領域の組み合わせ構造は $\nu(\Gamma)$ により決定される.

以下, 定理 3.1 の証明の流れを述べる.

フォード領域はある等長的半球面の一部を面として持つ多面体である. そこで, どの等長的半球面の一部がフォード領域の面として現れるか, フォード領域の面の候補を求めるためのパラメータを以下で定義する.

定義 3.2. ∞ を固定しない \mathbb{H}^3 の等長変換 X, Y, Z が $c(Y) < c(X) < c(Z)$, $Ih(X) \cap Ih(Y) \neq \emptyset$, $Ih(X) \cap Ih(Z) \neq \emptyset$ を満たしているとする. $\epsilon \in \{+, -\}$ とする. このとき *side parameter* $\theta^\epsilon(X; Y, Z)$ とは, 以下で定まる角度である (図 3,4).

$$\theta^\epsilon(X; Y, Z) := \arg \frac{\nu^\epsilon(X, Y) - c(X)}{\nu^\epsilon(Z, X) - c(X)}$$

ただし, $\nu^\epsilon(A, B)$ は $\partial Ih(A)$ と $\partial Ih(B)$ の交点のうち

$$\epsilon \arg \frac{\nu(A, B) - c(B)}{c(A) - c(B)}$$

が正の点である.

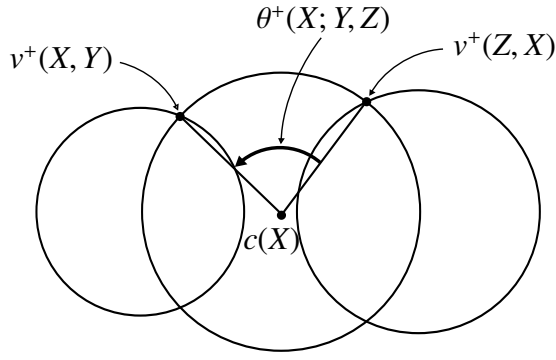


図 3: side parameter (正の場合)

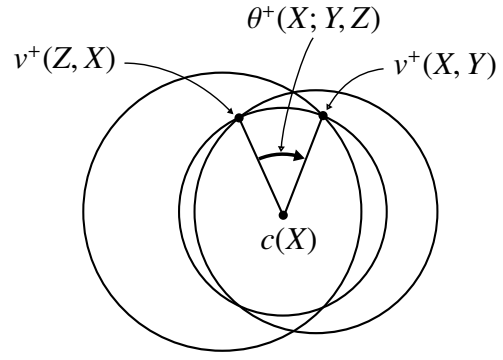


図 4: side parameter (負の場合)

実表現の場合 $\theta^+(X; Y, Z) = \theta^-(X; Y, Z)$ となるので, 単に $\theta(X; Y, Z)$ で表す.

図 4 にあるように, side parameter が負の場合は $Ih(X)$ は両隣の $Ih(Y)$, $Ih(Z)$ によって覆い隠されてしまう. よって, 負の場合はフォード領域の面としては現れない. 逆に, 図 3 にあるように, side parameter が正の場合は $Ih(X)$ は両隣の $Ih(Y)$, $Ih(Z)$ によって覆い隠されない. このことより, side parameter が正となる等長的半球面がフォード領域の面の候補となる.

以下, $\mathcal{R}(K)$ の元 ρ に対して, $A_\rho := \rho(a)$, $B_\rho := \rho(b)$, $K_\rho := \rho(\omega)$ とする. 補題 1.2, 補題 1.4 及び $\mathcal{R}(K)$ の定義より, 等長的半球面の中心及び半径が $(p, q, r) \in \mathbb{R}_+^3$ の 3 つ組により決まる. 特に, 全ての等長的半球面の中心は実軸上にある. さらに, その並び順も次のように定まる.

補題 3.3. 任意の $\rho \in \mathcal{R}(K)$ 及び, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$c(B_\rho) < c(A_\rho B_\rho^{n+1}) < c(A_\rho B_\rho^n) < c(B_\rho^{-1}) < c((A_\rho B_\rho^n)^{-1}) < c((A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}) \quad (1)$$

$$c(A_\rho B_\rho^{n+1}) < c((A_\rho B_\rho^n)^2) < c(A_\rho B_\rho^n) < c((A_\rho B_\rho^n)^{-1}) < c((A_\rho B_\rho^n)^{-2}) < c((A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}) \quad (2)$$

また, これらの前後の等長的半球面は平行移動 K_ρ による像である.

これにより, 隣り合う等長的半球面がわかるので, これらに関する side parameter が正になる条件を求めることにより, フォード領域の面の候補が求められる. 補題 3.3 で等長的半球面の並び順を 2 つの場合に分けたのは, 次に示す補題にあるように, $Ih(B_\rho)$ が候補となる場合と, $Ih((A_\rho B_\rho^n)^2)$ が候補となる場合の 2 つの場合があるからである.

補題 3.4. 任意の $\rho \in \mathcal{R}(K)$ 及び, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

1. $Ih(B_\rho)$ が候補となる場合

- $\theta(B_\rho; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, A_\rho B_\rho^{n+1}) = \theta(B_\rho^{-1}; A_\rho B_\rho^n, (A_\rho B_\rho^n)^{-1}) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1} \text{tr} A_\rho B_\rho^n \text{tr} B_\rho \geq 8$

- $\theta(A_\rho B_\rho^n; A_\rho B_\rho^{n+1}, B_\rho^{-1}) = \theta((A_\rho B_\rho^n)^{-1}; B_\rho^{-1}, (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \text{tr} A_\rho B_\rho^{n+1} \geq \text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1}$
- $\theta(A_\rho B_\rho^{n+1}; B_\rho, A_\rho B_\rho^n) = \theta((A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}; (A_\rho B_\rho^n)^{-1}, B_\rho K_\rho^{-1}) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \text{tr} A_\rho B_\rho^{n-2} \geq \text{tr} A_\rho B_\rho^n$

2. $Ih((A_\rho B_\rho^n)^2)$ が候補となる場合

$$\theta((A_\rho B_\rho^n)^2; A_\rho B_\rho^{n+1}, A_\rho B_\rho^n) = \theta((A_\rho B_\rho^n)^{-2}; (A_\rho B_\rho^n)^{-1}, (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1} \text{tr} A_\rho B_\rho^n \text{tr} B_\rho \leq 8$$

また, $\text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1} \text{tr} A_\rho B_\rho^n \text{tr} B_\rho \leq 8$ となる $n \in \mathbb{Z}$ は存在するならば一意的である.

加えて, このとき

$$\theta(A_\rho B_\rho^n; (A_\rho B_\rho^n)^2, (A_\rho B_\rho^n)^{-1}) = \theta((A_\rho B_\rho^n)^{-1}; A_\rho B_\rho^n, (A_\rho B_\rho^n)^{-2}) \geq 0$$

$$\theta(A_\rho B_\rho^{n+1}; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, (A_\rho B_\rho^n)^2) = \theta((A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}; (A_\rho B_\rho^n)^{-2}, A_\rho B_\rho^{n+1} K_\rho^{-1}) \geq 0$$

である.

この補題により, $(\rho(\pi_1(K)))$ が離散的でフォード領域が存在するならば) フォード領域の面の候補となる条件をトレースによるパラメータで表すことができた. さらに $\text{tr} A_\rho B_\rho^{n+1} \geq \text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1}$, $\text{tr} A_\rho B_\rho^{n-2} \geq \text{tr} A_\rho B_\rho^n$ は弧複体 $\mathcal{D}(K)$ における “sink” という条件と一致する. 以下, その “sink” の定義を説明する.

弧複体の頂点は K 内のプロパー単純弧のイソトピー類であること, 及び, プロパー単純弧と本質的単純閉曲線は 1 対 1 の対応があることを注意すると, 弧複体の頂点は本質的単純閉曲線のイソトピー類とみなせる. さらに, 本質的単純閉曲線のイソトピー類は基本群の元なので, $\mathcal{R}(K)$ の表現 ρ により, $\text{Isom}\mathbb{H}^2$ の元と対応づけられ, 特に, トレースを考えることができる. ここで, $\mathcal{R}(K)$ の各元 ρ に対して, $\varphi_\rho: \mathcal{D}^{(0)}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ を弧複体の頂点 $[v]$ の行き先 $\varphi_\rho([v]) = |\text{tr}\rho([v])|$ により定義する.

この対応により, 弧複体の頂点に重みをつけることができる.

ここで, b を端点として持つ弧複体の辺の双対辺を考える. この双対辺に $\mathcal{R}(K)$ の表現 ρ を固定するごとに, 次のようにして向きをつける. e を $\langle ab^n, b \rangle$ の双対辺とする. このとき, e の端点はそれぞれ, $\langle ab^n, ab^{n+1}, b \rangle$, $\langle ab^{n-1}, ab^n, b \rangle$ に対応する. $\varphi_\rho(ab^{n-1}) < \varphi_\rho(ab^{n+1})$ であるとき $\langle ab^n, ab^{n+1}, b \rangle$ から $\langle ab^{n-1}, ab^n, b \rangle$ に向きを与える. 逆に, $\varphi_\rho(ab^{n-1}) > \varphi_\rho(ab^{n+1})$ であるとき $\langle ab^{n-1}, ab^n, b \rangle$ から $\langle ab^n, ab^{n+1}, b \rangle$ に向きを与える. これにより, トレースがより小さい方へと向きを与えられる. このようにして, 双対辺に向きを与えたとき, $\langle ab^n, ab^{n+1}, b \rangle$ を端点としてもつ $\langle ab^n, b \rangle$ と $\langle ab^{n+1}, b \rangle$ の双対辺がともに $\langle ab^n, ab^{n+1}, b \rangle$ のほうへ向き付けられているとき, $\langle ab^n, ab^{n+1}, b \rangle$ を *sink* という.

補題 3.5. $\mathcal{R}(K)$ の任意の元に対して, *sink* は唯一つ存在する.

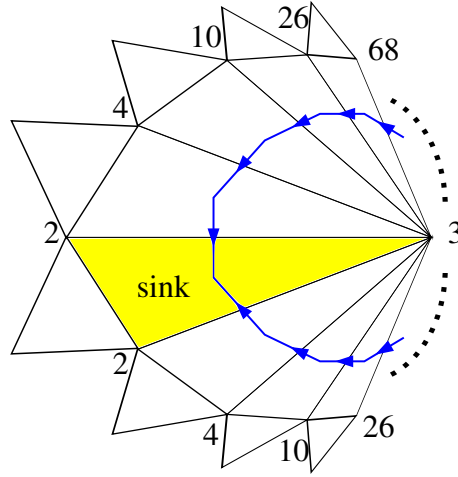


図 5: $\rho \in \mathcal{R}_{TP}(\pi_1(K), \text{Isom}\mathbb{H}^2) : (2, 4, 3)$ に対応する表現における sink

補題 3.5 は “trace identity” と呼ばれる, トレースに関する等式を用いて示される ([3]). sink を用いて, 先の補題 3.4 を言い直すと次のようになる.

補題 3.6. 任意の $\rho \in \mathcal{R}(K)$ 及び, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

1. $Ih(B_\rho)$ が候補となる場合

- $\theta(B_\rho; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, A_\rho B_\rho^{n+1}) = \theta(B_\rho^{-1}; A_\rho B_\rho^n, (A_\rho B_\rho^n)^{-1}) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1} \text{tr} A_\rho B_\rho^n \text{tr} B_\rho \geq 8$
- $\theta(A_\rho B_\rho^n; A_\rho B_\rho^{n+1}, B_\rho^{-1}) = \theta((A_\rho B_\rho^n)^{-1}; B_\rho^{-1}, (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}) \geq 0$ かつ
 $\theta(A_\rho B_\rho^{n+1}; B_\rho, A_\rho B_\rho^n) = \theta((A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}; (A_\rho B_\rho^n)^{-1}, B_\rho K_\rho^{-1}) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \langle ab^{n-1}, ab^n, b \rangle$ は sink

2. $Ih((A_\rho B_\rho^n)^2)$ が候補となる場合

$$\theta((A_\rho B_\rho^n)^2; A_\rho B_\rho^{n+1}, A_\rho B_\rho^n) = \theta((A_\rho B_\rho^n)^{-2}; (A_\rho B_\rho^n)^{-1}, (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1} \text{tr} A_\rho B_\rho^n \text{tr} B_\rho \leq 8$$

また, $\text{tr} A_\rho B_\rho^{n-1} \text{tr} A_\rho B_\rho^n \text{tr} B_\rho \leq 8$ となるならば, $\langle ab^{n-1}, ab^n, b \rangle$ は sink である.

加えて, このとき

$$\theta(A_\rho B_\rho^n; (A_\rho B_\rho^n)^2, (A_\rho B_\rho^n)^{-1}) = \theta((A_\rho B_\rho^n)^{-1}; A_\rho B_\rho^n, (A_\rho B_\rho^n)^{-2}) \geq 0$$

$$\theta(A_\rho B_\rho^{n+1}; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, (A_\rho B_\rho^n)^2) = \theta((A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1}; (A_\rho B_\rho^n)^{-2}, A_\rho B_\rho^{n+1} K_\rho^{-1}) \geq 0$$

である.

これにより, $\mathcal{R}(K)$ の各元に対して, 弧複体の三角形と対応づけられた. さらに, 次に示す補題により, その三角形内の 1 点と対応づけられる.

補題 3.7. 任意の $\rho \in \mathcal{R}(K)$ 及び、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\theta(B_\rho; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, A_\rho B_\rho^{n+1}) + \theta(A_\rho B_\rho^n; A_\rho B_\rho^{n+1}, B_\rho^{-1}) + \theta(A_\rho B_\rho^{n+1}; B_\rho, A_\rho B_\rho^n) = \pi$$

$$\theta((A_\rho B_\rho^n)^2; A_\rho B_\rho^{n+1}, A_\rho B_\rho^n) + \theta(A_\rho B_\rho^n; (A_\rho B_\rho^n)^2, (A_\rho B_\rho^n)^{-1}) + \theta(A_\rho B_\rho^{n+1}; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, (A_\rho B_\rho^n)^2) = \pi$$

これにより、三角形の重心座標が定まる。よって、 $\mathcal{R}(K)$ と $|\mathcal{D}(K)| - \partial|\mathcal{D}(K)|$ が対応づけられた。さらに、次に示す Poincaré の多面体定理 ([2, Theorem 10.11]) を用いることにより、主結果の残りの部分、すなわち補題 3.6 により得られる等長的半球面がフォード領域を構成すること、 $\mathcal{R}(K)$ の任意の元 ρ の代表元が離散的かつ忠実となることが示される。

定理 3.8 (Poincaré の多面体定理). X を多面体、等長変換群の部分群 Γ は X の面の同一視を与えているとする。さらに、以下の条件を満たすならば、 X は基本領域、 Γ は離散的かつ忠実となる。

- X の各辺 E について、 E と同一視される全ての辺における二面角の和は、 2π となる。
- X の各理想頂点 ξ について、 Γ により保存される中心 ξ のホロ球が存在する。

以上が証明の流れである。

4 一点穴開きクライントル擬フックス群

最後に、一点穴開きクライントル擬フックス群のフォード領域の研究に関する途中経過報告を述べる。そのためにまず、一点穴開きクライントル擬フックス群の定義を述べる。

定義 4.1. 型保存表現が擬等角写像によるフックス表現の共役となっているとき、**擬フックス表現**と呼ぶ。また、擬フックス表現による一点穴開きクライントルの基本群の像を**一点穴開きクライントル擬フックス群**と呼ぶ。一点穴開きクライントル擬フックス群の同値類全体の空間を $QF(K)$ で表す。

実表現の場合は $\theta^+(X; Y, Z) = \theta^-(X; Y, Z)$ となることを述べたが、一般の型保存表現の場合は $\theta^+(X; Y, Z) \neq \theta^-(X; Y, Z)$ である。しかしながら、補題 3.7 のように、ある side parameter の和は一定になる。

補題 4.2. 任意の $\rho \in \chi(\pi_1(K), \text{Isom}^+ \mathbb{H}^3)$ 及び、任意の $n, m \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\begin{aligned} & \theta^+(B_\rho; (A_\rho B_\rho^{m+1})^{-1} K_\rho, A_\rho B_\rho^{m+1}) + \theta^+(A_\rho B_\rho^n; A_\rho B_\rho^{m+1}, B_\rho^{-1}) + \theta^+(A_\rho B_\rho^{m+1}; B_\rho, A_\rho B_\rho^n) \\ & + \theta^-(B_\rho; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, A_\rho B_\rho^{n+1}) + \theta^-(A_\rho B_\rho^m; A_\rho B_\rho^{n+1}, B_\rho^{-1}) + \theta^-(A_\rho B_\rho^{n+1}; B_\rho, A_\rho B_\rho^m) = 2\pi \\ & \theta^+(B_\rho; (A_\rho B_\rho^{m+1})^{-1} K_\rho, A_\rho B_\rho^{m+1}) = \theta^-(B_\rho; (A_\rho B_\rho^{n+1})^{-1} K_\rho, A_\rho B_\rho^{n+1}) \end{aligned}$$

この補題で現れる等長的半球面は全て K の単純閉曲線と対応があることを注意しておく. この補題を用いることにより, これらの side parameter が正である場合は, ρ が擬フックス表現になることをフォード領域を構成することにより示した. 逆に, このようなパラメータが与えられたとき, フォード領域を構成することができ, 対応する擬フックス群が得られる.

当然の疑問として, これらのいずれかの side parameter が負になる場合はどうなるかということがある. ここでは $A_\rho B_\rho^n, A_\rho B_\rho^{n+1}, A_\rho B_\rho^m, A_\rho B_\rho^{m+1}, B_\rho$ の5つの side parameter を考えている. もし, $A_\rho B_\rho^n$ の side parameter が負になったとする. このとき, 等長的半球面の性質 ([1, Lemma 4.1.1]) により $A_\rho B_\rho^{n+2}$ の side parameter が正となり, 補題 4.2 の状況に帰着する. 同様に $A_\rho B_\rho^{n+1}, A_\rho B_\rho^m, A_\rho B_\rho^{m+1}$ についてもいずれか1つの side parameter が負になると, それぞれ $A_\rho B_\rho^{n-1}, A_\rho B_\rho^{m+2}, A_\rho B_\rho^{m-1}$ の side parameter が正となる. よって, B_ρ の side parameter が負になる, または $A_\rho B_\rho^n$ と $A_\rho B_\rho^{n+1}$ もしくは $A_\rho B_\rho^m$ と $A_\rho B_\rho^{m+1}$ の side parameter が同時に負にならない限り補題 4.2 の状況に帰着する.

補題 4.2 の状況に帰着しないものとして2つの場合があるが, まず B_ρ の side parameter が負になる場合から述べる. このとき, $A_\rho B_\rho^n A_\rho B_\rho^m$ の side parameter が正となる. $n = m$ ならば $A_\rho B_\rho^n A_\rho B_\rho^m$ は K の単純閉曲線に対応しているが, $n \neq m$ ならば $A_\rho B_\rho^n A_\rho B_\rho^m$ は K の単純閉曲線とは対応がない. そのため, 弧複体 $\mathcal{D}(K)$ との対応がなくなり, フックス群の場合と同様の手法がとれないため, 現在別の手法を模索しているところである.

次にもう一方の $A_\rho B_\rho^n$ と $A_\rho B_\rho^{n+1}$ もしくは $A_\rho B_\rho^m$ と $A_\rho B_\rho^{m+1}$ の side parameter が同時に負になる場合について述べる. どちらか一方の組が同時に0となる場合は, $\rho(b)$ が放物的変換となる. これについては現在研究中で, その概要を以下に述べる.

一点穴開きクライノトルの単純閉曲線は $b, ab^n, (ab^n)^2$ という3種類であることを注意する. $(ab^n)^2$ の行き先が放物的変換だとすると, ab^n の行き先も放物的変換となる. 一方で, ab^n の行き先が放物的変換となるとき, ab^{n-1} または ab^{n+1} の行き先は位数2の楕円変換となり, 本質的に two-parabolic group G_ω に一致する. このような群については既に詳細な研究がされている. そこで, b の行き先が放物的変換となる型保存表現 ρ を考える. このとき, $\text{tr}(\rho(b)) = 2$ となるので生成元の行き先は次のようになる.

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} pi & \frac{i}{p+2i} \\ (p+2i)i & 0 \end{pmatrix}, \rho(b) = \begin{pmatrix} \frac{p}{p+2i} & \frac{2}{(p+2i)^2} \\ 2 & 2 - \frac{p}{p+2i} \end{pmatrix}$$

この群がいつ離散的になるか, またフォード領域の組み合わせ構造については, 現在研究中である.

参考文献

- [1] Akiyoshi, H.; Sakuma, M.; Wada, M.; Yamashita, Y. : Punctured torus groups and 2-bridge knot groups. I. Lecture Notes in Mathematics, 1909. Springer, Berlin, 2007.

- [2] Bonahon, F. : Low-dimensional geometry. From Euclidean surfaces to hyperbolic knots. Student Mathematical Library, 49. IAS/Park City Mathematical Subseries. American Mathematical Society, Providence, RI; Institute for Advanced Study (IAS), Princeton, NJ, 2009.
- [3] Bowditch, B. H. : Markoff triples and quasi-Fuchsian groups. Proc. London Math. Soc. (3) 77 (1998), no. 3, 697-736.
- [4] Goldman, W. M. : Trace coordinates on Fricke spaces of some simple hyperbolic surfaces. Handbook of Teichmüller theory. Vol. II, 611-684, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 13, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.
- [5] Jørgensen, T. : On pairs of once-punctured tori.(English summary) Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001), 183-207, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 299, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [6] Raspopović, P. : Incompressible surfaces in punctured Klein bottle bundles.(English summary) Topology Appl. 49 (1993), no. 2, 95-113.
- [7] Sakuma, M. : Unknotting tunnels and canonical decompositions of punctured torus bundles over a circle. Analysis of discrete groups (Kyoto, 1995). Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku No. 967 (1996), 58-70.
- [8] Scharlemann, M. : The complex of curves on nonorientable surfaces. J. London Math. Soc. (2) 25 (1982), no. 1, 171-184.