

# Lattice knots and links in tube

(下川航也氏 (埼玉大学), 鈴木敦美氏 (埼玉大学) との共同研究)

石原海 (山口大学)

〒 753-8513 山口市吉田 1677-1

kisihara@yamaguchi-u.ac.jp

## 1 はじめに

図 1 のように単純立方格子上的絡み目を格子絡み目 (lattice link) という。2つの格子点を結ぶ長さ 1 の辺をステップ (step) という。絡み目型  $\mathcal{K}$  に対して、格子結び目で  $\mathcal{K}$  を作るのに必要な最小の長さ (ステップの本数) を考える。これを最小ステップ数といい、 $\ell(\mathcal{K})$  で表す。格子絡み目を構成しているステップの本数は常に偶数であるので、最小ステップ数も偶数になる。例えば、明らかに  $\ell(0_1) = 4$ ,  $\ell(2_1^2) = 16$  である。また、 $\ell(3_1) = 24$  [1],  $\ell(4_1) = 30$  [7] も知られている。図 1 は 24 ステップで構成された格子  $3_1$  結び目を表している。[6] では [1] の方法を発展させ、最小ステップ数決定のための理論的アルゴリズムを与えている。また、10 交点以下の結び目に対して、最小ステップ数の上界を与えている。

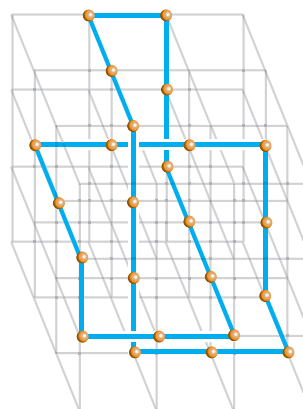


図 1: 格子結び目

次に、格子絡み目を制限した領域で考える。 $z$  方向の高さを  $n$  に制限した領域を  $n$ -slab という。絡み目型  $\mathcal{K}$  に対して、 $n$ -slab 内の格子結び目で  $\mathcal{K}$  を作るのに必要な最小の長さを考える。これを  $n$ -slab 内での最小ステップ数といい、 $\ell_n(\mathcal{K})$  で表す。定義から明らかに  $\ell(\mathcal{K}) \leq \ell_n(\mathcal{K})$  である。[2] では、slab 内での [6] と同様の結果を得るとともに、 $\ell_1(3_1) = 26$  であることを示している。

ここでは、 $n$ -slab に関して、さらに  $y$  方向の幅を  $m$  に制限した領域  $(m \times n)$ -tube 内の格子絡み目を考える。絡み目型  $\mathcal{K}$  に対して、 $(m \times n)$ -tube 内の格子結び目で  $\mathcal{K}$  を作るのに必要な最小の長さを考える。これを  $(m \times n)$ -tube 内での最小ステップ数といい、 $\ell_{m \times n}(\mathcal{K})$  で表す。定義から明らかに  $\ell_n(\mathcal{K}) \leq \ell_{m \times n}(\mathcal{K})$  である。しかし、ここで slab を考えているときには無かった問題がおこる。どんな絡み目も 1-slab に、

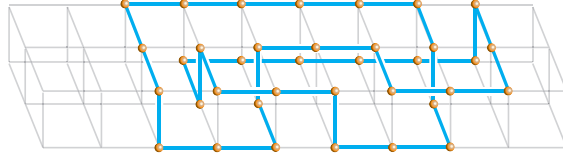


図 2:  $(2 \times 1)$ -tube 内の格子結び目

したがってどんな slab にも、格子絡み目として構成することができた。ところが、 $(m \times n)$ -tube には格子絡み目として構成できない絡み目が存在する。実際、系 2.2 はその例を示している。そこで、2 章では  $(m \times n)$ -tube に格子絡み目として構成できる絡み目について考える。例えば、最も簡単な  $(1 \times 1)$ -tube 内の格子絡み目はすべて自明である。次に簡単な  $(2 \times 1)$ -tube は、すべての 2 橋絡み目を格子絡み目として含む (系 2.3)。例えば、図 2 は  $(2 \times 1)$ -tube 内に構成された格子  $3_1$  結び目である。そこで 3 章では、2 橋絡み目に関して  $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数を考え、10 交点以下の 2 橋結び目、9 交点以下の 2 成分 2 橋絡み目について  $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数を与える (表 1)。尚、この詳しい内容については [3, 4] で発表予定である。

## 2 $(m \times n)$ -tube 内の格子絡み目

絡み目型  $\mathcal{K}$  に対して、 $\mathcal{K}$  が  $(m \times n)$ -tube 内に格子絡み目として構成できるとき、 $\mathcal{K}$  は  $(m \times n)$ -tube に埋め込み可能ということにする。この章では、どんな絡み目が  $(m \times n)$ -tube に埋め込み可能であるかを考える。その準備のために、 $trunk$  は以下で定義される [5]。

$$trunk(\mathcal{K}) \stackrel{def}{=} \min_{h \in \mathcal{H}} \max_{t \in \mathbb{R}} |h^{-1}(t) \cap \mathcal{K}|,$$

ただし、 $\mathcal{H}$  は特異点無しのもース関数  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  全体の集合である。 $trunk(\mathcal{K})$  は常に偶数である。また、 $trunk(\mathcal{K}) < M$  であることは、 $\mathcal{K}$  が  $M$  未満の偶数ひものブレイドたちを用いた図 3 のような表示を持つと言い換えることができる。

特に、 $b(\mathcal{K})$  で  $\mathcal{K}$  の橋指数を表せば、 $trunk(\mathcal{K}) \leq 2b(\mathcal{K})$  が成り立つ。この  $trunk$  を用いて次の定理 2.1 を得る。

定理 2.1. 絡み目型  $\mathcal{K}$  に対して、以下が成り立つ。

$$\mathcal{K} \text{ は } (m \times n)\text{-tube に埋め込み可能} \Leftrightarrow trunk(\mathcal{K}) < (m + 1)(n + 1)$$

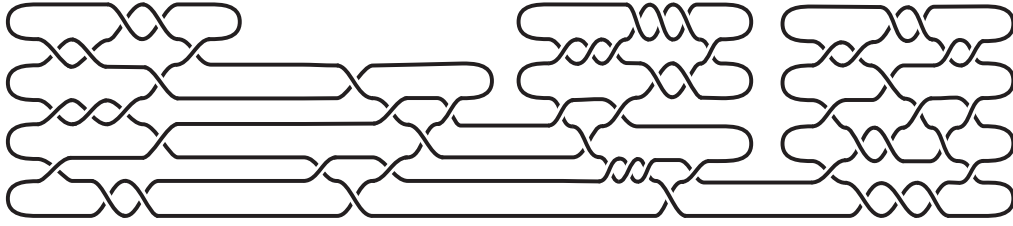


図 3: trunk が 8 以下の絡み目

この定理により、 $(m \times n)$ -tube に埋め込み不可能な絡み目があることがわかる。特に、 $(p, q)$  型のトーラス絡み目  $T(p, q)$  に対して、 $\text{trunk}(T(p, q)) = 2 \min\{|p|, |q|\}$  であるので、次の系 2.2 を得る。

系 2.2. 整数  $p, q$  が  $|p|, |q| \geq \frac{(m+1)(n+1)}{2}$  を満たすとき、 $T(p, q)$  は  $(m \times n)$ -tube 内に埋め込み不可能である。

定理 2.1 を  $m = 2, n = 1$  に対して考えると、次の系 2.3 を得る。

系 2.3. 絡み目型  $\mathcal{K}$  に対して、以下が成り立つ。

$\mathcal{K}$  は  $(2 \times 1)$ -tube に埋め込み可能

$\Leftrightarrow \mathcal{K}$  は自明絡み目、2橋絡み目、2橋絡み目の連結和、またはそれ等の分離和

3章では2橋絡み目について  $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数を考える。

定理 2.1 の証明の概要:

簡単のために  $M := (m + 1)(n + 1)$  と置くことにする。

$\Rightarrow$   $K$  を  $(m \times n)$ -tube 内の格子絡み目とし、 $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  を  $x$  軸への射影とする。  $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  とすると平面  $h^{-1}(t)$  と  $(m \times n)$ -tube 内の  $x$  方向のステップたちとの交わりは  $M$  なので、 $K$  を構成している  $y$  方向、 $z$  方向のステップを少し滑らかにすることで、 $\text{trunk}(K) \leq M$  がわかる。  $|h^{-1}(t) \cap K| = M$  となる場合は、図 4 のような局所変形により解消できるので、 $\text{trunk}(K) < M$  がわかる。

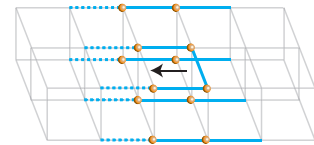


図 4:  $|h^{-1}(t) \cap K| = M$

$\Leftarrow$  ブレイドを  $(m \times n)$ -tube 内にステップを用いて構成することを考える。すると次の (1), (2) を示すことができる。

(1)  $(M - 2)$  ひも以下の任意のブレイドが  $(m \times n)$ -tube 内に構成できる。

(2) 偶置換に対応する任意の  $(M - 1)$  ひもブレイドが  $(m \times n)$ -tube 内に構成できる。

(1) を示すには、すべての初等ブレイド  $\sigma_i$  が  $(m \times n)$ -tube 内に構成できることを示せば良い。また、(2) を示すには、 $\sigma_i^2$  と  $\sigma_i \sigma_{i+1}$  を  $(m \times n)$ -tube 内に構成できることを示せば良い。図 5 はその具体例で  $\sigma_3^2$  と  $\sigma_4 \sigma_5$  を示している。

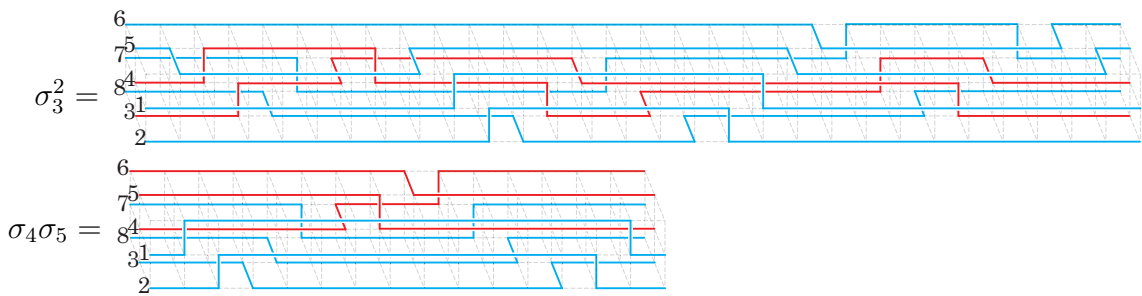


図 5:  $(M - 1)$  ひもブレイド

$M$  が偶数のとき、 $\text{trunk}(\mathcal{K}) < M$  なる  $\mathcal{K}$  は、 $(M - 2)$  ひも以下のブレイドたちによる図 3 のような表示をもつ。(1) より、それぞれのブレイドは  $(m \times n)$ -tube 内に構成できるので、 $\mathcal{K}$  は  $(m \times n)$ -tube に埋め込み可能である。

$M$  が奇数のとき、 $\text{trunk}(\mathcal{K}) < M$  なる  $\mathcal{K}$  は、 $(M - 1)$  ひも以下のブレイドたちによる図 3 のような表示をもつ。もし、その中に奇置換に対応する  $(M - 1)$  ひもブレイドがあれば、図 6 のように無駄な捻りを加えることにより、 $(M - 1)$  ひもブレイドはすべて偶置換に対応するようになる。すると (1) と (2) より、すべてのブレイドは  $(m \times n)$ -tube 内に構成でき、 $\mathcal{K}$  は  $(m \times n)$ -tube に埋め込み可能である。 □

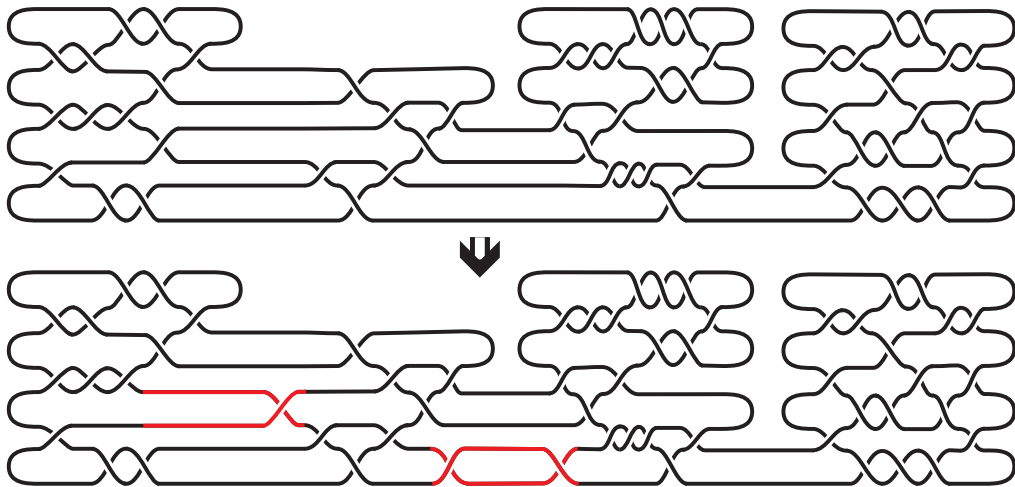


図 6: 偶置換に対応するブレイドへの変形

### 3 $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数

この章では、2橋絡み目  $\mathcal{K}$  の  $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数  $\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$  を考える。まず、 $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数の上界として、次の定理 3.1 を得る。

定理 3.1.  $\mathcal{K}$  が長さが  $(2n - 1)$  の Conway の標準形  $C(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$  で表されるとき、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) &\leq 12|a_1| + 4\varepsilon_1 - 4 && (n = 1) \\ \ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) &\leq 12 \sum_{i=1}^n |a_i| + 18 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 6 \sum_{i=1}^{2n-2} s_i \\ &\quad + 4 \left( -\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i - \varepsilon_n \right) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \delta_i - 12n + 16 && (n \geq 2) \end{aligned}$$

ただし、 $s_i, \varepsilon_i, \delta_i$  は以下の式により  $a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n$  から決まる。

$$s_i = \begin{cases} \operatorname{sgn}(a_j b_j) & (i = 2j - 1) \\ \operatorname{sgn}(b_j a_{j+1}) & (i = 2j) \end{cases}, \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & (a_i: \text{偶数}) \\ 1 & (a_i: \text{奇数}) \end{cases},$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & (\operatorname{sgn}(b_{i-1}), a_i, \operatorname{sgn}(b_i)) = \pm(1, -1, 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

この定理 3.1 を最小交点 (交代) 図式に対応する Conway の標準形に適用すれば、次の系 3.2 を得る。

系 3.2.  $\mathcal{K}$  が  $c$  交点 2 橋絡み目であるとき、次の不等式が成り立つ。

$$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) \leq 17c - 10$$

定理 3.1 は Conway の標準形に対して、それに対応する格子絡み目を実際に構成することにより得られる。例えば、図 7 は  $C(3, -1, -2, 2, 1)$  に対応する格子結び目である。詳しくは [4] を参照されたい。

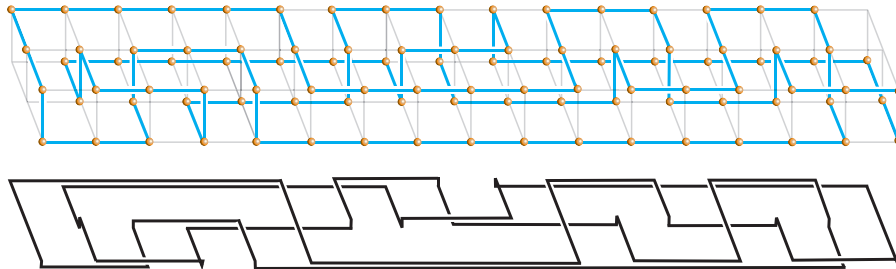


図 7:  $C(3, -1, -2, 2, 1) = 7_6$

このようにして構成した格子絡み目は最小ステップ数の上界を与えている。さらに、各2橋絡み目に対して、この構成した格子絡み目の中に最小ステップ数を実現するものがあることがわかり、次の定理 3.3 を得る。

定理 3.3. 非自明2橋絡み目  $\mathcal{K}$  に対して、以下を満たす整数列  $a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n$  が存在する。Conwayの標準形  $C(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$  は  $\mathcal{K}$  を表し、さらに次を満たす。

$$\begin{aligned} \ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) &= 12|a_1| + 4\varepsilon_1 - 4 & (n = 1) \\ \ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) &= 12 \sum_{i=1}^n |a_i| + 18 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 6 \sum_{i=1}^{2n-2} s_i \\ &\quad + 4 \left( -\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i - \varepsilon_n \right) - 12n + 16 & (n \geq 2) \end{aligned}$$

定理 3.3 の式に関連して次の補題 3.4 を得る。

補題 3.4.  $C(a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, a_n)$  の最小交点数を  $c$  とすると、以下の不等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{s_i - 1}{2} \geq c$$

ここで、

$$\begin{aligned} & 12 \sum_{i=1}^n |a_i| + 18 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 6 \sum_{i=1}^{2n-2} s_i \\ & \quad + 4 \left( -\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i - \varepsilon_n \right) - 12n + 16 \\ = & 12 \left( \sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{s_i - 1}{2} \right) \\ & \quad + 6 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 4 \left( -\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i - \varepsilon_n \right) + 4 \\ \geq & 12c + 6 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 4 \left( -\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i - \varepsilon_n \right) + 4 \end{aligned}$$

に注意する。  $6 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 4 \left( -\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i - \varepsilon_n \right) + 4$  の最小値を与えるのは、  $n = 2, |b_1| = 1$  で  $a_1$  と  $a_2$  がどちらも奇数の場合である。これは  $\mathcal{K}$  が種数1の2橋結び目であるときで、このとき、  $\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) = 12c + 2$  となることから、次の定理 3.5 を得る。

定理 3.5. (1)  $T(2, c)$  を  $(2, c)$  型のトーラス絡み目 ( $c \geq 2$ ) とすると、以下の等式が成り立つ。

$$\ell_{2 \times 1}(T(2, c)) = \begin{cases} 12c - 4 & (c: \text{偶数}) \\ 12c & (c: \text{奇数}) \end{cases}$$

(2)  $\mathcal{K}$  を種数1の  $c$  交点2橋結び目 ( $c \geq 4$ ) とすると、以下の等式が成り立つ。

$$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) = 12c + 2$$

(3)  $\mathcal{K}$  を (1) でも (2) でもない  $c$  交点 2 橋絡み目 ( $c \geq 5$ ) とすると、以下の不等式が成り立つ。

$$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K}) \geq 12c + 6$$

また、 $6 \sum_{i=1}^{n-1} |b_i| + 4 \left( -\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon_i - \varepsilon_n \right) + 4$  が小さくなるような Conway の標準形から順に、どの 2 橋絡み目を表すか調べることにより、表 1 を得る。表 1 では、10 交点以下のすべての 2 橋結び目と 9 交点以下のすべての 2 成分 2 橋絡み目に対して、 $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数を与えている。表にはない交点の大きな 2 橋絡み目に関しては、定理 3.5 より、11 交点以上の 2 橋結び目では 144 以上、10 交点以上の 2 成分 2 橋絡み目では 116 以上であることもわかる。

図 8 は、交点数の小さい  $2_1^2, 3_1, 4_1^2, 4_1$  に対して、最小ステップ数を実現する格子絡み目を示している。

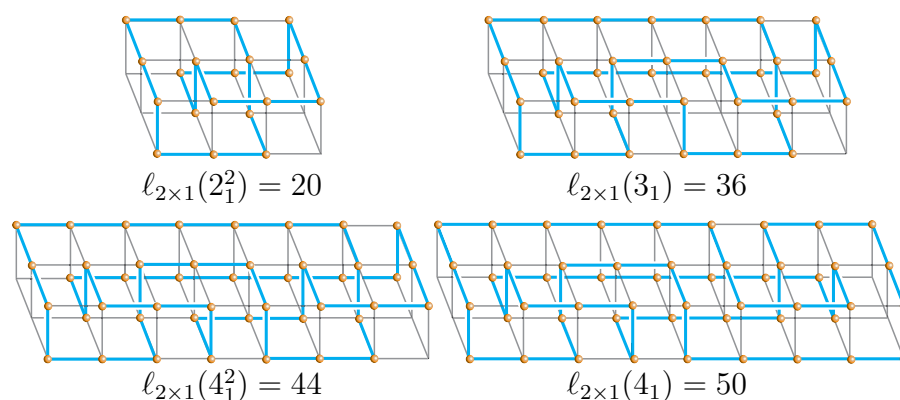


図 8:  $(2 \times 1)$ -tube 内の短い格子絡み目

## 謝辞

コンピュータを使って表 1 を確認して頂いた Michael Jun 氏に感謝いたします。また、講演の機会を頂いたことに、世話人の谷山公規先生、並びに新庄玲子先生に感謝いたします。

$\mathcal{K}$	$2_1^2$	$3_1$	$4_1^2$	$4_1$	$5_1$	$5_2$	$5_1^2, 6_1^2$	$6_1$	$6_2$	$6_2^2, 6_3^2$	$6_3, 7_1$
$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$	20	36	44	50	60	62	68	74	78	80	84
$\mathcal{K}$	$7_2, 7_4$	$7_3$	$7_1^2, 7_2^2, 7_3^2, 8_1^2$	$7_5, 7_6$	$7_7, 8_1, 8_3$	$8_2, 8_4$	$8_2^2, 8_3^2, 8_4^2, 8_5^2, 8_6^2$				
$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$	86	90	92	96	98	102	104				
$\mathcal{K}$	$8_6, 8_7, 8_8, 8_9, 9_1$	$8_{11}, 8_{12}, 8_{13}, 8_{14}, 9_2, 9_5$	$8_7^2$	$9_3, 9_4$	$8_8^2, 9_1^2, 9_2^2, 9_3^2, 9_5^2, 9_8^2, 9_{10}^2$						
$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$	108	110	112	114	116						
$\mathcal{K}$	$9_4^2$	$9_6, 9_7, 9_8, 9_9, 9_{11}, 9_{20}, 9_9^2$	$9_{10}, 9_{12}, 9_{13}, 9_{14}, 9_{15}, 9_{18}, 9_{19}, 9_{21}, 9_{23}, 10_1, 10_3$	$9_6^2$							
$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$	118	120	122	124							
$\mathcal{K}$	$9_{17}, 9_{26}, 9_{27}, 10_2, 10_4, 10_8$	$9_7^2, 9_{11}^2$	$9_{31}, 10_5, 10_6, 10_9, 10_{12}, 10_{15}, 10_{17}, 10_{20}, 10_{22}, 10_{34}$								
$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$	126	128	132								
$\mathcal{K}$	$10_7, 10_{10}, 10_{11}, 10_{13}, 10_{16}, 10_{18}, 10_{24}, 10_{28}, 10_{30}, 10_{31}, 10_{33}, 10_{35}, 10_{36}, 10_{37}, 10_{38}$	$10_{19}$									
$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$	134	136									
$\mathcal{K}$	$10_{14}, 10_{21}, 10_{23}, 10_{25}, 10_{26}, 10_{29}, 10_{32}, 10_{39}, 10_{41}$	$10_{27}, 10_{40}, 10_{42}, 10_{43}, 10_{44}$	$10_{45}$								
$\ell_{2 \times 1}(\mathcal{K})$	138	144	146								

表 1:  $(2 \times 1)$ -tube 内での最小ステップ数

## 参考文献

- [1] Y. Diao, Minimal knotted polygons on the cubic lattice. J. Knot Theory Ramifications 2 (1993), no. 4, 413-425.
- [2] K. Ishihara, R. Scharein, Y. Diao, J. Arsuaga, M. Vazquez, and K. Shimokawa, Bounds for the minimum step number of knots confined to slabs in the simple cubic lattice. J. Phys. A 45 (2012), no. 6.
- [3] K. Ishihara, K. Shimokawa, and A Suzuki, Irreducible lattice knots and links confined to tube in the simple cubic lattice. preparation
- [4] K. Ishihara, K. Shimokawa, and A Suzuki, Bounds for minimum step number of knots confined to tubes in the simple cubic lattice. preparation
- [5] M. Ozawa, Waist and trunk of knots. Geom. Dedicata 149 (2010), 85-94.
- [6] R. Scharein, K. Ishihara, J. Arsuaga, Y. Diao, K. Shimokawa, and M. Vazquez, Bounds for the minimum step number of knots in the simple cubic lattice. J. Phys. A 42 (2009), no. 47.
- [7] Y. Yamaguchi, Minimal step number of figure eight knot. Master thesis, Saitama University (2008).