# 結び目群の $SL_2$-表現空間内の経線と, Milnor-Matsumoto-Moore $K_2$-群

野坂 武史 (九州大学 数理学研究院 )

**概 要**

任意の無限体 $F$ に対し, 結び目の $SL_2(F)$-指標代数多様体から Milnor-Matsumoto-Moore $K_2$ 群への関数を定義した. これは必ず非自明であり, さらに放物的元に関して興味深い振舞いをする事が解った. ただ当関数の値域が不可解だが, Maslov cocycle や Galois symbol や tame symbol 等を用い計量化できる事を述べる.

また筆者は本講演で $K_2(F)$ の計算に関しクレジットを曖昧にした為, 本稿ではそれを言及しておく. 加えて, 講演でお伝え出来なかったカンドルホモロジーの計算結果を幾つか紹介する.

## 1 導入. $K_2$-群への研究の動機付けと, 本稿の構成

本研究は, 絡み目群の $SL_2(F)$ 表現空間内に於いて, 緯線と経線の関係について数論を用いた試みである. この節では本研究の動機をふたつ述べ, その後, 主たる結果を述べる.

まず初めの動機はA多項式 [CCGLS] についてである. それは経緯の (固有値の) 関係を多項式で表記するものの為, boundary slope の計算の簡略化に役立った. またその後, A多項式は AJ 予想のように不変量の' 量子化条件 [Gukov 等]' として重要な位置づけにされた. 物理屋が例えると「緯線と経線の関係は電場と磁場の関係に相当し, A多項式とは $SL_2(\mathbb{C})$-平坦束モジュライ空間内の Lagrangian と捉えるべき」らしい.

A多項式は応用が多くそれはそれで良いのだが, しかし本稿は次の問題点を考えたい：

- Culler-Shalen 理論では, 体を複素数体 $\mathbb{C}$(局所体) に設定しがちで, (大域) 体論が反映されていない点.
- 放物的元の固有値が $\pm 1$ の為, A多項式の定義では $SL_2(F)$ 表現内の放物的元の面白さが半減している様に見える点. [1]
- また結び目群の一般論だが, 緯線の計算が, 実用的には不便である点.

他方で, 第二の動機を述べよう. それは Milnor $K$-群についてである. そもそも, Quillen の代数 $K$ 群は或る空間のホモトピー群で定義される ([Sri] 参照) が, 様々な数学的現象に関し包括的なまとめ役を担う事が多い. 例えば結び目群からの準同型 $\pi_1(S^3 \setminus L) \to SL_2(F)$ の (古典的な) 不変量に関しては, 大雑把ながら, $K_1$ と $K_3$ が次の様にまとめられる.

| 値域 ($K$ 群) | $K_1$ [Whitehead] | $K_2$ [Milnor] | $K_3$ [Quillen] |
|---|---|---|---|
| 不変量の例 | 捩れ Alexander 多項式 | ? | Chern-Simons 不変量 |

しかし中央項にある二次 $K$-群に関し, 管見の限り, 結び目論から研究が余りない. ただ原論文の [CCGLS, §4] で $K_2$-群が使われているが, 少々強引の感がある[2] . そこで, 数論と関連したトピックで, 自然に $K_2$-群が現れる素朴な現象を探りたい, と思ったわけである.

以上の問題意識に対し結論を先に云おう. 「$K_2$-群値の不変量を緯線としてはどうか？」と. これが筆者の提案であり, 一つの試みである.

[1] 勿論, 興味深い結果もあり, 例えば $F = \mathbb{C}$ の際, Neumann-Zagier による双曲体積の積分表示ではA多項式の部分を積分経路とする.

[2] A多項式ユーザー向けの解説：論文 [CCGLS] では, 指標 variety の関数体 $\mathbb{C}(X)$ のミルナー $K_2^M$ 群が扱われ, 安直に見える元 " $\{\mathfrak{m}, \mathfrak{l}\} \in K_2^M(\mathbb{C}(X))$"が考察されている. 彼らのココロを察するに, Boundary slope を (ideal point の付値による)tame symbol で計りたいのだろうが, しかし問題点として, $K_2$ 群 $K_2^M(\mathbb{C}(X))$ は計算がほぼ不可能であり, かつ, tame symbol の値は定数倍で消えている. なので, [CCGLS] の序文末の指摘通り, この $K_2$ 群の手法は Bass-Serre tree から得られる結果より劣化している.

しかしながら, 学問社会上で提案するからには, 或る程度の自然性と演繹性を立証しなければならない. ただ, 本研究の現状では, 応用・数論の明確な対応など筆者には**見つけられず**, 基本的な結果ばかりである. 計算の例示など今後の課題が多いと思う.

とりあえず, 本稿では, 筆者は緯線と $K_2$ 群が自然に現れる基本的な結果を紹介しよう：

**定理 1.1.** $F$ を任意の可換無限体とし, 次の普遍中心拡大を固定する *(詳細は定理 3.1を参照)*:

$$0 \longrightarrow K_2(F) \longrightarrow \widetilde{SL_2(F)} \longrightarrow SL_2(F) \longrightarrow 0.$$

この時, 任意の**絡み目**[3]$L \subset S^3$ に対し, 任意の群準同型 $f : \pi_1(S^3 \setminus L) \to SL_2(F)$ は $\tilde{f} : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \widetilde{SL_2(F)}$ に持ち上がる.

さらに, もし $f$ が全ての経線を放物的元 *(の共役)* に送るとき, 任意の緯線 $\mathfrak{l}_i$ に関するリフト $\tilde{f}$ の行先は, 直積 $K_2(F) \times \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}_{a \in F} \subset \widetilde{SL_2(F)}$ という部分群 *(の共役)* に入る.

ここでの中心 $K_2(F)$ とは「Milnor-Matsumoto-Moore $K$ 群」とか「Milnor-Witt $K$ 群」といわれ, 計算も或る程度でき (節 6) 代数幾何からもよく研究されている (注意 3.3 も参照).

ただ, $K_2(F)$ 値の不変量が自明ではつまらない. そこで非自明性を示した：

**命題 1.2.** $^\forall\alpha \in K_2(F)$ に対し, 或る群準同型 $f : \pi_1(S^3 \setminus L) \to SL_2(F)$ があって, リフト $\tilde{f}$ に関し $\tilde{f}(\mathfrak{l}_1) \cdots \tilde{f}(\mathfrak{l}_{\#L}) = (\alpha, 0)$ であり, さらに $f$ は全ての経線を放物的元の共役元に送る.

この様に非自明性が保障される為, 具体的な絡み目に対し非自明な計算が多く期待できる.

さて, 以上が本稿の主な結果である. 以下, 上の結果がどう示されるかを紹介していく. そして節 5 では上命題の証明を与え, 節 6 で $K_2(F)$ の計算方針を述べる事にする.

**本稿の記述の注** 本稿では, $F$ は無限位数の可換体とする. また記号 $K_2(F)$ で Milnor-Matsumoto-Moore $K$-群とする. ふつうは Milnor$K$ 群を $K_2(F)$ で表すが, 本稿では $K_2^M(F)$ と書く.

また他方で $SL_2(F)$ の可換部分群として, 次の記号を確定しておく:

$$U_F := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ a \in F \right\}, \qquad D_F := \left\{ \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \middle| \ b \in F^\times \right\}.$$

**謝辞**　この研究集会で講演の機会を与えて下さった世話人である谷山公規先生と新庄玲子さんに感謝を申し上げます. また拙い発表を聴講して下さった方々にも厚くお礼申し上げます.

ところで, 講演予稿で, 筆者は $K_2$ 群値の計算例を述べると記しましたが, 数論に関し浅学非才の身, 計算間違いから例示出来なかった事を謹んでお詫び申し上げます. よい計算例が見つかれば, のちのち公表する所存です.

## 2　準備：カンドルと彩色

今回の結果は, カンドルを用いて示してある. であるからカンドルの基本事項を復習する.

まずカンドルとは, 集合 $X$ と二項演算 $\lhd : X^2 \to X$ との組で, 或る条件をみたすものをいう. 本稿は次のカンドルのみに着目するので, カンドルの定義は述べない:

**定義 2.1.** (**共役カンドル**) 群 $G$ に対し, $X$ を $G$ とおく. 共役作用 $x \lhd y := y^{-1}xy$ と二項演算を定めれば, カンドルになる.

[3] この持ち上げの主張は, 結び目に対し自明である. なぜなら実際, 補空間 $S^3 \setminus K$ は Eilenberg-MacLane 空間で, $H_2(S^3 \setminus K) = 0$ が成立つからである. ここで中心拡大の持ち上げと, 二次群ホモロジー群の関係を使った.

**定義 2.2.** (**(種数 1 の $R$ 上) シンプレクティックカンドル**) 単位元付き可換環 $R$ に対し, 集合 $X_R$ を $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ と定め, 二項演算を次の様に定める：

$$(a,b) \lhd (c,d) := (a,b) \begin{pmatrix} 1+cd & d^2 \\ -c^2 & 1-cd \end{pmatrix}.$$

一見わかり辛いこのカンドルは次の様に解釈できる. $X_R$ をホモロジー $H_1(\Sigma; R) \setminus \{(0,0)\}$ と同一視する (但し $\Sigma$ はトーラスとする). すると, この二項演算は「元 $(c,d)$ で代表される閉曲線による Dehn-twist から誘導されるホモロジー群の作用」と見做せる.

他方で「放物的元に共役元の成す部分カンドル」と見れる. 実際, 写像

$$\iota : X_R \longrightarrow SL_2(R); \quad (c,\ d) \longmapsto \begin{pmatrix} 1+cd & d^2 \\ -c^2 & 1-cd \end{pmatrix} \tag{1}$$

は, カンドル準同型であり, さらに高々2 対 1 である事は容易にチェック出来る.

次に, 彩色について復習し, そして上記のカンドルに対し考察しよう.

**定義 2.3.** $D$ を向付き絡み目図式とし, $X$ をカンドルとする. $X$-**彩色**とは, 写像 $\mathcal{C} : \{\ D$ の over arcs $\} \to X$ の事で, 但し, 図 1 の様に, 各交点に対し関係式 $\mathcal{C}(\gamma_k) = \mathcal{C}(\gamma_i) \lhd \mathcal{C}(\gamma_j)$ を満たす事をいう. また, $X$-彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く.


図 1: 正交点と負交点

上記のカンドルでは, 彩色という概念はよく解っている.

まず共役カンドル $G$ に対し, Wirtinger 表示から, 彩色は群準同型 $\pi_1(S^3 \setminus L) \to G$ と同一視できる. よって一対一対応 $\mathrm{Col}_G(D) \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}\bigl(\pi_1(S^3 \setminus L), G\bigr)$ を得る.

他方で, シンプレクティックカンドル $X_F$ の時, 同様に (1) から次の一対一対応を得る.

$$\mathrm{Col}_{X_F}(D) \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\ f : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow SL_2(F) \ \ \text{群準同型} \ \ \middle| \ \ f(^\forall\text{経線}) \overset{\text{共役}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \right\} \times X_F.$$

従って, もし $F$ が複素体で $K$ が双曲結び目である場合は, 非自明な $X_F$-彩色を含む.

他にも, small knot に関し, 次の事もすぐ解る.

**命題 2.4.** *$F$ を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とし, $L$ を small knot とする. この時, 集合 $\mathrm{Col}_{X_F}(D)$ を共役で割った商集合は, 有限位数である.*

*Proof.* まず $SL_2$ 指標多様体は次元 1 の代数曲線である事に注意する. 実際, もしこの次元が 1 より大きければ, small 性から Culler-Shalen 理論より任意の pheripheral な元に対し boundary slopes が構成できるため, Hatcher の有限性定理に矛盾するからである ([CCGLS]). すると「メリディアンの行先が放物的元に共役な (parabolic) 表現」はトレース $\pm 2$ の部分なので, 代数次元が 0 と下がる. こうして当商集合は有限となる事が解った. □

加えて, 具体的な結び目に関する彩色も言及する. 標数 0 の時, 筆者が確かめた 8 交点以下の範囲では, その商集合は代数的集合 $\mathbb{Z}[t]/f(t)$ という形である. ここで $f(t)$ は或る多項式であり, $\mathbb{Z}[t]/f(t)$ は多くの場合「$K$ のホロノミー準同型の "trace field [4] " またはその 2 次拡大

[4] 放物的表現 $\rho : \pi_1(S^3 \setminus K) \to SL_2(\mathbb{C})$ に対し, $\rho$ **の trace field** とは, $\mathbb{Q}\langle \mathrm{Tr}(\rho(\gamma)) \mid \gamma \in \pi_1(S^3 \setminus K)\ \rangle \subset \mathbb{C}$ を含む最小の代数拡大体の事である. 特に $K$ が双曲絡み目の時, $\rho$ をホロノミーに取る場合をいう.

体の整数環」となる．くわえて, $f(t)$ の形から8交点以下の結び目をほとんど分類することも, 手計算で容易に確かめられた．この $f(t)$ は上記の一対一対応からして, 結び目群や Klein 群の arithmeticity と関連するので興味深い.

しかし以下では, 話題を変え $K_2$ 群に焦点を当てる.

## 3 $SL_2(F)$ の普遍中心拡大；H. Matsumoto と R. L. Moore の定理.

本稿のテーマである Milnor-Matsumoto-Moore $K_2$ 群について紹介する．それは二次群ホモロジー $H_2^{\mathrm{gr}}(SL_2(F))$ の簡略化した可換群の表示である．厳密に言えば, その $K_2(F)$ とは, 不定元の組 $[a,b]$ with $a,b \in F$ で生成され, 次の関係式で割ったアーベル群として定められる.

(i) $[a,bc]+[b,c]=[ab,c]+[a,b]$ and $[1,b]=[a,1]=0$,

(ii) $[a,b]=[b^{-1},a]$ and $[a,b]=[a,-ab]$, for $a,b,c \in F^\times$,

(iii) $[d,e]=[e,(1-d)e]$, $[d,0]=[d,0]=0$, for $d,e \in F$.

すると, 次の Matsumoto と Moore の定理は, $SL_2(F)$ の普遍中心拡大の明示を与える:

**定理 3.1** ([Moo], [Mat, Corollaire 5.12][5])**.** $F$ を無限体とする．このとき, 同型 $H_2^{\mathrm{gr}}(SL_2(F)) \cong K_2(F)$ がある.

さらに, 普遍な群 *2*-コサイクル $\theta_{\mathrm{uni}}: SL_2(F)\times SL_2(F) \to K_2(F)$ は次で与えられる.

$$\theta_{\mathrm{uni}}(g,g') := [\chi(gg'),\chi(g)^{-1}\chi(g')] - [\chi(g),-\chi(g')] \in K_2(F). \tag{2}$$

ここで元 $g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in SL_2(F)$ に対し, 値 $\chi(g) \in F^\times$ を, $\delta \neq 0$ の時 $\delta$ として, $\delta = 0$ の時 $\gamma$ として定めた.

特に普遍中心拡大 $\widetilde{SL_2(F)}$ は, 集合 $K_2(F)\times SL_2(F)$ 上に群演算 $(\alpha,g)\cdot(\beta,h) := (\alpha+\beta+\theta_{\mathrm{uni}}(g,h),\ gh)$ を入れた群に同形である．この表示は, 普遍中心拡大を扱い易くしている.

次節に行く前に, ついでながら二つ注記を付しておく.

**注意 3.2.** 本稿では無限体を仮定したが, それは次の理由である．つまり $\mathbb{F}_q$ を有限体で $|q|>9$ とした時, $H_2^{\mathrm{gr}}(SL_2(\mathbb{F}_q))=0$ がよく知られ, 従ってそもそも中心拡大が自明だからである.

**注意 3.3.** ($K_2(F)$ の代数幾何的解釈)．後に必要ではないが, この $K_2$-群の代数幾何の $\mathbb{A}^1$-ホモトピー論による幾何的解釈を紹介する．それは, 安定的な球面スペクトラム (コホモトピー群) として, 表現可能関手で記述する解釈である．即ち, 完全体 $F$ 上の滑らかな variety $X$ に対し, Minor-Witt $K$-群 $K_n(X)$ が定義され, 次の同形が成立する.

$$K_{n+1}(X) \cong [X,\ (\mathbb{G}_m)^{\wedge n}]_{\mathcal{SH}(F)}.$$

ここで $\wedge$ は $\mathbb{A}^1$-ホモトピー論でのスマッシュ積であり, $\mathbb{G}_m$ は群スキーム $\mathrm{Spec}(F[T,T^{-1}])$ (Tate circle) とする．また右辺の括弧は, おおよそ「$X$ から $(\mathbb{G}_m)^{\wedge n}$ への単体的スキームの射の $\mathbb{A}^1$-ホモトピー類の全体」である．加えて, その圏内で $\mathbb{A}^1$-基本群の定義が知られ, 次が成立する:

$$\pi_1^{\mathbb{A}^1}(SL_2(F)) \cong \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathbb{A}^2\setminus\{0\}) \cong K_2(F).$$

ここで $\mathbb{A}^1$-ホモトピー論での Galois 対応によれば, 普遍被覆 $\widetilde{SL_2(F)}$ に単体的スキーム構造が入り, 被覆 $\widetilde{SL_2(F)} \to SL_2(F)$ は $K_2(F)$-torsor でかける事が知られている.

まとめると, 群論的によれば $K_2(F)$ は中心拡大を意味するが, $\mathbb{A}^1$-ホモトピー論によると $K_2(F)$ はアーベル被覆の fibre と捉えられる (以上の詳細は本 [Mor] に書かれている．).

[5] Moore の論文では, 普遍 2 コサイクルの記述が間違っているので注意の事．また Matsumoto の原論文の結果は, シュバレー群に関する 2 次ホモロジーの議論であり, 非常に一般的である.

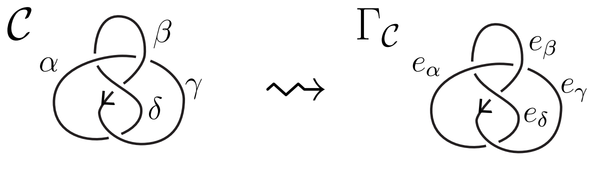
## 4　随伴群

定理 3.1 で普遍中心拡大が具体的に扱える事が解った. そこで定理 1.1 で先述した通り, 普遍中心拡大への群準同型を得る方法を述べる. それは次の群の考察による：

**定義 4.1.** (随伴群) カンドル $X$ に対する**随伴群**とは, 次の表示で定められる群である：

$$\mathrm{As}(X) := \langle \ e_x \ \ (x \in X) \ \mid e_{x \lhd y} = e_y^{-1} e_x e_y \quad (x, y \in X) \ \rangle.$$

随伴群を考える一つの利点は, $X$-彩色 $\mathcal{C}$ に対し, 下図の様に, 群準同型 $\Gamma_{\mathcal{C}} : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \mathrm{As}(X)$ が自然に得られる点である. 従って, 随伴群の決定は大変重要である.




そこで本稿の主要なカンドルに対し, 筆者は次の様に決定した:

**定理 4.2.** $F$ を無限体とする. この時, 写像 $X_F \to \mathbb{Z} \times K_2(F) \times SL_2(F);\ x \mapsto (1, 0, \iota(x))$ は群準同型 $\mathrm{As}(X_F) \to \mathbb{Z} \times \widetilde{SL_2(F)}$ を誘導し, さらにこれは群同型である.
さらに, $O_F$ を, $SL_2(F)$ の共役類の集合の略記とする. $G_F$ を $SL_2(F)$ の共役カンドルとする. このとき群同形 $\mathrm{As}(G_F) \cong \mathbb{Z}^{\oplus O_F} \times \widetilde{SL_2(F)}$ がある.

**証明の概略.** この証明に筆者は３、４頁を要したので, ここでは要点だけを述べる.
前半に関しては, まず (1) から $\mathrm{As}(X_F)$ から $SL_2(F)$ への全射準同型を得る. これは中心拡大であり, 定義からアーベル化 $H_1(\mathrm{As}(X_F); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ に注意する. 次に定理 3.1 を用いて, 主張内の写像が群準同型を誘導する事をチェックする (ここが少々大変である). すると中心拡大の普遍性 ([Mil, §5] など参照) から, それは群同形となる事が解る.
後半は $\iota : X_F \to SL_2(F)$ の誘導射 $\iota_* : \mathrm{As}(X_F) \to \mathrm{As}(G_F)$ を考える. これは $SL_2(F)$ 上の中心拡大間の準同型である. これによる二次ホモロジー群 $K_2(F)$ の像が, 消えない事をチェックする (詳細略). そこでアーベル化 $H_1(\mathrm{As}(G_F); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus O_F}$ に注意すると, Kunneth の定理から欲しい同形が得られる. □

最後に, 以上の議論における新しい視点を強調しておく. 常套手段として $PSL_2$-や $SL_2$-表現の持上げの議論で, 基本群による Stiefel-Whitney 類 (⊃ スピン構造) や２次群ホモロジーを直接調べる方法が多い. 他方で上の議論は, 持上がる要因を (値域側の) 随伴群の代数構造によって保障している点が新しい (と思われる). なお, 上議論を $PSL_2$ で平行に行えば, 双曲絡み目のホロノミーの $SL_2$-持上げについても, 随伴群を用い簡単に解る.

## 5　２次カンドルホモロジーを用いた命題 1.2 の証明

本節では, 定理 4.2 の応用として, $X_F$ の２次カンドルホモロジーを決定しよう. それは当講演時に尋ねられた, カンドルホモロジーについての質問に対する回答でもある. そして, その系として, 命題 1.2 を証明する.
カンドルホモロジーの決定には次の Eisermann による一般的な定理を用いる:

**定理 5.1** ([Eis])**.** カンドル $X$ に随伴群 $\mathrm{As}(X)$ を自然に作用させる $(x \cdot e_y := x \lhd y)$. この作用の軌道分解を $X = \sqcup_{i \in O(X)} X_i$ ととり, 各軌道の元 $x_i \in X_i$ を固定し, 固定部分群 $\mathrm{Stab}(x_i) \subset \mathrm{As}(X)$ をとる.

この時, 二次カンドルホモロジー $H_2^Q(X;\mathbb{Z})$ に関し, 次の同形が成立する:

$$H_2^Q(X;\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}^{\oplus O(X)} \cong \bigoplus_{i \in O(X)} (\mathrm{Stab}(x_i))_{\mathrm{ab}}.$$

とにかく結論は, 随伴群を決定すれば, カンドルホモロジーが計算できることとなった.

そこで, シンプレクティックカンドルの随伴群 (定理 4.2) に適用しよう. まず当作用 $X_F \curvearrowleft \mathrm{As}(X_F)$ が推移的な事に注意する, なぜなら, その作用は $SL_2(F)$ の標準表現を意味するからである. すると, この固定部分群 $\mathrm{Stab}(x_0)$ は, 直積 $\mathbb{Z} \times K_2(F) \times U_F$ である事がすぐ解る. さらに定理 3.1 から, これは群としての直積である. よって定理 5.1 より次の結論にいたる：

**定理 5.2.** 無限体 $F$ に対し, $H_2^Q(X_F;\mathbb{Z})$ は, 加法群として, $K_2(F) \times U_F$ に同形である.

因みに Eisermann の論文によれば普遍カンドル 2 コサイクルの構成法も知られている (詳細略). そこで彼の構成法に適用すると次を得た:

**命題 5.3.** さらに次の様な普遍カンドル 2 コサイクル $\phi_F : X_F \times X_F \to K_2(F) \times U_F$ がある. つまり, 自然な射影 $\pi : K_2(F) \times U_F \to K_2(F)$ に対し, 合成である 2 コサイクル $\pi \circ \phi_F$ は次の表示を持つ：

$$\pi \circ \phi_F\big((a,b),(c,d)\big) = \begin{cases} [(a^2 + a^2cd - abc^2 - c^2)a^{-1}, c^2a^{-1}] - [a, c^2], & \text{if } a \neq 0, \\ -[-b^{-1}, -c^2] + [-(1+cd)b^{-1}, -bc^2], & \text{if } a = 0. \end{cases}$$

ちなみに, $SL_2(F)$ の共役カンドルにおいても或る程度計算できたが節 7 で述べる.

さて, カンドルホモロジーが計算できたので, 次にカンドルサイクル不変量を紹介し, これによって命題 1.2 が示される事を見ていこう.

まずカラリング $\mathcal{C}$ の基本類を定義する. 2 次カンドルホモロジー $H_2^Q(X)$ とは, 自由加群 $\mathbb{Z}\langle X^2 \rangle$ の或る商群であった (詳細は [CJKLS] を見よ). そこで, 図 1 の様な各交点 $\tau$ に対し, 元 $\epsilon_\tau\big(\mathcal{C}(\gamma_i), \mathcal{C}(\gamma_j)\big) \in H_2^Q(X)$ とおく. 但し, $\epsilon_\tau \in \{\pm 1\}$ は交点の正負である. こうして**カラリング $\mathcal{C}$ の基本類**が次の和で定義される.

$$[\mathcal{C}] := \sum_{\tau:\text{交点}} \epsilon_\tau\big(\mathcal{C}(\gamma_i), \mathcal{C}(\gamma_j)\big) \in H_2^Q(X).$$

次の様に, この基本類が非自明となる必要条件が知られている (ホモトピー群の簡単な応用).

**Fact 5.4** ([N1] を見よ)**.** 仮定として, アーベル化 $\mathrm{As}(X) \to \mathbb{Z}^{O(X)}$ における群の二次ホモロジー上の誘導射が同形であるとする (例えば, $O(X)$=1 の時, $H_2(\mathrm{As}(X);\mathbb{Z}) = 0.$). この時, 任意の元 $\alpha \in H_2^Q(X;\mathbb{Z})$ に対し, 或るカラリング $\mathcal{C}$ が存在し, その $[\mathcal{C}] = \alpha$ となる.

であるから, 命題 1.2 の証明には, 以下の様に基本類が緯線で特徴づけられる事をみればよい (Eisermann の結果 [Eis, §1] 参照). まず $\mathcal{C}$ に対し, 群準同型 $\Gamma_{\mathcal{C}} : \pi_1(S^3 \setminus K) \to \mathrm{As}(X)$ を得たのだった. すると $\Gamma_{\mathcal{C}}$ の定義より, 各絡み目成分の経線の代表に対し, その行先は $e_{x_i}$ という形である. だから, 緯線 $\mathfrak{l}_i$ は固定部分群 $\mathrm{Stab}(x_i)$ に入る. すると, アーベル化をとった類 $[\Gamma_{\mathcal{C}}(\mathfrak{l}_i)] \in \mathrm{Stab}(x_i)_{\mathrm{ab}}$ は定理 5.1 より $H_2^Q(X)$ の元と思える. Eisermann は, 綺麗な等式 $[\mathcal{C}] = [\Gamma_{\mathcal{C}}(\mathfrak{l}_1) \cdots \Gamma_{\mathcal{C}}(\mathfrak{l}_{\#L})] \in H_2^Q(X)$ を示した. この等式により, 命題 1.2 が示される：

**命題 1.2 の証明.** $X_F$ をシンプレクティックカンドルとする. 定理 4.2 より $H_2^{\mathrm{gr}}(\mathrm{As}(X_F)) \cong 0$ である. Eisermann の等式と事実 5.4 より, 任意の $(\alpha, 0) \in H_2^Q(X_F) \cong U_F \times K_2(F)$ に対し, ある $X_F$-彩色 $\mathcal{C}$ があって, 目標の等式 $(\alpha, 0) = [\mathcal{C}] = [\Gamma_{\mathcal{C}}(\mathfrak{l}_1) \cdots \Gamma_{\mathcal{C}}(\mathfrak{l}_{\#L})]$ を満たす事になる. □

最後に, (今までの議論の重複になるが) 定理 1.1 の証明も与えておこう.

**定理 1.1 の証明.** まず, 持上げについて言及する. 群準同型 $f : \pi_1(S^3 \setminus L) \to SL_2(F)$ が与えられたとする. これは, $G_F$-彩色 $\mathcal{C}$ と同一視できるのであった. すると定理 4.2 から随伴準同型は $\Gamma_{\mathcal{C}} : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \mathrm{As}(G_F) \cong \widetilde{SL_2(F)} \times \mathbb{Z}^{\oplus O_F}$ となる. これは, $f$ の持上げである.

次に, $f$ が各経線を放物的元と共役な元に移すと仮定する. すると, 経緯の可換性から, 緯線は $f(\mathfrak{l}_i)$ は $U_F$ に共役な部分群に入る. 従って, その持上げは, 集合的に $K_2(F) \times U_F$ に入る. そこで定理 3.1 から, これは群としての直積だったから, 主張が全て示された. □

## 6 $K_2$-群の計量化に向けて

この節では不変量の行先である $K_2$ 群について調べる (新しい事は特にないと思われる). $K_2$ 群値に持つ緯線を計算するにあたり, どれほどの技術が必要なのか紹介する.

低次の $K$ 群の計算法は 40 年程前から色々あるが, 二次に関し特殊な現象が多い. 例えば

**Fact 6.1.** $F$ は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体 (代数体) とし, 埋込み $i : F \subset \mathbb{C}$ を固定する. この時,

(I) 誘導射 $i_* : K_1(F) \to K_1(\mathbb{C})$ と $K_3(F) \to K_3(\mathbb{C})$ は単射である (Quillen). さらに $K_1(F)$ と $K_3(F)$ は有限生成である.

(II) 誘導射 $K_2(F) \to K_2(\mathbb{C})$ は零写像である ($\because$ 例 6.5). さらに $K_2(F)$ は可算無限生成である (例 6.7 を見よ).

つまり, $K_1$ と $K_3$ に関しては $\mathbb{C}$(複素点) のみの考察に外注化できる. だが, 他方で $K_2(F)$ に関しては, 複素体にくみせず良い代数体 $F$ を個別に調べなけらばならない事となった.

この基礎事実に配慮しながら, Suslin [Sus] の定理を用いて, 色々な体に対し $K_2$-群を計算してみよう. その定理を説明する為に, 次の二段落に渡り用語を準備する.

まず, ミルナー $K$ 群 $K_2^M(F)$ を復習する. 元来の定義は [Mil, §5] を見るとして, 今回は、この $K_2^M(F)$ は次の商群と同形である事のみ使う (Matsumoto の定理 [Mil, §11])：すなわち, 不定元 $\{x, y\}$ with $x, y \in F^\times$ で生成される $\mathbb{Z}$ 自由加群を次の関係式で割ったものである：

$$\{a, bc\} = \{a, b\} + \{a, c\}, \quad \{ab, c\} = \{a, c\} + \{b, c\} \ \text{ for all } a, b, c \in F^\times,$$

$$\{a, 1-a\} = 0 \quad \text{for all } a \in F^\times \setminus \{1\}.$$

形式的には, この表示は商乗法群 $F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times / \langle a \otimes (1-a) \mid a \in F^\times \setminus \{1\} \rangle$ とも書ける. これはシンプルな表示だが, Merkurjev-Suslin の定理によって, Milnor $K$ 群の捻じれ部分は数論的に難しい部分な事はよく知られている. つまり, "Galois symbol" という写像があり,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad K_2^M(F)/m \cong {}_m\mathrm{Br}(F) \cong H^2_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(F); \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^2_{\text{gr}}(\mathrm{Gal}(\overline{F}^{\mathrm{sp}}/F); \mu_m^{\otimes 2}).$$

という同形たちを誘導する (2,3,4 項目にある数論の記号は, [Sri, 8 章] などを見て確認されたい. ). ちなみに, Merkurjev-Suslin の定理の証明は, 良い部分代数体に帰着させるものであるため, この捩れ部分を使う際には $F$ を代数体で取るのが自然である.

他方で Witt-Grothendieck 環について復習する (但し標数は 2 を除くとする. 教科書 [Lam] 参照). $F$ 上の有限次元ベクトル空間上の対称二次形式の同形類の集合を考える. するとそこに, 直和とテンソルによって, 和と積が定義され, 半環になる. そこで, グロタンディーク環 $WG(F)$ を **Witt-Grothendieck 環**という. 形式的には次とかける:

$$WG(F) := \mathrm{Groth}(\text{有限次元ベクトル空間上の対称二次形式の同形類}).$$

すると, ベクトル空間 $V$ に対し次元を与える対応を考えると, 環準同型 $WG(F) \to \mathbb{Z}$ を得る. そこで, **基本イデアル** $I(F)$ を, この核で定義する：

$$I(F) = \mathrm{Ker}(WG(F) \longrightarrow \mathbb{Z}).$$

また $a \in F^\times$ に対し, 二次形式 $F \to F;\ x \mapsto ax$ を $WG(F)$ の元と見る時, $\langle a \rangle$ と書く.

**Fact 6.2** ([Sus]). $F$ を無限体とするとき, 次の写像が同形となる:

$$K_2(F) \cong I^2(F) \times_{I^2/I^3} K_2^M(F); \quad [a,b] \longmapsto \big((\langle -a \rangle - \langle 1 \rangle) \otimes (\langle -b \rangle - \langle 1 \rangle), \quad \{a,\ b\}\big). \tag{3}$$

言い換えれば, これは次の様なプルバックで表せる：

$$\begin{tikzcd} K_2(F) \arrow[r] \arrow[d] & K_2^M(F) \arrow[d, "\text{``Milnor map''}"] \\ I^2(F) \arrow[r, "\text{projection}"'] & I^2/I^3(F). \end{tikzcd}$$

ここで Milnor 写像は同形 $K_2^M(F)/2 \cong I^2/I^3(F)$ を誘導する事が知られる (Merkurjev-Suslin の定理の系). 特に, 2 捩れを無視すれば, $K_2(F)$ は $I^2(F)$ と $K_2^M(F)$ との直積である.

さて以上を基に, 幾つかの体に対して, $K_2(F)$ を計算してみよう. ($K_2(F)$ の情報量は, $I^2(F)$ よりも, ミルナー $K$-群の方が多い事を察してほしい)

**例 6.3** (複素数体 $\mathbb{C}$). $W(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ である ($\because$ 任意の二次形式は自明なものと同形だから). よって, $I(\mathbb{C}) = I^2(\mathbb{C}) = 0$ である. 他方ミルナー $K$ 群は, 対 $\{r,s\}$ という形 ($r,s$ は超越数) の基底で貼られる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間である (次元は非加算濃度 [Mil, Thm. 11.10]). よって $K_2(\mathbb{C}) \cong K_2^M(\mathbb{C})$ であるが, 扱い辛いものである.

**例 6.4** (実数体 $\mathbb{R}$). 同型 $I(\mathbb{R}) \cong 2\mathbb{Z}$ が知られている (ベクトル空間の符号数 $\in 2\mathbb{Z}$ による計量化) [Lam, §II]. また他方で, $K_2^M(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus K_2^M(\mathbb{C})^+$ となる (transfer の応用例). ここで第二の因子は $K_2^M(\mathbb{C})$ の複素共役による固有値 1 の部分空間である. すると, 次が解る：

$$K_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \oplus K_2^M(\mathbb{C})^+.$$

**例 6.5** (有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$). $K_2(\overline{\mathbb{Q}}) = H_2^{\mathrm{gr}}(SL_2(\overline{\mathbb{Q}})) = 0$ が知られている (Suslin).

**例 6.6** (有理数体 $\mathbb{Q}$). $I^2(\mathbb{Q}) \cong 2\mathbb{Z} \oplus \big(\bigoplus_{p:\text{素数}} (\mathbb{Z}/2)\big)$ と $I^3(\mathbb{Q}) \cong 4\mathbb{Z}$ が知られている [Lam, §VI.4]. また Tate により, $K_2^M(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \big(\bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/(p-1)\big)$ が示されている ([Mil, §11] 参照). この考察より, 同型 $K_2(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z} \oplus \big(\bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}/(p-1)\big)$ が解る.

一般に, 代数体に対しては以下の事がわかる (読み飛ばしてよい)：

**例 6.7** (代数体 $F$). 代数体 $F$ を考える. その整数環[6] $\mathcal{O}_F$ とし, 有限素点の集合 $S_F$ とし, また $r_1$ を, $F$ から実数体への埋込みの個数とする. まず, ミルナー $K$ 群の大域局所対応とたとえらえる Soulé の結果を述べよう. 即ち, BGQ スペクトル系列 ([Sri, 7 章] 参照) が次の完全系列に分解するというものである.

$$0 \longrightarrow K_2^M(\mathcal{O}_F) \longrightarrow K_2^M(F) \xrightarrow{\text{tame symbols}} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S_F} k(\mathfrak{p})^\times \longrightarrow 0.$$

[6] $F$ の整数環とは, $\mathbb{Z}$ 上整となる元 $a \in F$ の集まりをいう. それは $F$ の部分環になる.

ここで剰余体への写像 tame symbol $K_2(F) \to k(\mathfrak{p})^\times$ は比較的計算ができるものである (定義は [Mil, §11] 参照). が一方で, 左項の $K_2^M(\mathcal{O}_F)$ は「Tame kernel」などと呼ばれ, 2 次 $K_2(\mathcal{O}_F)$ 特有の難しさがあり, 一般な計算手法はあまりない (が最近でも研究が進んでいる).

他方で, 2 乗イデアル $I^2(F)$ はほとんど局所的な情報である. つまり, "Hasse-Minkowski 原理 [Lam, §VI.3]" によれば, 付値の完備化ら $F \to (\oplus_{\mathfrak{p}\in S_F}\mathbb{Q}_\mathfrak{p}) \oplus \mathbb{R}^{r_1}$ に対する誘導射 $I^2(F) \to (\oplus_\mathfrak{p} I^2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})) \oplus I^2(\mathbb{R}^{r_1})$ は単射である. ここで各 $\mathfrak{p}$ 進体 $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ に対し, $I^3(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}) = 0$ であり, $I^2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$ が 2 で零化される事実を注記しておこう.

従って以上をもとに Suslin の定理 6.2 を適用すると, 次の同形が成立する.

$$K_2(F) \cong \mathbb{Z}^{r_1} + \big(K_2^M(\mathcal{O}_F) + \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S_F} k(\mathfrak{p})^\times\big).$$

ここでプラス記号 + とは, (extension problem が残る) 短完全系列の略記である.

以上の様に, $K_2(F)$ の実態は数論的からある程度解った. 他方で定理 5.3 からカンドルコサイクルが明記されている為, $K_2(F)$ 値の綺線の計算は手計算で可能になったと思われる.

## 7 付録：共役カンドルの $H_2^Q$ と, 符号数としての $I^2(\mathbb{R})$ に関するコメント

共役カンドルの二次カンドルホモロジー群について言及する. 一般に決定は難しいが, しかし 2 捩れ部分を無視した場合, いくぶん計算でき次の結果を得た (証明は 7 節で与えた).

**命題 7.1.** *$F$ は標数 2 でないとする. $G_F = SL_2(F)$ を共役カンドルとする. このとき, $I^2(F)^{\oplus O(F)'}$ の或る商加群 $Q_F$ が在って, 二次カンドルホモロジー $H_2^Q(G_F)$ は次と同形である:*

$$\mathbb{Z}^2 \oplus Q_F \oplus \big(\mathbb{Z}^{\oplus O(F)} \oplus U_F \oplus K_2(F)\big)^2 \oplus \bigoplus_{g\in O(F')} \big(\mathbb{Z}^{\oplus O(F)} \oplus \mathrm{Cent}(g)\big) \qquad \text{up to 2-torsion.}$$

*ここで $O(F)'$ は, $SL_2(F)$ の共役作用の軌道集合から単位行列 $\{\pm E_2\}$ を抜いたものである. また最後の項 $\mathrm{Cent}(g)$ は, 代表元 $g \in SL_2(F)$ による中心化群である.*

ここで, この命題 7.1 と, 非自明性を謳う命題 1.2 との関連を述べる. 本講演で述べた「定理 B」の説明でもある. まず思い出す事に, 命題 1.2 の証明での鍵は二次ホモロジー $H_2^Q(X_F)$ の直和因子に $K_2(F)$ が含まれている事だった. しかし命題 7.1 を見てみると, 因子 $K_2(F)$ は二つしかなく (放物的元に共役な部分カンドルから来ている) , しかるに, それ以外は, (放物的元に共役でない部分カンドルから) せいぜい二乗イデアル $I^2(F)$ の分しかない事が解る. いま括弧内に書いた個所は下の証明を見ればわかる. とにかく結論として, カンドルコサイクル不変量で綺線の情報を取り出す場合は, シンプレクティックカンドルを始めから想定するのが良い筋道とわかる. ちなみに, 主張内の $Q_F$ はおそらく 0 となるだろうと筆者は予想している.

さて Suslin の定理 6.2 を用い, 命題 7.1 を証明してみよう.

**命題 7.1 の証明の粗筋.** 定理 5.1 によれば $H_2^Q(G_F)$ の計算には, 任意の元 $g \in SL_2(F)$ に対し, 固定部分群 $\mathrm{Stab}(g) \subset \mathrm{As}(G_F)$ のアーベル化を求めればよい. 4 つの場合わけで計算しよう.

(I) まず $g = \pm I$ という単位行列のとき, $\mathrm{Stab}(g) = \mathrm{As}(G_F)$ なので, $\mathrm{Stab}(g)_{\mathrm{ab}} = \mathbb{Z}^{O_F}$ である.

(II) 次に, トレースが $\mathrm{Tr}(g) = \pm 2$ で $g \neq \pm I$ となる場合. Jordan 分解から $g$ は放物的元と共役である. 故に定理 5.3 の証明と同様に行えば, $\mathrm{Stab}(g)_{\mathrm{ab}} \cong K_2(F) \times U_F \times \mathbb{Z}^{\oplus O_F}$ となる.

(III) 今度は, $\mathrm{Tr}(g) \neq \pm 2$ であって固有方程式 $x^2 + \mathrm{Tr}(g)x + 1$ が解をもつ場合を考える. この時, Jordan 分解から $g$ は対角化できる. だから, この元 $g$ に関する固定部分群 $\mathrm{Stab}(g) \subset \mathrm{As}(G_F)$

は, 集合的に $K_2(F)\times D_F\times\mathbb{Z}^{\oplus O_F}$ という事が解る. ここで注意する事に, 入射 $D_F\to SL_2(F)$ の誘導射 $H_2^{\mathrm{gr}}(D_F;\mathbb{Z})\to H_2^{\mathrm{gr}}(SL_2(F);\mathbb{Z})$ は全射である (これは定理 3.1 から解る). だからアーベル化 $\mathrm{Stab}(g)_{\mathrm{ab}}$ up to 2-torsion は, $D_F\times\mathbb{Z}^{\oplus O_F}$ となる.

(IV) 最後に, 固有方程式が解をもたない場合を考える. それによる 2 次の分解体 $i: F\to E$ を考える. すると $g$ は $SL_2(E)$ 内で対角化できる. ここで思い出す事に, "transfer" という写像 $t: K_2^M(E)\to K_2^M(F)$ があり, 合成 $t\circ i_*: K_2^M(F)\to K_2^M(F)$ が 2 倍写像と一致する ([Mil, §14] 参照). この transfer を用いて, 前段落の議論で $F$ を $E$ に取替える事で, アーベル化 $\mathrm{Stab}(g)_{\mathrm{ab}}$ には $K_2^M(F)$ の部分は現れない事が解る. 従って, Suslin の定理 6.2 を用いれば, そのアーベル化 up to 2-torsion は, $\mathrm{Cent}(g)\times\mathbb{Z}^{\oplus O_F}\times I^2(F)$ の商群となる.

これで, すべての場合の $\mathrm{Stab}(g)_{\mathrm{ab}}$ が計算できたので, 定理 5.1 により $H_2^Q(G_F)$ を計算すれば, 定理 7.1 の主張に書かれていた通りとなる. □

最後に, 上記で話題となった 2 乗イデアル $I^2(F)$ についてコメントしておく. つまり群準同型 $f:\pi_1(S^3\setminus L)\to SL_2(F)$ のリフトが送る緯線の行先において, $I^2(F)$ の制限を考えよう. 普遍群コサイクル $\theta_{\mathrm{uni}}$ の制限 $H_2^{\mathrm{gr}}(SL_2(F);\mathbb{Z})\to I^2(F)$ は **Maslov コサイクル**と呼ばれ幾らか研究されている. だから既存の研究を用いれば, 何か進展があるかもしれない.

ただ, $F$ が実数体や代数体の場合, 例 6.7 と Suslin の定理によれば, $4\mathbb{Z}^{r_1}\subset I^2(F)$ の部分しか面白くない (つまり $I^2(F)$ の捩れ部分はミルナー $K$ 群の方に情報が寄っている). おまけに, この $4\mathbb{Z}^{r_1}$ の部分は (cf. 例 6.4), 次の様に緯線のリフトの位相的意義は明瞭である.

**命題 7.2.** *$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}\to SL_2(\mathbb{R})$ を Lie 群としての普遍被覆 (中心拡大) とする. 埋め込み $F\to\mathbb{R}$ に対し, 緯線の持上げの制限 $\tilde{f}(\mathfrak{l})\in 4\mathbb{Z}\subset I^2(F)$ は, この普遍被覆による持上げと一致する.*

この証明には, 写像 $4\mathbb{Z}\subset I^2(F)\xrightarrow{(\text{実埋込})_*} I^2(\mathbb{R})=4\mathbb{Z}$ と普遍被覆のファイヴァー $\mathbb{Z}$ とが, 符号数の数え上げとして一致する事を (Log を使う等して) チェックすれば良い (詳細略).

以上をまとめると, 代数体 $F$ に関して数論的に興味があれば, $I^2(F)$ よりミルナー $K$ 群を見た方がよいようである.

## 参考文献


[CCGLS] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long, P. B. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*. Invent. Math. **118** (1994), no. 1, 47–84.

[CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989.

[Eis] M. Eisermann, *Quandle coverings and their Galois correspondence*, arXiv:math/0612459v3

[Lam] T.Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, **67**, Amer. Math. Soc., Providence, 2005.

[Mat] H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 1–62.

[Mil] J. Milnor. *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. Annals of Mathematics Studies, No. **72**.

[Moo] C. C. Moore, *Group extensions of p-adic and adelic linear groups*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **35** (1968), 157–222.

[Mor] F. Morel, *$\mathbb{A}^1$-Algebraic Topology over a Field*, Lecture notes in mathematics **2052**, Springer 2012.

[N1] T. Nosaka, *Topological interpretation of link invariants from finite quandles*, preprint

[N2] ———, *Longitude in $SL_2$-representations of knot groups and Milnor-Matsumoto-Moore $K_2$-groups of fields* (仮称), in preparation.

[Sri] V. Srinivas, *Algebraic K-Theory*, 2-nd ed. Progress in Math., vol. 90, Birkhäuser, Boston, 1996.

[Sus] A. A. Suslin, *Torsion in $K_2$ of fields*, $K$-Theory, **1**(1), 5–29, 1987.



E-mail address: `nosaka@math.kyushu-u.ac.jp`