

Akbulut-Yasui plug の PALF 構造と plug twist

大阪大学大学院理学研究科数学専攻 博士前期課程 2 年

浮田 卓也

概要

Loi-Piergallini により, コンパクト Stein 曲面は PALF(positive allowable Lefschetz fibration) 構造を許容することが示された. 一方, Akbulut-Yasui はコンパクト Stein 曲面に cork twist や plug twist を施す事により, エキゾチックな Stein 曲面の様々な無限族を構成している. 本稿では, 全ての Akbulut-Yasui plug に PALF 構造を構成する新しい方法を示す. また, その応用として, plug twist によってうつり合う 2 つの Stein 曲面の PALF 構造の違いを写像類群の言葉で記述する.

1 はじめに

Stein 曲面は複素 2 次元の複素多様体の一種である. 近年, 4 次元多様体がコンパクトな Stein 曲面の構造を持つ事と, 2 次元円板上の境界のあるファイバーを持つ PALF の構造を持つ事が同値である事が Loi-Piergallini[4] により示された. しかし, Loi-Piergallini の方法では具体的な PALF の構造を調べるのは難しい. その後, Akbulut-Ozbagci[2] により, 任意の Stein 曲面に対して PALF の構造を得るための構成的な方法が与えられ, Akbulut-Arikan[1] によってその構成法が改善され, 得られる PALF のファイバーの種数が Akbulut-Ozbagci の方法よりは小さくなった. しかし, この方法で得られる PALF の構造でも一般にファイバーの種数が大きいため, PALF 構造に対応するモノドロミー表現が複雑になってしまい, 写像類群の元として扱い難い. 従って, 既存の方法で得られる PALF 構造よりもファイバーの種数が小さい様な PALF 構造を構成する方法を作ることが重要となる. そこで Akbulut-Yasui plug([3]) という Stein 曲面について, 既存の方法で得られる PALF 構造に比べ, ファイバーの種数が小さい PALF 構造を得た.

定理 1.1 任意の $m \geq 1, n \geq 2$ に対し, Akbulut-Yasui plug $(W_{m,n}, f_{m,n})$ はファイバーの種数が 1 の PALF 構造を許容する.

また, Akbulut-Yasui plug $(W_{m,n}, f_{m,n})$ を用いた plug twist によって移り合う 4 次元多様体の例についてファイバーの種数が 1 の PALF 構造を構成した.

定理 1.2 図 2 の Kirby 図式で表される, Akbulut-Yasui plug $(W_{1,2}, f_{1,2})$ による plug twist で移り合う様な多様体 A, B を考える. この時 A, B は種数が 1 の PALF 構造を許容する.

さらに, 多様体 A, B が次の性質を持つ事を示した.

定理 1.3 多様体 A, B は微分同相な境界を持つが, 同型な交叉形式を持たない. 特に A, B はホモロジー群は互いに同型であるが, 互いに同相ではない.

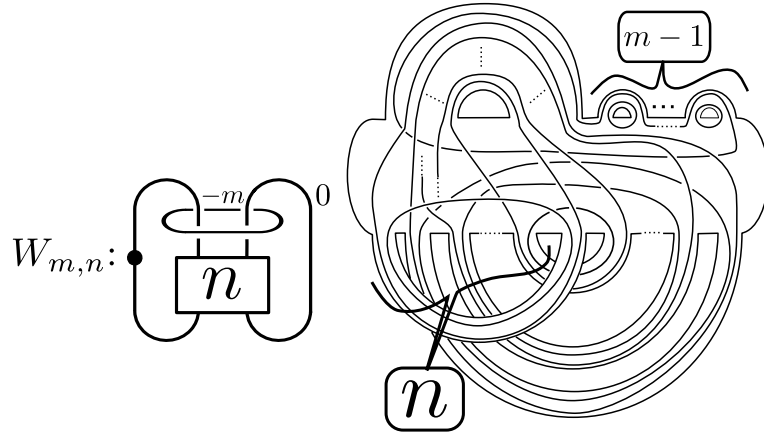


図1 $W_{m,n}$ の Kirby 図式と, $(W_{m,n}, f_{m,n})$ が許容するファイバーの種数が1の PALF 構造

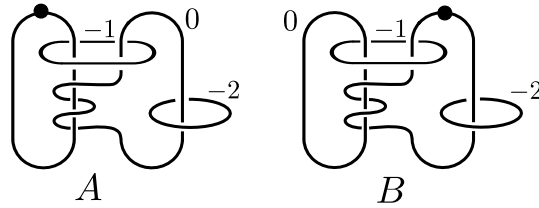


図2 plug twist によって移り合う4次元多様体の Kirby 図式

2 準備

2.1 Kirby 図式と Kirby 計算

定理 1.1, 1.2, 1.3 の証明のために, Kirby 図式と Kirby 計算が必要となる.

定義 2.1 $0 \leq k \leq n$ とする. n 次元 k ハンドルとは $D^k \times D^{n-k}$ のコピーで, 埋め込み $\phi: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial X$ により n 次元多様体 X の境界に $\partial D^k \times D^{n-k}$ に沿って接着したものである. ϕ を接着写像という. $\partial D^k \times 0$ を h の接着球面 (attaching sphere) と呼ぶ. $\partial D^k \times D^{n-k}$ を h の接着領域 (attaching region) と呼ぶ. $0 \times \partial D^{n-k}$ を h のベルト球面 (belt sphere) と呼ぶ.

定義 2.2 $0 \leq k \leq n$ とする. n 次元 $k-1$ ハンドル h^{k-1} と n 次元 k ハンドル h^k を考える. h^{k-1} のベルト球面と h^k の接着球面が1点で横断的に交わる時, h^{k-1} と h^k をキャンセルペアと呼ぶ.

X をコンパクトで連結な向きづけられた滑らかな4次元多様体とする.

定義 2.3 Kirby 図式とは, 4次元ハンドル体を \mathbb{R}^3 内の図式で記述した物の事である.

Kirby 図式において, 1 ハンドル $h^1 = D^1 \times D^3$ の接着領域 $S^0 \times D^3$ はボールの対で表される. 1 ハンドルの接着領域を点付きの円で表す記法もある. また, 2 ハンドル $D^2 \times D^2$ の接着領域 $S^1 \times D^2$ はフレーミング付きの結び目で表される. (図3)

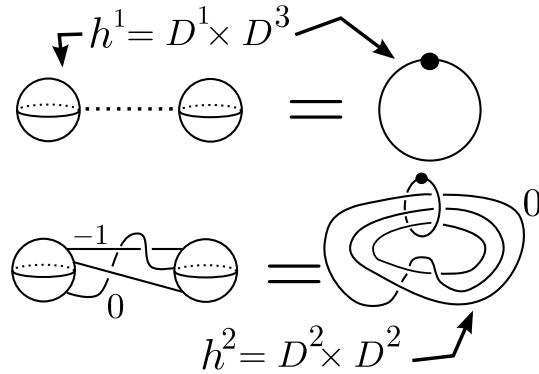


図3 Kirby 図式の例

ハンドルスライドについて見てゆく．ハンドルスライドとはハンドルの接着写像をアイソトピーにより動かすことである．

1ハンドルスライドは図4のようになる．

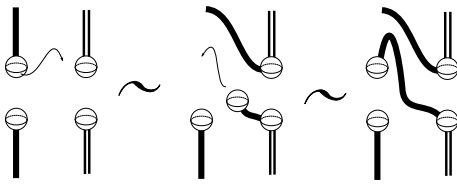


図4 1ハンドルスライド

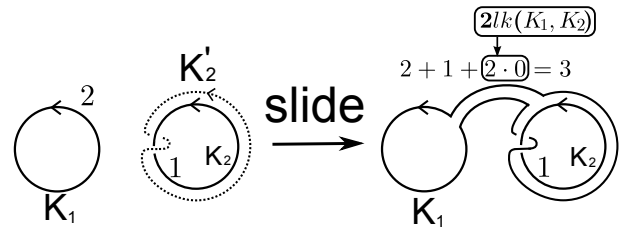


図5 2ハンドルスライド

2ハンドルスライド: K_1, K_2 を framed knot で2ハンドル h_1, h_2 の接着領域であり, かつ framing coefficient は n_1, n_2 であるようなものとし, K'_2 を K_2 のフレーミング $S^1 \times \{pt.\}$ とする. h_1 の h_2 上のスライドとは, 任意のバンドで K_1 と K'_2 の band-sum をとったものである. スライドにより K_1 のフレーミングは $n_1 + n_2 \pm 2lk(K_1, K_2)$ となる (\pm はバンドの取り方による).

2.2 PALF

定義 2.4 M^4 と B^2 をコンパクトで向き付けられた滑らかな多様体で次元はそれぞれ 4 次元と 2 次元とする. 滑らかな写像 $f : M \rightarrow B$ が **positive Lefschetz fibration** であるとは, ある $b_1, \dots, b_m \in \text{interior}(B)$ が存在し, 次の条件 (1), (2) を満たす時に言う. (1) b_1, \dots, b_m は f の臨界値で, 任意の $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し $p_i \in f^{-1}(b_i)$ は f の唯一の臨界点である. (2) 任意の b_i と p_i に対してある局所複素座標で M と B の向きと矛盾せず, 局所的に f を $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ と表せる.

定義 2.5 positive Lefschetz fibration が **allowable** であるとは, 全ての消滅サイクルがファイバー上で homologically non-trivial であるときに言う. 2次元円板 D^2 上の positive allowable Lefschetz fibration で, ファイバーが境界を持つものを, **PALF** と表す事にする.

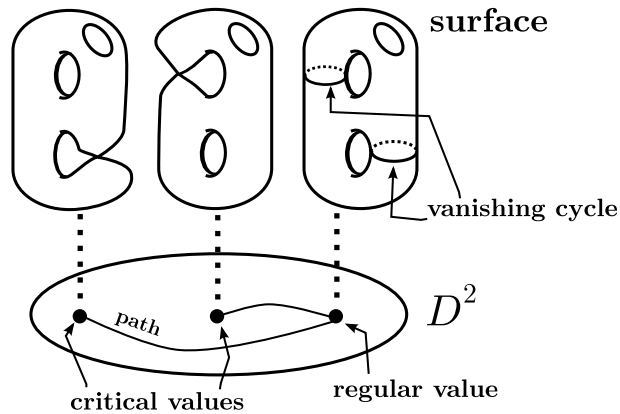


図 6 PALF

定理 1.1 の証明において次の事実が重要となる.

事実 2.6 PALF 構造を許容する 4 次元多様体に Lefschetz 2 ハンドルを接着して得られる 4 次元多様体は PALF 構造を許容する.

ここで Lefschetz 2 ハンドルとは, 次で定義される.

定義 2.7 PALF 構造を許容する 4 次元多様体の境界上に非分離な単純閉曲線に沿ってフレーミングが product framing -1 となるように接着されるような 2 ハンドルを Lefschetz 2 ハンドルと呼ぶ.

2.3 Stein 曲面

Stein 曲面はハンドル分解などの構成的な研究手法と相性が良い.

定義 2.8 \mathbb{C}^n への proper で双正則な埋め込みを持つ複素多様体を Stein 多様体と呼ぶ.

定義 2.9 W をコンパクトな多様体で境界を持つものとする. W が Stein domain であるとは, 次を満たすときに言う. 即ち, ある Stein 多様体 X と多重劣調和関数 $\phi : X \rightarrow [0, \infty)$ が存在し, ある正則値 a に対し $W = \phi^{-1}([0, a])$ となる.

定義 2.10 複素 2 次元の Stein 多様体と Stein domain を Stein 曲面と呼ぶ.

2.4 plug

plug や cork は Stein 曲面の一種であり, 同相ではあるが微分同相ではない様な多様体の対を構成するのに使われる等, 重要な研究対象である.

定義 2.11 P をコンパクトな Stein domain で境界を持つものとする. $\tau : \partial P \rightarrow \partial P$ を P の境界上の involution で, P のどんな自己同相写像にも拡張できないものとする. X を滑らかな 4 次元多様体とする. こ

の時, 組 (P, τ) が X の plug であるとは次を満たすときに言う. 即ち, P は X に含まれ, さらに X から P を取り除き, τ によって P を再接着して得られる多様体は X と同相ではあるが微分同相ではない.

上のような X が存在するとき, (P, τ) を単に plug と呼ぶ事もある.

本稿で扱うのは, Akbulut-Yasui[3] によって構成された次の Akbulut-Yasui plug である.

定理 2.12 (Akbulut-Yasui [3, Theorem 2.5],) $W_{m,n}$ を図 7 の Kirby 図式で表される 4 次元多様体とする. また, $f_{m,n} : \partial W_{m,n} \rightarrow \partial W_{m,n}$ をはじめに $W_{m,n}$ の内部で手術して $S^1 \times D^3$ を $D^2 \times S^2$ にし, 次に他の埋め込まれた $D^2 \times S^2$ を手術により $S^1 \times D^3$ にして得られる involution とする. この時, 任意の $m \geq 1, n \geq 2$ に対して, 組 $(W_{m,n}, f_{m,n})$ は plug である.

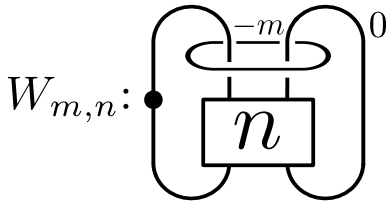


図 7

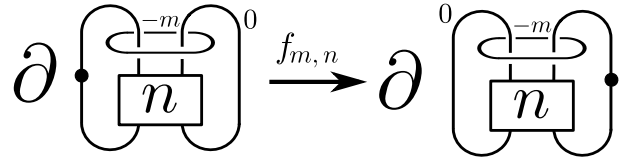


図 8

3 定理の証明

定理 1.1 の証明. $m = 1, n = 2$ の場合に証明する. 一般の場合も同様である. まず, Akbulut-Yasui plug の Kirby 図式を Kirby 計算によって変形する. 図 9 のようにアイソトピーによって変形した後, 1 ハンドルの下のスライドによって変形する. これをアイソトピーで変形すると図 10 のようになる. 一方, F を境界持つ曲面とした時, D^2 上の F 束は PALF である. 図 11 は D^2 上の自明な曲面束に, 図で表されるような単純閉曲線に沿って Lefschetz 2 ハンドルを接着して得られる 4 次元多様体を表している. 事実 2.6 より, この多様体はファイバーの種数が 1 の PALF 構造を許容する. 従って, この多様体が図 10 の多様体と微分同相であることを示せば, Akbulut-Yasui plug がファイバーの種数 1 の PALF 構造を許容する事を証明したことになる. そのために, 図 11 の PALF 構造を許容する 4 次元多様体の Kirby 図式を描き, Kirby 計算によって図 10 の Kirby 図式になるように変形する. まず, 図 11 の多様体は, 図 12 のような Kirby 図式で表す事が出来る. そして -1 -framed 2 ハンドル上をハンドルスライドさせる事によって図 13 のようになる. すると, 図 13 の一番右の図のように 1, 2 キャンセリングペアが現れるので, これを消去する (図 14). さらに, 図 15 のように -1 -framed 2 ハンドル上の -3 -framed 2 ハンドルのハンドルスライドと, 現れた 1, 2 キャンセリングペアの消去により図 15 の一番右の図のような Kirby 図式に変形できる. \square

定理 1.2 の証明の概略. 図 16 と図 17 で表されるような, D^2 上の曲面束に Lefschetz 2 ハンドルを接着して得られる 4 次元多様体を考える. それぞれの多様体を Kirby 図式で表して Kirby 計算によって変形すると, 各々 A, B と微分同相であることが分かる. 従って多様体 A, B はファイバーの種数が 1 の PALF 構造を許容する. また, そのモノドロミー表現はそれぞれ $t_{a_5} t_{a_4} t_{a_3} t_{a_2} t_{a_1}$ と $t_{a_5} t_{a_4} t_{a_3} t_{b_2} t_{a_1}$ である (ここで t_{a_i} は単純閉曲線 a_i に沿った right-handed Dehn twist を表す). \square

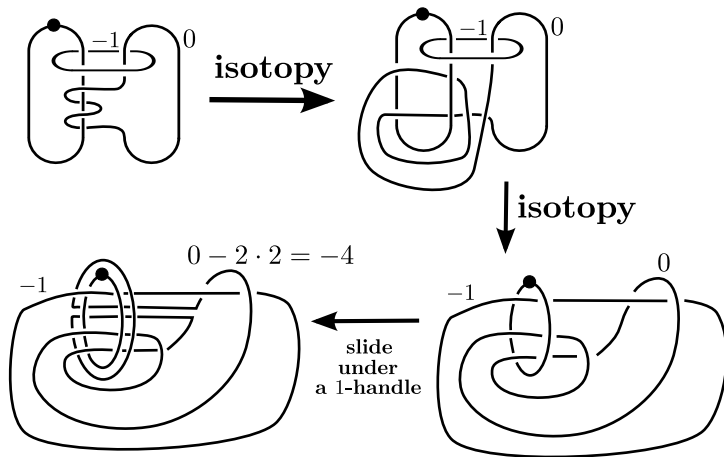


図9 Kirby 計算による変形

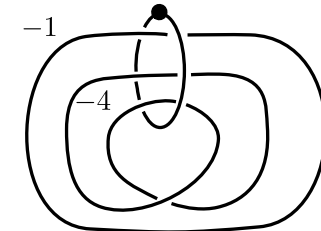


図10 $W_{1,2}$ と微分同相な多様体

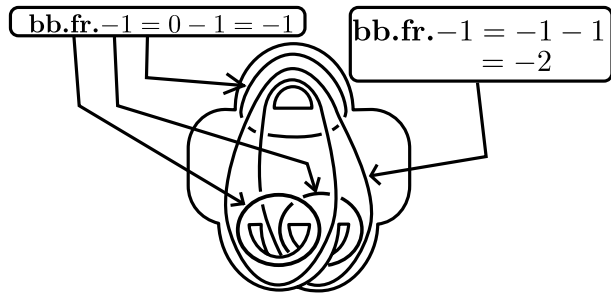


図11 D^2 上の曲面束に Lefschetz 2 ハンドルを接着したもの

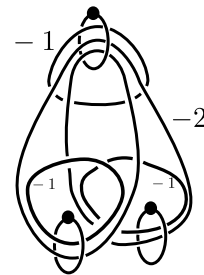


図12 D^2 上の曲面束に Lefschetz 2 ハンドルを接着したものの Kirby 図式

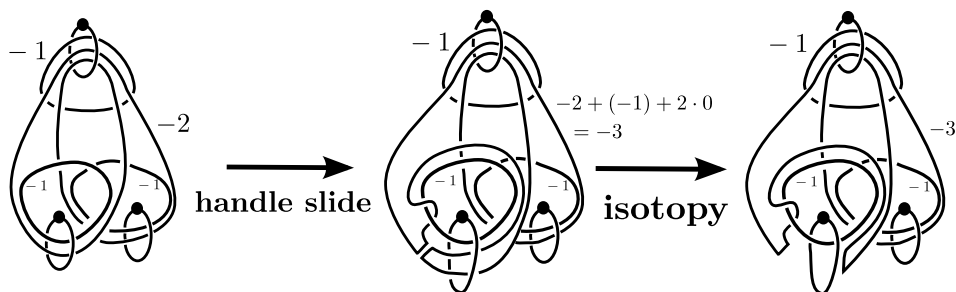


図13

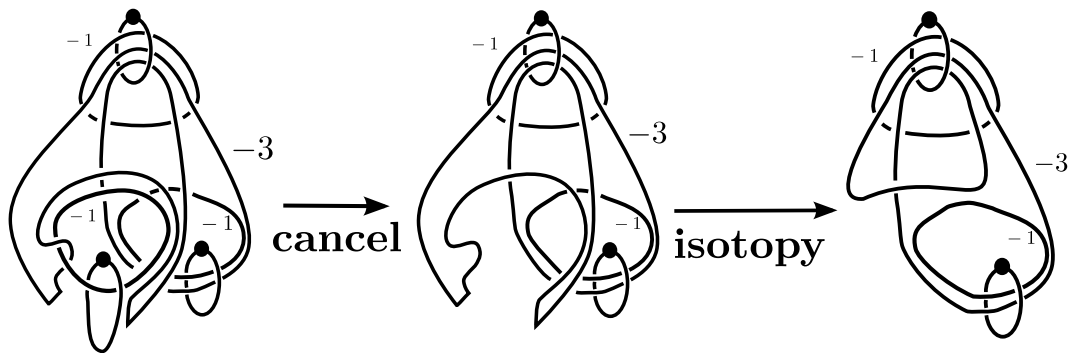


図 14

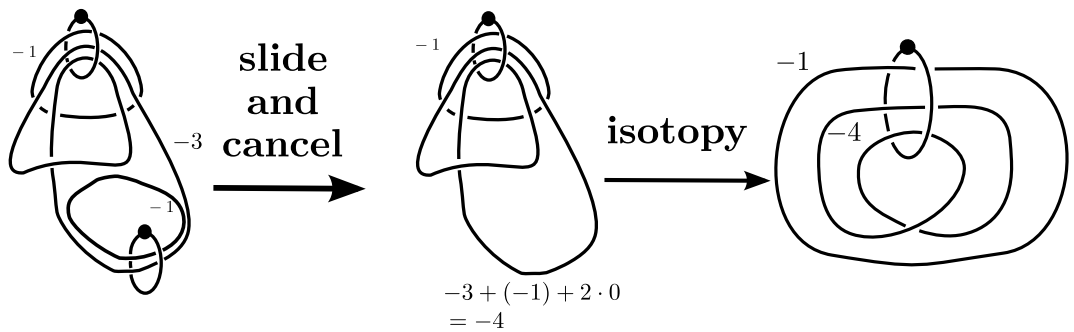


図 15

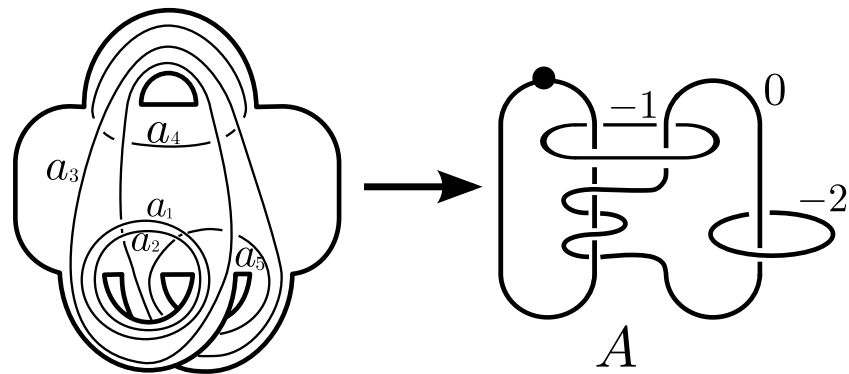


図 16

定理 1.3 の証明の概略. 多様体 A, B の Kirby 図式を Kirby 計算により変形するとそれぞれ図 18, 19 のようになる. そこから交叉行列を求める事が出来て, それぞれ

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

となる. 一方は odd でもう一方は even なので A, B は互いに同型な交叉形式を持たない. 従って, 特に A, B

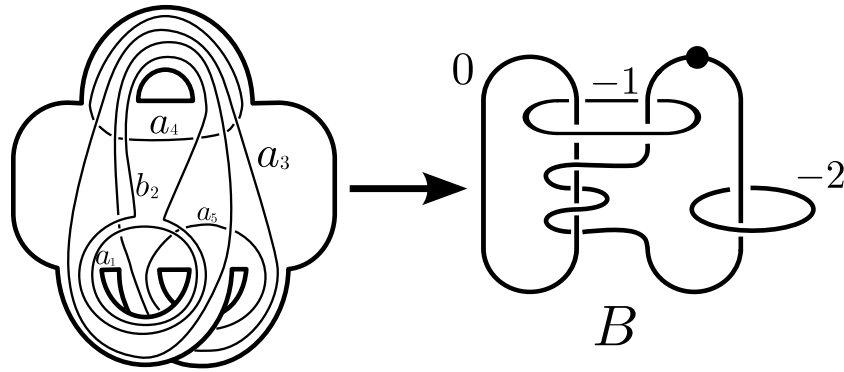


図 17

は同相ではない.

□

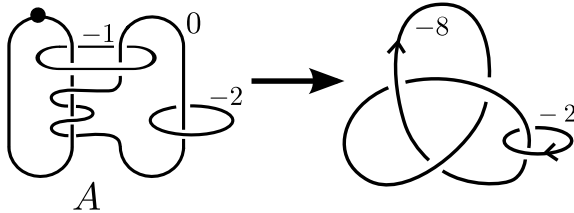


図 18

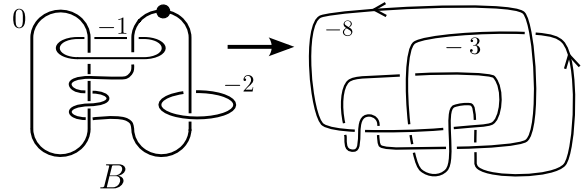


図 19

謝辞

この度は研究集会「結び目の数学 V」において講演の機会を与えて下さった事を、世話人の谷山公規先生、新庄玲子先生をはじめ、研究集会の運営スタッフの方々に心より感謝致します。

参考文献

- [1] S. Akbulut and M. F. Arikan, *A note on Lefschetz fibrations on compact Stein 4-manifolds*, arXiv:math.GT/1007.3643.
- [2] S. Akbulut and B. Ozbagci, *Lefschetz fibration on compact Stein surfaces*, *Geom. Topol.* 5 (2001), 319334(electronic), arXiv:math.GT/0012239.
- [3] S. Akbulut and K. Yasui, *Corks, Plugs and exotic structures*, *Journal of Gökova Geometry Topology*, volume 2 (2008), 40–82.
- [4] A. Loi and R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4* , *Invent. Math.* 143 (2001), 325–348.