古典的結び目を境界とする4次元安定上半空間内の滑らかな円板

三次　明人
大阪市立大学大学院理学研究科

概 要

4 次元安定上半空間 $S\mathbb{R}^4_+$ とは，4 次元上半空間に $S^2 \times S^2$ の加算個のコピーを連結和して得られる 4 次元多様体のことである．3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ を $S\mathbb{R}^4_+$ の境界と考えたとき，$\mathbb{R}^3$ 内の結び目 K が安定スライス結び目であるとは，K を境界とする $S\mathbb{R}^4_+$ 内の滑らかな円板 D で，K を固定して $\mathbb{R}^3$ 内にホモトピー変形可能となるようなものが存在することである．本稿では，結び目が安定スライス結び目であることとその結び目のアーフ不変量が 0 であることは同値であることを示す.

1　主定理

定義 1.1. 4 次元安定上半空間 $S\mathbb{R}^4_+$ とは，4 次元上半空間に $S^2 \times S^2$ の加算個のコピーを連結和して得られる 4 次元多様体

$$S\mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^4_+ \#_{i=1}^{\infty} (S^2 \times S^2)_i$$

である.

K を $S\mathbb{R}^4_+$ の境界 $\partial S\mathbb{R}^4_+ = \mathbb{R}^3$ 内の結び目とする..

定義 1.2. K が安定スライス結び目であるとは，K を境界とする $S\mathbb{R}^4_+$ 内の滑らかな円板 D で K を固定して $\mathbb{R}^3$ 内にホモトピー変形可能となるようなものが存在することである.

主定理 1.3. K は 安定スライス結び目 $\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{Arf}(K) = 0$

2　アーフ不変量

K を $\mathbb{R}^3$ 内の結び目，F を $\mathbb{R}^3$ 内の K のザイフェルト曲面とする.

定義 2.1. $H_1(F;\mathbb{Z}_2)$ の基底 $\{a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g\}$ が標準基底であるとは，$1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq g$ に対して，$\mathrm{Int}_F(a_i, a_j) = \mathrm{Int}_F(b_i, b_j) = 0$ かつ $\mathrm{Int}_F(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ を満たすときにいう．
ここで，Int_F は F の交差数で，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．

$H_1(F;\mathbb{Z}_2)$ から $\mathbb{Z}_2$ への写像 q を次のように定義する．

$$\begin{array}{cccc} q: & H_1(F;\mathbb{Z}_2) & \to & \mathbb{Z}_2 \\ & \Psi & & \Psi \\ & a & \mapsto & lk_{\mathbb{R}^3}(a, a^+) \end{array}$$

$H_1(F;\mathbb{Z}_2)$ の標準基底 $\{a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g\}$ に関して，

$$\mathrm{Arf}(K) := \sum_{i=1}^{g} q(a_i)q(b_i) (\mathrm{mod}\ 2)$$

とおく．この値が結び目 K の不変量となることが知られており，これを結び目 K のアーフ不変量という．

次に pass-equivalent について定義する．K，K' を $\mathbb{R}^3$ 内の結び目とする．

定義 2.2. K_1 と K_2 は pass-equivalent であるとは，K と K' が有限回の pass-move で移り合うときをいう．ここで pass-move とは図 1 のような変形のことをいう．

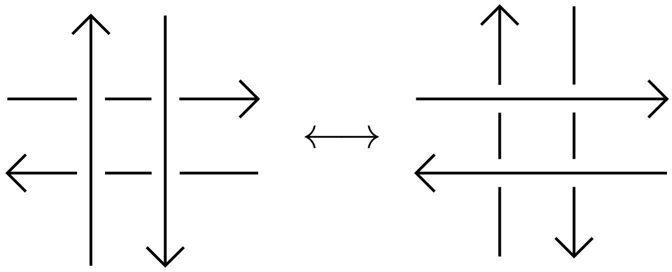

図 1

補題 2.3. $\mathrm{Arf}(K) = \mathrm{Arf}(K') \Longleftrightarrow K$ と K' は pass-equivalent.

この補題から結び目 K が自明な結び目に pass-equivalent である必要十分条件は，$\mathrm{Arf}(K) = 0$ であることがすぐにわかる．

3 主定理の証明

主定理を証明するために次の補題を考える．

補題 3.1. 次の2つの結び目はアイソトピックである．

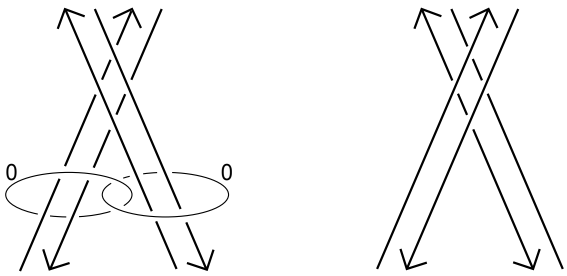

図 2

証明：
ハンドルスライドを用いて，次のように変形すればよい．

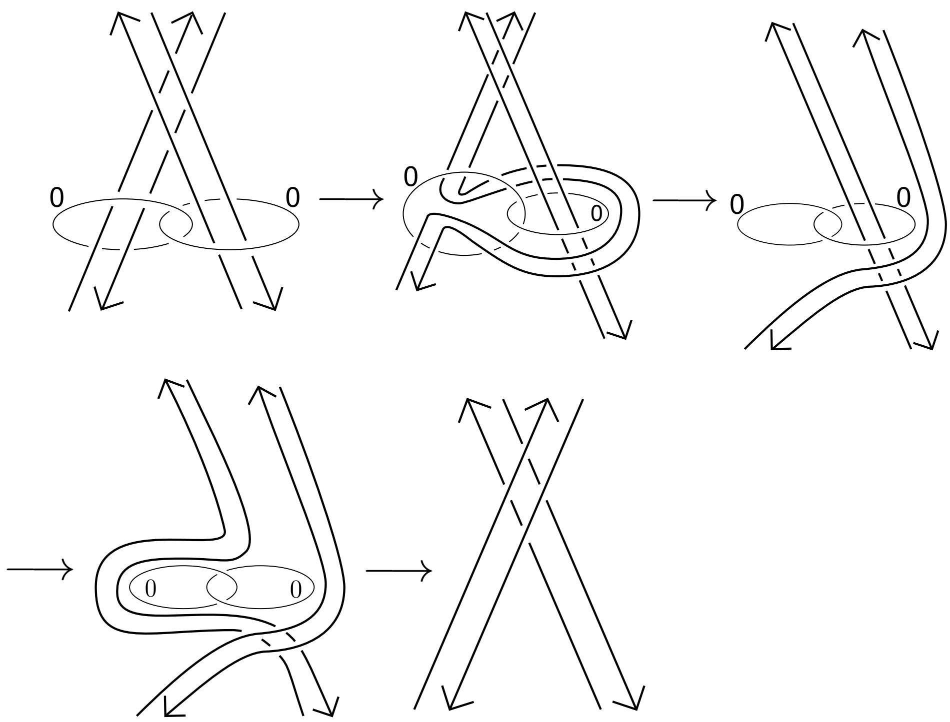

図 3

□

主定理の証明：
($\Leftarrow$)
$\mathrm{Arf}(K)=0$ とすると，K と自明結び目 O は pass-equivalent である．つまり，K は n 回の pass-move で O に変形できる．

$$K=K_0 \underset{\text{pass-move}}{\longrightarrow} K_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_{n-1} \underset{\text{pass-move}}{\longrightarrow} K_n=O$$

とおく．補題 3.1. から $\partial A_i = K_{i-1}\times\{t_{i-1}\}\cup K_i\times\{t_i\}$ となるような $\mathbb{R}^3\times[t_{i-1},t_i]\#(S^2\times S^2)_i$ 内のアニュラス A_i が得られる．ここで，t_i は $t_0=0<t_1<\cdots<t_n$ を満たすとする．これらの n 個のアニュラスをつなげることで境界が $K\times\{0\}\cup O\times\{t_n\}$ となるアニュラス $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ が得られる．このアニュラスに $\partial D_n=O$ となる円板 D_n でふたをしたもの $D=A\cup D_n\times\{t_n\}$ は滑らかな円板であり，$\partial D_n=K$ を満たす．

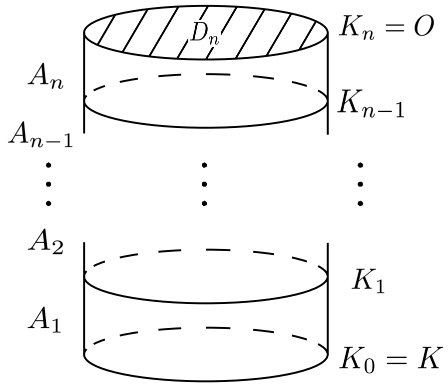

図 4

構成の仕方から，$\mathrm{Int}_{S\mathbb{R}^4_+}((S^2 \times \{p\})_i, D) = 0$, $\mathrm{Int}_{S\mathbb{R}^4_+}((\{q\} \times S^2)_i, D) = 0$ となることが分かる．ここで，$(S^2 \times \{p\})_i$，$(\{q\} \times S^2)_i$ が $H_2(S\mathbb{R}^4_+, \mathbb{R}^3)$ の基底となっていることに注意．よって，$[D] = 0 \in H_2(S\mathbb{R}^4_+, \mathbb{R}^3)$ となり，$[D \cup D'] = 0 \in H_2(S\mathbb{R}^4_+)$ となる．ここで，D' は $\partial D' = K$ となる $\mathbb{R}^3$ 内の円板である．Hurewicz の定理から

$$H_2(S\mathbb{R}^4_+) \cong \pi_2(S\mathbb{R}^4_+)$$

となることがわかる．さらにそこから

$$[D \cup D'] = 0 \in \pi_2(S\mathbb{R}^4_+)$$

が言える．よって，K は安定スライス結び目である．

$(\Rightarrow)$

K を安定スライス結び目とする，K は 4 次元安定上半空間 $S\mathbb{R}^4_+$ および，4 次元安定下半空間 $S\mathbb{R}^4_- = \mathbb{R}^4_- \#_{i=1}^{\infty}(S^2 \times S^2)_i$ においてそれぞれ安定スライス円板 D_+ および D_- の境界となる．球面 $S = D_+ \cup D_-$ を考える．Hurewicz の定理から S は $[S] = 0 \in H_2(S\mathbb{R}^4)$ となることがわかる．ここで，$S\mathbb{R}^4 = S\mathbb{R}^4_+ \cup S\mathbb{R}^4_- = \mathbb{R}^4 \#_{i=1}^{\infty}(S^2 \times S^2)_i$.

定義 3.2. 球面 $S \subset S\mathbb{R}^4_+$ が stable 2-knot であるとは，S が $[S] = 0 \in H_2(S\mathbb{R}^4)$ を満たすときをいう．

$\mathbb{R}^4$ 内の 2-knot の場合と同様に， stable 2-knot$S$ でも Seifert hyper surface$W$ を持つ．W を $\mathbb{R}^3$ で切断することにより，$\partial V = F \cup D_+$ となるような K の $\mathbb{R}^3$ 内でのザイフェルト曲面 F と $S\mathbb{R}^4_+$ における 3 次元コンパクト有向多様体 V が得られる（図 5）．対 (V, F) の $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジーの列

$$H_2(V, F; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_1(F; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_*} H_1(V; \mathbb{Z}_2)$$

が完全であり，

$$\mathrm{Int}_F(\partial_* x, y) = \mathrm{Int}_V(x, i_* y)\ (x \in H_2(V, F; \mathbb{Z}_2),\ y \in H_1(F; \mathbb{Z}_2))$$

も成り立つ．ポアンカレ双対性から，

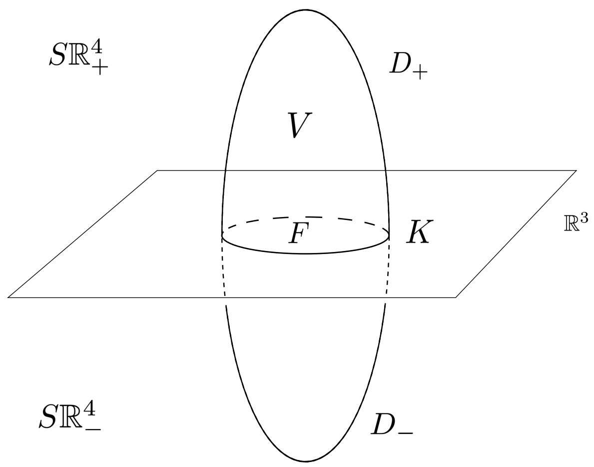

図 5

$$(\mathrm{Im}\partial_*)^\perp = \mathrm{Im}\partial_* \text{ w.r.t. } \mathrm{Int}_F : H_1(F;\mathbb{Z}_2)\times H_1(F;\mathbb{Z}_2)\to\mathbb{Z}_2$$

であることが言える．

$(\because)$

$\mathrm{Int}_F(a,b)=0 \qquad \forall a\in\mathrm{Im}\partial_*$

$\Leftrightarrow$

$\mathrm{Int}_F(\partial_*\overline{a},b)=0 \qquad \forall\overline{a}\in H_2(V,F;\mathbb{Z}_2)$

$\Leftrightarrow$

$\mathrm{Int}_V(\overline{a},i_*b)=0 \qquad \forall\overline{a}\in H_2(V,F;\mathbb{Z}_2)$

$\Leftrightarrow$

$i_*b=0$

$\Leftrightarrow$

$b\in\mathrm{Im}\partial_*$

よって $(\mathrm{Im}\partial_*)^\perp=\mathrm{Im}\partial_*$

□

このことから，$H_1(F;\mathbb{Z}_2)$ の標準基底 x_i,y_i $(i=1,2,\ldots,g)$(ただし g は F の種数を表す) で，x_i $(i=1,2,\ldots,g)$ は $\mathrm{Im}\partial_*$ の基底となるものがとれる．次に，$[\partial F_i]=x_i$ となる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 F_i，$\partial_*\overline{x}_i=x_i$ となる $\overline{x}_i=[\overline{c}_i]\in H_2(V,F;\mathbb{Z}_2)$ に対して，$z_i=F_i+\overline{c}_i(S\mathbb{R}^4_+$ 内のチェインとして考える) とおく．さらに，$z_i^+=F_i^++\overline{c}_i^+$ とおく．ここで，$\overline{c}_i^+$ は $\overline{c}_i$ を V の正方向に少しずらしたもので，F_i^+ は $\partial\overline{c}_i^+=\partial F_i^+$ となるように F_i を少しずらしたものである．このとき

$$\begin{aligned}0&\equiv Int_{S\mathbb{R}^4_+}(z_i,z_i^+)\equiv Int_{S\mathbb{R}^4_+}(\overline{x}_i,F_i^+)\\&\equiv Int_{\mathbb{R}^3}(x_i,F_i^+)\equiv lk_{\mathbb{R}^3}(x_i,x_i^+) \pmod 2\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $q(x_i)=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$ となり，$\mathrm{Arf}(K)=0$ となる．これで主定理を証明できた．

□

参考文献

[1] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版, 2007.

[2] Akio Kawauchi, Knots in the stable 4-space; An overview, A Fete of Topology, Academic Press, 1988, 453-470.

[3] L. H. Kauffman, Formal knot theory, Mathematical notes 30, Princeton University Press, 1983.

[4] L. H. Kauffman, On knots, Annals of Mathematics Studies 115, Princeton University Press, 1987.

[5] L. H. Kauffman, The Conway polynomial, Topology 20 (1981), no.1, 101-108.