On the flat braidzel length of links

三浦 嵩広
神戸大学大学院 理学研究科

概要

任意の link L は，flat braidzel 表示をもつ．そこで，L の flat braidzel 表示を与えるすべての braid に対しその length を考え，それらの最小値として L の flat braidzel length を定義する．flat braidzel length に下からの評価を与え，flat braidzel length が決定できる link の例を紹介する．

1 link の flat braidzel 表示

２枚の disk にいくつかの band をそれらの中心が braid となるように，かつ band にねじれができないように図１のように貼り合わせてできる曲面を **flat braidzel 曲面**という．braid β により表される flat braidzel 曲面を $F(\beta)$ で表す．

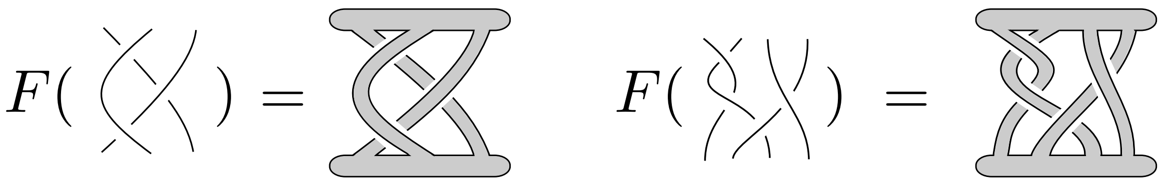


図１．flat braidzel 曲面の例

「どのような link が Seifert 曲面として flat braidzel 曲面をもつか？」という問題が考えられるが，すでに次の結果が得られている．

定理 1.1 ([1]) 任意の link は Seifert 曲面として flat braidzel 曲面をもつ．

定理 1.1 により，任意の link L はある braid β によって $L = \partial F(\beta)$ として表されることがわかる．このような link の表し方を，link の **flat braidzel 表示**という．

例

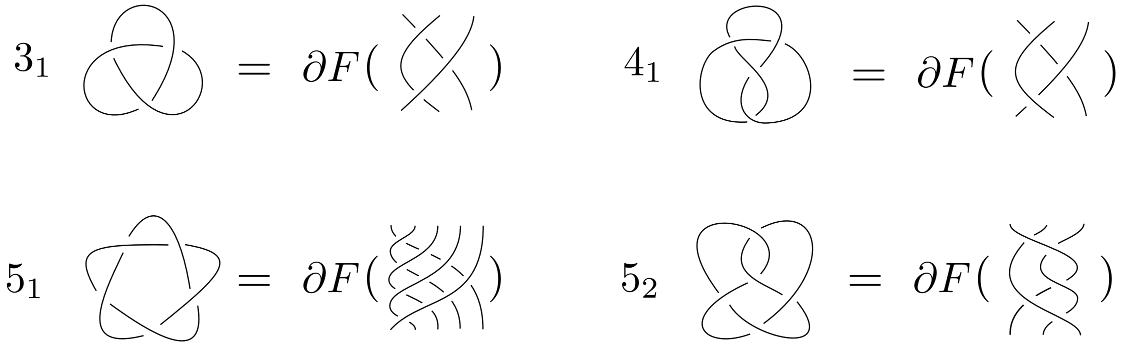


図２．５交点以下の knot の flat braidzel 表示の例

2　link の flat braidzel length

braid β は一般に elementary braid の積で表すことができる．このときの elementary braid の数を β の length といい，$l(\beta)$ で表す.

定義 2.1　link L の flat braidzel 表示を与える braid の minimum length を L の **flat braidzel length** といい，$l_{fb}(L)$ で表す．すなわち，

$$l_{fb}(L) = \min\{l(\beta) | \beta : L = \partial F(\beta) \text{ をみたす braid}\}.$$

length が２以下の braid を調べることにより，次が得られる.

命題 2.2
(1) $l_{fb}(L) = 0$ であるための必要十分条件は，L が trivial link であることである.
(2) non trivial な knot K に対し，$l_{fb}(K) \geqq 3$ が成り立つ.

図３は flat braidzel length が５以下の knot の表である.

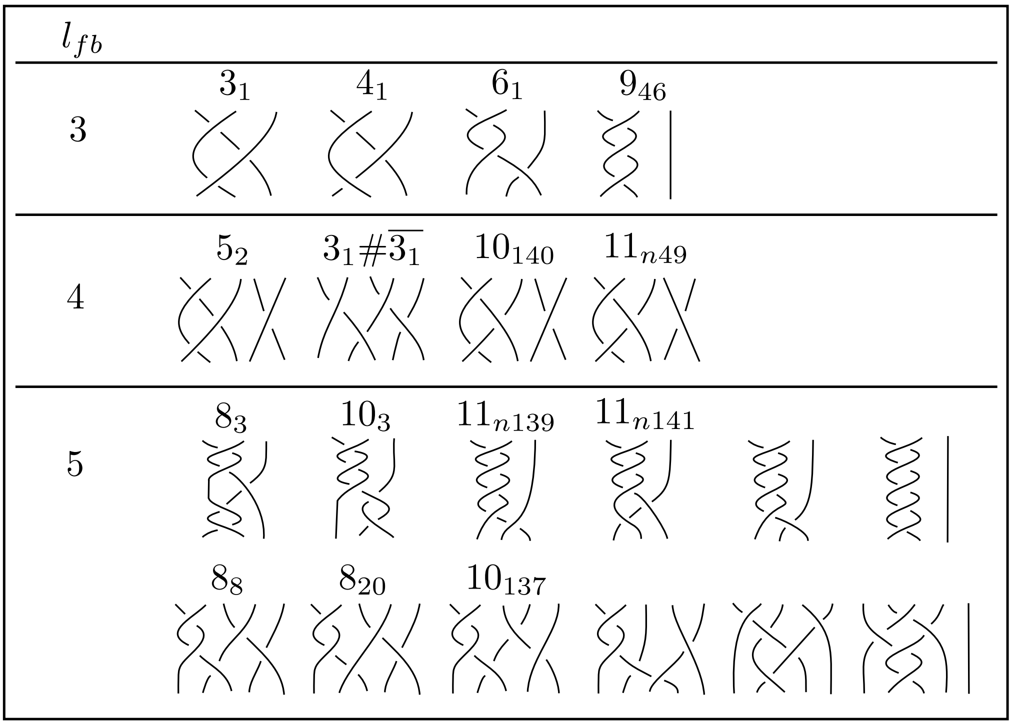


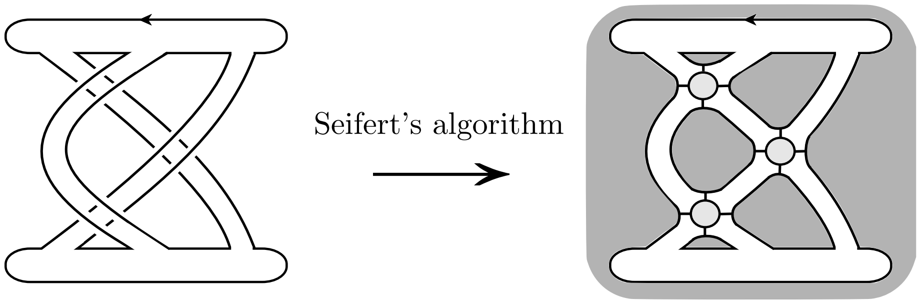
図３．flat braidzel length が５以下の knot の表

link L の canonical Seifert 曲面（すなわち，L の diagram に Seifert's algorithm を施すことによって得られる曲面）の最小種数を L の canonical 種数といい $g_c(L)$ で表す．また，L の flat braidzel 表示を与える braid β に対し，$F(\beta)$ の最小種数を flat braidzel 種数といい $g_{fb}(L)$ で表す ([1]).

定理 2.3　L が non-split, r-component link であるとき，次が成り立つ.

$$l_{fb}(L) \geqq g_c(L) + g_{fb}(L) + r - 1.$$

証明　β を $L = \partial F(\beta)$ かつ $l_{fb}(L) = l(\beta)$ をみたす n-string braid とする．また, $S(\beta)$ を $\partial F(\beta)$ の標準的な diagram から Seifert's algorithm によって得られる canonical Seifert 曲面とする．(図４の例を参照．ここで，２つの disk をつなぐ arc は half-twist band を表している．)



$\partial F(\beta)$ の標準的な diagram　　　　$S(\beta)$

図４．$\beta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$ であるときの $S(\beta)$

この Seifert's algorithm は，$F(\beta)$ の band の交差の周りでは常に図５のようになっている．したがって，$S(\beta)$ の disk の数は $2l(\beta)+n$ であり，band の数は $4l(\beta)$ であることがわかる．

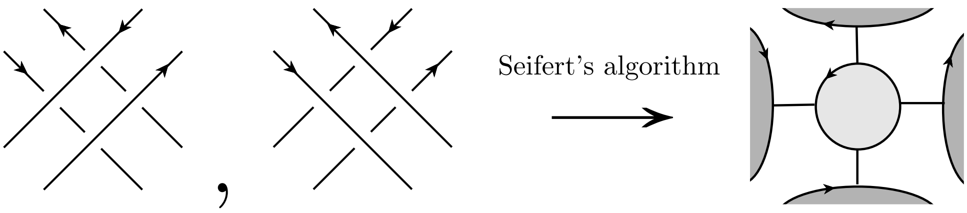


図５．

以上より，

$$\begin{aligned} g(S(\beta)) &= 1 - \frac{\#\{\text{disk}\} - \#\{\text{band}\} + r}{2} \\ &= 1 + l(\beta) - \frac{n+r}{2}. \end{aligned}$$

が成り立ち，$g(F(\beta)) = (n-r)/2$ であることから

$$l(\beta) = g(S(\beta)) + g(F(\beta)) + r - 1 \geqq g_c(L) + g_{fb}(L) + r - 1.$$

を得る．□

3　flat braidzel length が決定可能な link の例

定理 2.3 を用いることにより flat braidzel length の値が決定できる link について考察する．

定理 2.3 より次の系が得られる．

系 3.1　任意の link L に対し次が成り立つ．

$$l_{fb}(L) \geqq \mathrm{maxdeg} \nabla_L(z)$$

ここで $\nabla_L(z)$ は L の Conway 多項式である．

証明

$$\begin{aligned} l_{fb}(L) &\geqq g_c(L) + g_{fb}(L) + r - 1 \\ &\geqq 2g(L) + r - 1 \\ &\geqq \mathrm{maxdeg} \nabla_L(z). \ \square \end{aligned}$$

さらに系 3.1 より次の系が得られる．

系 3.2　$l(\beta) = \mathrm{maxdeg} \nabla_{\partial F(\beta)}(z)$ が成り立つならば，$l(\beta) = l_{fb}(\partial F(\beta))$ である．

２つの braid β_1 と β_2 に対し β_1 の左に β_2 をそのまま並べてできる braid を $\beta_1 \circ \beta_2$ で表す（図６）．

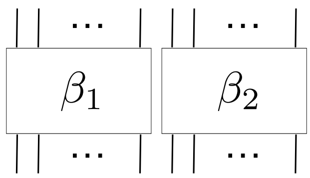


図６．$\beta_1 \circ \beta_2$

β またはその mirror image を，水平方向および垂直方向へ 180 度回転させて移りあう braid からなる集合を $[\beta]$ で表す．

$(i+1)$-string braid $\gamma_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$, 2-string braid δ_2，3-string braid δ_3，4-string braid δ_4 をそれぞれ図７のように定義する．

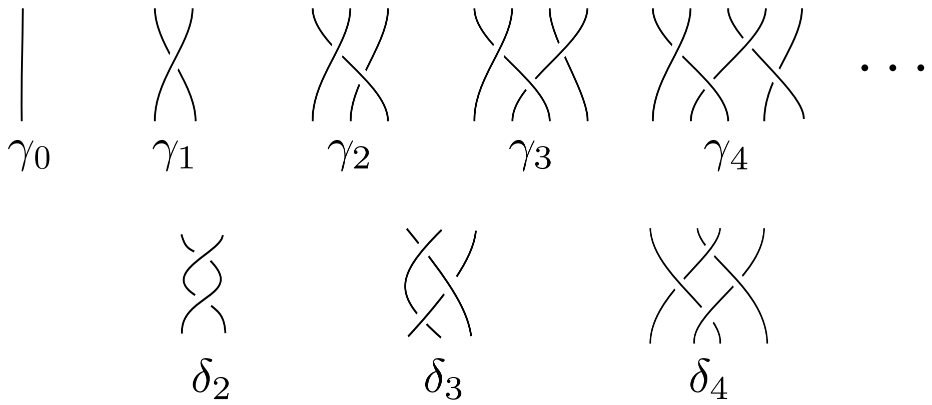


図7．$\gamma_i, \delta_2, \delta_3, \delta_4$

系 3.2 より，braid β が $l(\beta) = \mathrm{maxdeg}\nabla_{\partial F(\beta)}(z)$ をみたせば，link $\partial F(\beta)$ の flat braidzel length が決定できる．この条件をみたす braid についての結果が，次の命題である．

命題 3.3　$l(\beta) = \mathrm{maxdeg}\nabla_{\partial F(\beta)}(z)$ が成り立つための必要十分条件は，β が次の 3 つの条件をみたすことである．

(1) $\beta = \beta_1 \circ \beta_2 \circ \cdots \circ \beta_n \quad (n \in \mathbb{N})$.

(2) $\beta_k \in \bigcup_{i=0,1,\ldots}[\gamma_i] \quad (1 \leqq k \leqq n)$.

(3) $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n \in [\delta_2] \cup [\delta_3] \cup [\delta_4]$.

例えば，図 3 の表の $3_1\#\overline{3_1}$，10_{140}，11_{n49} は命題 3.3 の条件をみたしている．

参考文献

[1] T. Miura, *On flat braidzel surfaces for links*, Topology Appl. **159** (2012), 623–632.

[2] T. Nakamura, *Notes on braidzel surfaces for links*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**(2) (2007) 559–567.

[3] L. Rudolph, *Quasipositive pretzels*, Topology Appl. **115** (2001), 115–123.