LR 語による平面閉曲線の構成

高岡　邦行
早稲田大学大学院教育学研究科 博士課程 1 年

1　序文

結び目ダイアグラムの交点に着目する際, 交点の over/under crossing, left/right crossing, positive/negative crossing の 3 通りの着目の仕方がある. 佐藤-比嘉-中西-山本は, 結び目ダイアグラムの over/under crossing の情報のみに着目して OU 文字列を定義し, trefoil のダイアグラムの OU 文字列がどのような文字列になるか, 加えて, OU 文字列の応用について研究した [1].

本稿では交点の left/right crossing の情報のみに着目し, その情報から得られる文字列について考える. その性質上, 交点の上下は関係ないので, 結び目ダイアグラムではなく, 平面閉曲線を扱う.

2　準備

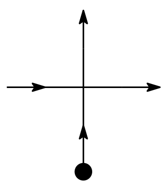
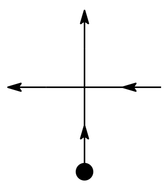
まず用語を定義する.

Definition 2.1. 文字 L と文字 R を同じ個数並べて出来る *cyclic* な文字列を LR 語という.

Definition 2.2. $w = \mathrm{L}^{\alpha_1}\mathrm{R}^{\alpha_2}\cdots\mathrm{L}^{\alpha_{2n-1}}\mathrm{R}^{\alpha_{2n}}$ を LR 語とする. n を w の LR 数といい, $lr(w)$ と表す.

平面閉曲線を, 次のようにして LR 語と対応させる.

Definition 2.3. P を, 横断的な 2 重点のみを持つ, S^2 上の向き付けられた閉曲線とする. P の各 2 重点は, その通過の仕方から, 以下の 2 つの場合が考えられる.

左の 2 重点の場合を左交差 (Left crossing), 右の 2 重点の場合を右交差 (Right crossing) に呼ぶことにし, それぞれ文字 L, 文字 R に対応させる.

さて, P 上に基点をとり, 基点から向きに沿って P を一周すると, 各 2 重点の情報から LR 語が得られる. これを P の LR 語といい, w_P と表す.

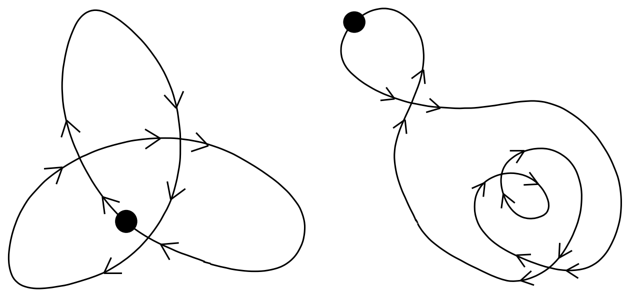
以下では, 横断的な 2 重点のみを持つ, S^2 上の向き付けられた閉曲線のことを, 単に, 平面閉曲線と呼ぶことにする.

平面閉曲線に対して, 次を定義しておく.

Definition 2.4. *P を, 単純閉曲線ではない平面閉曲線とする. P と 2 点のみで横断的に交わる, S^2 上の任意の単純閉曲線 C に対して, C によって切り取られた P のある弧が存在して, その弧が単純な弧であるとき, P を prime な平面閉曲線という.*

Example 2.5. 左の平面閉曲線の LR 語は基点から読むと LRLRLR であり, 右の平面閉曲線の LR 語は基点から読むと $\mathrm{R}^3\mathrm{L}^3$ である.

また, 左の平面閉曲線は prime な平面閉曲線だが, 右の平面閉曲線は prime な平面閉曲線ではない.



任意の平面閉曲線 P に対して, cyclic なものを除いて, P の LR 語が一意に定まる. では, LR 語が与えられたとき, 平面閉曲線の LR 語がそれと一致するような平面閉曲線は存在するかという問題が考えられるが, 次が成り立つ.

Proposition 2.6. *任意の LR 語 w に対して, $w_P = w$ となる平面閉曲線 P が存在する.*

では, LR 語が与えられたとき, 平面閉曲線の LR 語がそれと一致するような prime な平面閉曲線は存在するだろうか？

本研究では, LR 数が 2 までの prime な平面閉曲線の特徴付けを行い, 同時に平面閉曲線の分類も行った.

3 結果

P を平面閉曲線とし, w_P を P の LR 語, L_i と R_j を w_P の i, j 番目にある文字 L, 文字 R とする. $\mathrm{L}_i, \mathrm{R}_j$ が P の同じ 2 重点に対応するとき, L_i と R_j を P のペア, と呼ぶことにする. 平面閉曲線のペアに関して, 次が成り立つ. 特に Lemma 3.2 は, コード 図から prime な平面閉曲線かどうかを判定する際に有用である.

Lemma 3.1. *P を平面閉曲線とし, w_P を P の LR 語とする. このとき L_i と R_j が P のペアならば,* L_i *と* R_j *に挟まれている w_P の部分文字列の,* L *と* R *の個数は等しい.*

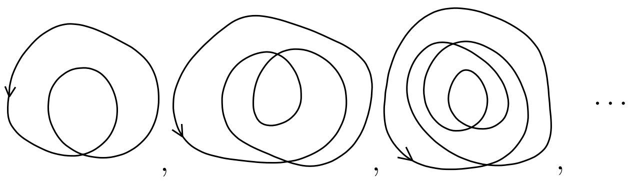
Lemma 3.2. *P を平面閉曲線とし, w_P を P の LR 語とする. また* L_i *と* R_j *をそれぞれ w_P の i 番目, j 番目の文字* L *と文字* R *とする. このとき,* L_i *と* R_j *が P のペア, かつ,* L_{i+1} *と* R_{j-1} *も P のペアならば, P は prime でない.*

Lemma 3.1 より, 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 1 となる平面閉曲線の分類が出来る.

Theorem 3.3. *P を平面閉曲線とし, w_P を P の LR 語とする. このとき, 次は同値である.*

(1) $lr(w_P) = 1$.

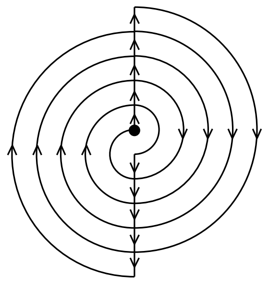
(2) *P は以下の平面閉曲線のどれか.*



また, $lr(w_P) = 1$ となる prime なものは一番左の平面閉曲線のみ.

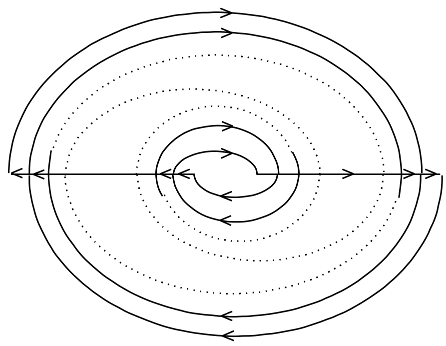
さて, 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 2 となる prime な平面閉曲線として以下の例がある.

Example 3.4. *平面閉曲線の LR 語が* $\mathrm{L}^4\mathrm{R}^4\mathrm{L}^4\mathrm{R}^4$ *となる* prime *な平面閉曲線.*



Example 3.4 から，平面閉曲線の LR 語が $\mathrm{L}^\alpha\mathrm{R}^\alpha\mathrm{L}^\alpha\mathrm{R}^\alpha$($\alpha$ は偶数) となる prime な平面閉曲線が構成できるが, 実は次が言える. 証明は Lemma 3.2 を用いる.

Theorem 3.5. 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 2 となる *prime* な平面閉曲線は次の平面閉曲線のみ.

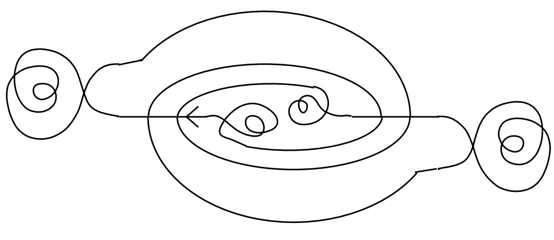


LR 数が 2 の LR 語は, 部分語として LR 数が 1 である LR 語を含むことに注意すると, LR 数が 2 となる場合の平面閉曲線の分類が出来る.

Theorem 3.6. P を平面閉曲線とし, w_P を P の LR 語とする. このとき, 次は同値である.

(1) $lr(w_P) = 2$.

(2) P は, 平面閉曲線の LR 語の LR 数が 1 の平面閉曲線と 2 の平面閉曲線を下図のように合成して得られる平面閉曲線.



参考文献

[1] R.Higa, Y.Nakanishi, S.Satoh, T.Yamamoto, *Crossing information and warping polynomials about the trefoil knot*, Proceedings of Knots in Gumma, HNSY, 2012.