ある結び目の族の ascending number の決定

神戸大学理学研究科　前田瑛士

平成 25 年 1 月 15 日

概要

有向結び目 K の正則図式 D から、単調下降図式を得るために必要な交差交換の最少回数を D のひずみ度という．K と $-K$ の正則図式全てにわたるひずみ度の最小値を K の ascending number という．本論では、いくつかの結び目の族について ascending number を決定する．

1　イントロダクション

K を有向結び目とし、D をその正則図式とする．D 上から交差点を避けて基点 b をとる．D と b の対を D_b と表す．D を b から方向にしたがって進むとき、先に下交差点を通過する交差点のことを**ひずみ交差点** という．D_b のひずみ交差点の数を D_b の **ひずみ度** といい、 $d(D_b)$ と表す．D の全ての基点にわたるひずみ度の最小値を D の **ひずみ度** といい、 $d(D)$ と表す．

例 1 図 1 の D は 5_2 の正則図式である．この D に基点 b_1 と b_2 をとり、ひずみ度を計算すると、$d(D_{b_1}) = 2$, $d(D_{b_2}) = 3$ である．D の向きを逆にした正則図式を $-D$ で表す．$-D$ について、$d(-D_{b_1}) = 3$, $d(-D_{b_2}) = 2$ となる．また、$d(D) = 2$, $d(-D) = 2$ である．

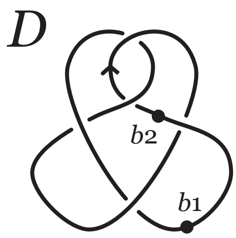

図 1

ひずみ度は次のような性質を持つ．

補題 1 ([2])　D の基点 b_1 と b_2 を図 2 のようにとると、次の等式が成立する．

$$d(D_{b_2}) = d(D_{b_1}) + 1.$$

補題 2 ([2])　D を交代図式とする．このとき、 D の上交差点の直前に取った基点 b について、次の等式が成立する．

$$d(D) = d(D_b).$$

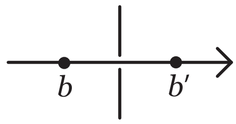

図 2

補題 3 ([2]) D の交点の数を $c(D)$ とする．D 上の任意の基点について次の等式が成立する．

$$d(D_b) + d(-D_b) = c(D).$$

定義 1 $d(D)$ と $d(-D)$ のうち値の小さい方を D の *ascendig number* といい、 $a(D)$ と表す．K の全ての正則図式にわたる $a(D)$ の最小値を K の *ascending number* といい、$a(K)$ と表す．

例 1 の D について、 $a(D) = 2$ である．次の 2 つの補題は定義から直ちにわかる．

補題 4 有向結び目 K が $a(K) = 0$ を満たすための必要十分条件は K が自明な結び目であることである．

補題 5 $u(K)$ を *unknotting number* とする．このとき次の不等式が成立する．

$$u(K) \leq a(K).$$

例 2 図 3 の D' は 5_2 の正則図式で、$a(D') = 1$ となるものである．5_2 は非自明な結び目なので、補題 4 より $a(5_2) \geq 1$．よって、$a(5_2) = 1$ となる．

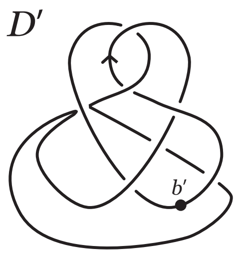

図 3

命題 1 ([1]) 有向結び目 K が $a(K) = 1$ を満たすための必要十分条件は、 K がツイスト結び目であることである．

命題 2 ([1]) 非自明な有向結び目 K について、次の不等式が成立する．

$$a(K) \leq \frac{1}{2}(c(K) - 1).$$

ここから本論の主定理を紹介する．$C(m), C(m,n), C(m,n,r)$ をコンウェイの表示で表された 2 橋結び目とする (図 4)．これらの結び目の族の ascending number について次の結果を得た．

定理 1 m, n, r を自然数とするとき、次が成立する．
(1) $a(C(m)) = \frac{1}{2}(m-1)$ (n は奇数)．
(2) $a(C(m,n)) = \frac{1}{2}n$ (m が偶数で n が奇数)．
(3) $a(C(m,n,r)) = \frac{1}{2}(m+r-1)$ (m と n が偶数で r が奇数)．

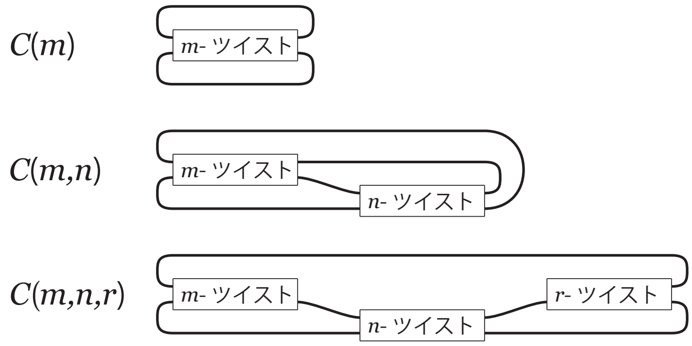

図 4

(2) について講演では $C(m,n)$ の m と n が両方偶数のときの計算結果も発表したが、誤りがあることが分かった.

命題 2 の不等式の等号成立条件は次の通りである.

定理 2 非自明な有向結び目 K が $a(K) = \frac{1}{2}(c(K)-1)$ を満たすための必要十分条件は、K が $(2,p)$ -トーラス結び目であることである. ただし、p は $p \neq \pm 1$ なる奇数である.

2　定理 1 について

この章では定理 1 の証明を与える. 村杉の結果より、$\frac{|\sigma(K)|}{2} \leq u(K) \leq a(K)$ であるから、$a(K)$ は signature $\sigma(K)$ を使って下から評価できる. $\sigma(K)$ の計算には次の定理を用いる.

定理 3 ([5]) D を交代結び目の正則図式とする. r を D の全ての交差点の符号の和とし、W を D をチェッカーボード彩色したときの白領域、B を黒領域とする. このとき次の等式が成立する.

$$\sigma(K) = -\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}(W - B).$$

ただし、チェッカーボード彩色は図 5 のように定める.

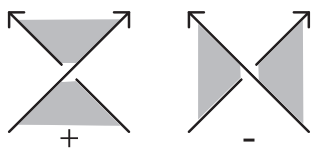

図 5

D を 図 6 のように $2k+1$ 個のハーフツイストの 2 本のストリングスに逆方向の向きがついている部分を持つ正則図式とする. (k は自然数)

$d(D_b) = n$ とする. D を b から方向にしたがって進むと、ツイストの部分にひずみ交差点が k 個ある. D' は D のツイストの部分のひずみ交差点を無くすように変形したものとする. このとき

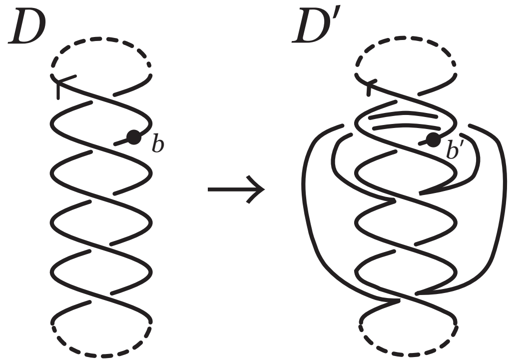

図 6

D' は D から **うずまき変形** で得られたという．D' において基点 b' から方向にしたがって進むと、ツイストの部分のひずみ交差点が無くなり、$d(D_{b'}) = n - k$ となる．よって $2k+1$ 個のハーフツイストが D のようにつながっているとき、うずまき変形を使えば k 個のひずみ交差点を減らせる．

次に $2k+2$ 個のハーフツイストが同じようにつながっているときを考える．このとき方向の付け方は図 7 の (1), (2) の 2 通りがある．図 7 のように基点を取ると、ツイストの部分に (1) は k 個、(2) は $k+1$ 個のひずみ交差点がある．(1) のとき $d(D_b) = n$ とすると $(1')$ の D' に変形すれば $d(D') = n - k$ となる．(2) のとき、$d(D_b) = n$ とすると $(2')$ の D' に変形すれば $d(D') = n - k - 1$ となる．

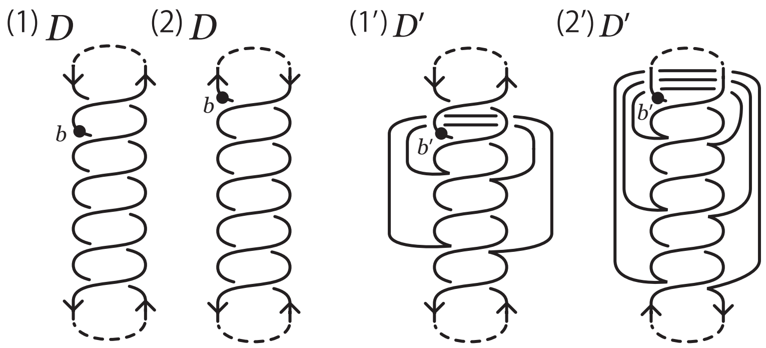

図 7

定理 1 の証明 m が奇数で n が偶数のときの $C(m, n)$ についてのみ示す．図 8 において交差点の符号の和 r と、チェッカーボード彩色したときの白黒領域の数 W, B は次のようになる．

$$r = m + n \quad W = m + 1 \quad B = n + 1.$$

よって $\sigma(K) = -n$ となり、$\frac{n}{2} \leq u(C(m, n)) \leq a(C(m, n))$ が成立する．

m -ツイストの部分はうずまき変形が使えるつながり方をしている．よってうずまき変形を施せば、m -ツイストの部分のひずみ交差点は無くなり、n -ツイストの方のひずみ交差点のみを数えればよい．

n は偶数であり、D は交代図式だから $a(C(m,n)) \leq \frac{n}{2}$ である．よって $a(m,n) = u(C(m,n)) = \frac{n}{2}$.

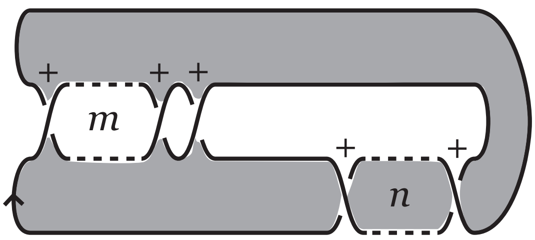

図 8

□

3　定理 2 について

この章では定理 2 の証明を与える。次の谷山の結果により、定理 2 の必要条件は直ちに示される．

定理 4 ([3])　非自明な有向結び目 K が $u(K) = \frac{1}{2}(c(K)-1)$ を満たすための必要十分条件は、K が $(2,p)$ -トーラス結び目であることである．ただし、ただし、p は $p \neq \pm 1$ なる奇数である．

以下、十分条件を示すために議論を進めていく．補題 3 を用いて次の 2 つの補題が得られる．

補題 6　正則図式 D について、次の不等式が成立する．

$$a(D) \leq \frac{1}{2}(c(D)-1).$$

補題 7　正則図式 D が $a(D) = \frac{1}{2}(c(D)-1)$ を満たすならば、D は交代図式である．

正則図式 D の **コード図** とは、 D を与える円周上において、各交点の逆像である 2 点をコードでつないだものである．各コードには上交差点から下交差点に向かう向きを入れる．例えば 8 の字結び目をコード図にすると図 9 のようになる．

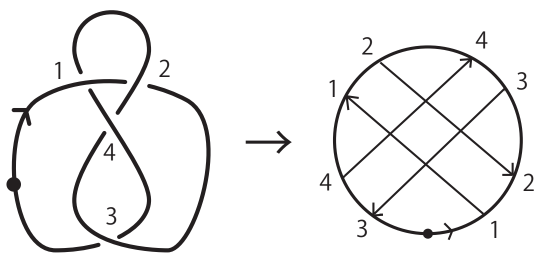

図 9

端点が隣り合う 2 本のコードとは、図 10 のような 2 本のコードの対のことをいう．

コード図について次の命題が成り立つ．

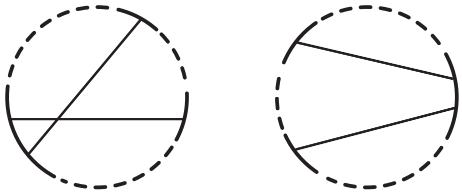

図 10

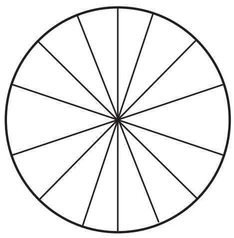

図 11

命題 3 コード図において円周上で端点が隣り合う任意の 2 本のコードが交差するならば、(端点が隣り合うとは限らない) 任意の 2 本のコードは交差する．

命題 4 コード図において、任意の 2 本が交差するならばそのコード図は図 11 のようになる．

定理 2 の証明 $a(K) = \frac{1}{2}(c(K) - 1)$ とする．$c(D) = c(K)$ なる正則図式 D をとると、次の不等式が成立する．

$$a(K) \leq a(D) \leq \frac{1}{2}(c(D) - 1) = \frac{1}{2}(c(K) - 1).$$

最初の不等号は定義から、次の不等号は補題 6 からそれぞれ成り立つ．仮定より、左辺と右辺が一致するので、D は $a(D) = a(K)$ かつ $a(D) = \frac{1}{2}(c(D) - 1)$ をみたす．よって補題 7 より D は交代図式である．このとき補題 2 より、D の任意の上交差点の直前に基点 b を取れば、$d(D_b) = a(D) = a(K)$ となる．

次に基点の 2 つ後ろの交差点までのつながり方について考察する．図 12 のような 2 つのつながり方が考えられる．

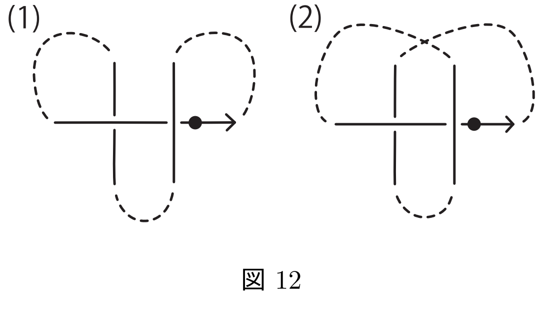

図 12

(1) のつながり方の場合、図 13 に示す変形で $a(D)$ の値を減らせるので、$a(D) = a(K)$ に矛盾する．

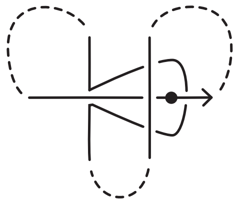

図 13

よって全ての上交差点の 2 つ後ろまでの交差点は (2) のようなつながり方をしていなければいけない. これをコード図にすると図 14 のようになる.

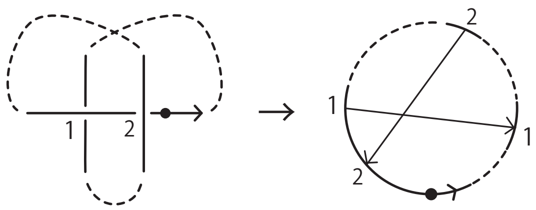

図 14

このことから D のコード図において上交差点と下交差点の順で隣り合う 2 本のコードは交差しなければならないことがわかる.

次に基点の前後の交差点について考える. 基点の前後のつながり方は図 15 の 2 通りある.

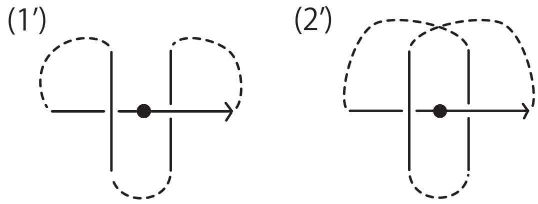

図 15

$c(K) = c(D) = 2n+1$ とすると、$a(D) = \frac{1}{2}(c(D)-1)$ なので、$a(D) = n$ である. このとき、$(1')$ のようにつながっていたとすると、$-D$ について、図 16 に示す $d(-D) = n-1$ となる正則図式が存在することになり、$a(D) = n$ に矛盾する.

よって基点の前後は $(2')$ のようにつながっていなければならない. これをコード図にすると図 17 のようになる. これより下交差点と上交差点の順で隣り合う 2 本のコードは交差していなければならないことがわかる.

D は交代図式なので、端点が隣り合う任意の 2 本のコードは交差する. よって命題 3 より D のコード図は任意の 2 本のコードが交差する. よって命題 4 より D のコード図は図 11 のようなものである.

図 11 に交代になるように向きを付けたコード図に対応する正則図式を考えれば $(2,p)$ -トーラス結び目が得られる. □

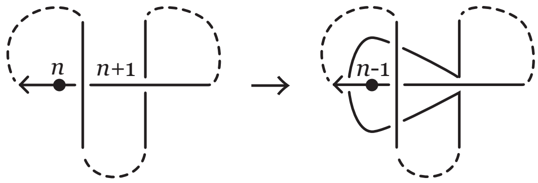

図 16

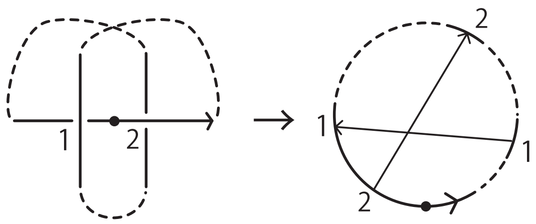

図 17

参考文献

[1] Makoto Ozawa. Ascending number of knots and links. J. Knot Theory Ramifications. Vol.19 (2010), No.7, 15-25.

[2] Ayaka Shimizu. The warping degree of a knot diagram. J. Knot Theory Ramifications. Vol.19 (2010), No.7, 849-857.

[3] Kouki Taniyama. Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded. J. Knot Theory Ramifications. Vol.18 (2009), No.8, 1049-1063.

[4] Slavik Jablan. Unknotting and ascending numbers of knots and their families. arXiv. 2011.

[5] Pawel Traczyk. A combinatorial fomula for the signature of alternating diagram. Fund.Math. Vol.184 (2004), 311-316.