アレクサンダー多項式のある種のパリティについて

宮戸　勇 *
(名古屋工業大学 大学院工学研究科 D2)

1 導入

μ 成分絡み目 L のアレクサンダー多項式 $\Delta_L(t)$ に対して、以下のことはよく知られている。

$$\begin{aligned} |\Delta_L(1)| &= \begin{cases} 1 & (\mu = 1) \\ 0 & (\mu \geq 2) \end{cases} \\ |\Delta_L(-1)| &= \mathrm{Det}(L) \end{aligned}$$

ここで $\mathrm{Det}(L)$ は L の link determinant である。アレクサンダー多項式は $\pm t$ のべき乗倍を法としてしか定まらないので、$\Delta_L(\pm 1)$ は絶対値しか意味を持たない。今回、$\Delta_L(1)$ と $\Delta_L(-1)$ の符号の一致性、すなわち $\mathrm{Sign}\,(\Delta_L(1)\Delta_L(-1))$ に注目した。これは $\Delta_L(t)$ を (-1) 倍しても変化しないが、t 倍すると (-1) 倍される。このことから $\mathrm{Sign}\,(\Delta_L(1)\Delta_L(-1))$ は $\Delta_L(t)$ の次数で補正すれば L の不変量になる。

結び目 K に対して、$\Delta_K(1)$ と $\Delta_K(-1)$ の符号が常に一致するとは限らない。例えば三つ葉結び目と八の字結び目に対して、$\mathrm{Sign}\,(\Delta_K(1)\Delta_K(-1))$ は異なる。

K	$\Delta_K(t)$	$(\Delta_K(1), \Delta_K(-1))$	$\mathrm{Sign}\,(\Delta_K(1)\Delta_K(-1))$
3_1	$1-t+t^2$	$(1,3)$	$+1$
4_1	$1-3t+t^2$	$(-1,5)$	-1

結び目の場合、符号の一致性は結び目の signature のみで決まることが知られている。

定理 1 ([Giller])**.** $\tilde{\Delta}_K(t)$ を結び目 K のアレクサンダー多項式で、$\tilde{\Delta}_K(t) = \tilde{\Delta}_K(t^{-1}), \tilde{\Delta}_K(1) = 1$ を満たすように正規化したものとする。$\sigma(K)$ を K の signature とする。このとき、以下が成り立つ。

$$\mathrm{Sign}\left(\tilde{\Delta}_K(-1)\right) = (-1)^{\frac{\sigma(K)}{2}}$$

L が 2 成分以上の絡み目の場合、$\Delta_L(1) = 0$ より、$\mathrm{Sign}\,(\Delta_L(1)\Delta_L(-1))$ を考えることは意味がない。そこで、絡み目に対してアレクサンダー多項式でなく、細川多項式を用いて符号の一致性を定義した。

*e-mail : 21517511@stn.nitech.ac.jp

2　細川パリティ

細川多項式は次のように定義される。

定義 2 ([細川]). $\Delta_L(t)$ を μ 成分絡み目 L のアレクサンダー多項式とする。

$$H_L(t) := \Delta_L(t)/(1-t)^{\mu-1}$$

を L の細川多項式と呼ぶ。

絡み目の細川多項式は以下の性質を満たす。

定理 3 ([細川]). $H_L(t)$ を絡み目 L の細川多項式としたとき、以下が成り立つ。

- $H_L(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$
- $H_L(t)$ の最高次数と最低次数の差は偶数
- ある整数 m が存在して $H_L(t) = t^m H_L(t^{-1})$ を満たす

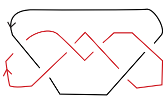
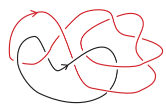
この定理により、絡み目 L の細川多項式 $\tilde{H}_L(t)$ は、$\tilde{H}_L(t) = \tilde{H}_L(t^{-1})$ を満たすとしてよい。$\tilde{H}_L(t)$ を L の**正規化された細川多項式**と呼ぶ。
$\tilde{H}_L(1)$ と $\tilde{H}_L(-1)$ の符号の一致性を定義する。正規化された細川多項式を用いるのは、主結果を見やすくするためである。

定義 4. $\tilde{H}_L(t)$ を絡み目 L の正規化された細川多項式とする。

$$p(L) := \mathrm{Sign}\left(\tilde{H}_L(1)\tilde{H}_L(-1)\right)$$

を L の**細川パリティ**と呼ぶ。

結び目の細川多項式はアレクサンダー多項式と等しいので、定理 1 より結び目の細川パリティは signature のみで決まる。絡み目に対して細川パリティは signature のみで決まらない。

	 L_1	 L_2
$\tilde{H}_L(t)$	$-t^{-1}+4-t$	$t^{-2}-3t^{-1}+3-3t+t^2$
$p(L)$	+1	−1
signature	−1	−1

一般の絡み目に対して、細川パリティは絡み目の signature と次の章で定義される **linking signature** というもので決まることが分かった。

主定理. $\sigma(L)$ と $\mathrm{lk}\sigma(L)$ をそれぞれ絡み目 L の signature と linking signature とする。$p(L) \neq 0$ のとき、次が成り立つ。

$$p(L) = (-1)^{\frac{1}{2}(\sigma(L)-\mathrm{lk}\sigma(L))}$$

主定理の証明は第 5 章に記す。

また主定理をコンウェイ多項式を用いて書き直すと次のようになる。

主定理 (書き換え). $\nabla_L(z)$ を μ 成分絡み目 L のコンウェイ多項式とする。$h_L(z) := \frac{\nabla_L(z)}{z^{\mu-1}}$ としたとき次が成り立つ。

$$p(L) = \mathrm{Sign}(h_L(0)h_L(2i)) = (-1)^{\frac{1}{2}(\sigma(L)-\mathrm{lk}\sigma(L))}$$

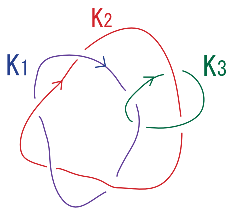
3 linking signature

[細川, Hoste, 河内] で定義されている linking matrix を用いて linking signature を定義する。

定義 5 ([細川, Hoste, 河内]). $L = K_1 \cup \ldots \cup K_\mu$ とする。以下を満たすように構成した μ 次対称行列 $V = (v_{ij})$ を linking matrix と呼ぶ。

- $v_{ij} = \mathrm{lk}(K_i, K_j)$ $(i \neq j)$
- $\sum_{j=1}^{\mu} v_{ij} = 0$ を満たすように v_{ii} を定める。

図 1 に linking matrix の例を示す。



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} K_1 & K_2 & K_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

linking matrix

図 1: linking matrix の具体例

この linking matrix から絡み目の不変量である linking signature を定義する。

定義 6 ([河内]). 絡み目 L から得られる linking matrix の固有値の符号和を **linking signature** と呼び、$\mathrm{lk}\sigma(L)$ と書く。

linking signature は細川パリティを決定するために独自に定義をしたが、大阪市立大学のセミナーで発表した際、[河内] で linking signature に関する結果を出しているということを河内先生に教えて頂いた。

linking matrix は次の性質を満たす。

命題 7. 絡み目から得られる linking matrix の符号和は、i 行目と i 列目を削除しても不変である。

この命題から linking signature は linking matrix の i 行目と i 列目を削除した行列の固有値の符号和でもある。このことは主定理の証明に用いる。またこの命題から 2 成分絡み目の linking signature は次のようになる。

系 8. $\mathrm{lk}\sigma(K_1 \cup K_2) = -\mathrm{Sign}(\mathrm{lk}(K_1, K_2))$

この系から、主定理の系として 2 成分絡み目の細川パリティは次のようになる。

系 9. $L = K_1 \cup K_2$ を 2 成分絡み目とする。$p(L) \neq 0$ のとき次が成り立つ。

$$p(L) = (-1)^{\frac{1}{2}(\sigma(L)+\mathrm{Sign}(\mathrm{lk}(K_1,K_2))}$$

次の章ではトーラス絡み目と 2 橋絡み目の細川パリティについて述べる。

4　特別な絡み目の細川パリティ

4.1　トーラス絡み目

トーラス絡み目のアレクサンダー多項式は、以下であることが知られている [Labastida]。

定理 10. $T(p,q)$ を μ 成分 (p,q) トーラス絡み目とする。このとき次が成り立つ。

$$\Delta_{T(p,q)}(t) = \frac{(t-1)(t^{\frac{pq}{\mu}}-1)^{\mu}}{(t^p-1)(t^q-1)}$$

それゆえ $T(p,q)$ の正規化された細川多項式は以下のようになる。

$$\tilde{H}_{T(p,q)}(t) = t^{-\frac{(p-1)(q-1)-\mu+1}{2}} \frac{(t^{\frac{pq}{\mu}}-1)^{\mu}}{(t^p-1)(t^q-1)(t-1)^{\mu-2}}$$

アレクサンダー多項式と細川多項式は鏡像を区別しないので、p と q は正であると仮定してよい。さらに、$T(p,q)$ と $T(q,p)$ は同じ絡み目なので、結び目のとき、p が偶数で q が奇数であると仮定してよい。

この $\tilde{H}_{T(p,q)}(t)$ に対して、$\tilde{H}_{T(p,q)}(\pm 1)$ を決定した。

定理 11. $p,q>0$ のとき

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{T(p,q)}(1) &= \frac{(pq)^{\mu-1}}{\mu^{\mu}} \\
\tilde{H}_{T(p,q)}(-1) &= \begin{cases} 1 & (\mu=1 \text{ かつ } pq \text{ が奇数}) \\ (-1)^{\frac{q-1}{2}}q & (\mu=1 \text{ かつ } p \text{ が偶数}, q \text{ が奇数}) \\ (-1)^{\frac{pq}{4}-1}\frac{pq}{4} & (\mu=2) \\ (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} & (\mu \geq 3 \text{ かつ } pq \text{ が奇数}) \\ 0 & (\mu \geq 3 \text{ かつ } pq \text{ が偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

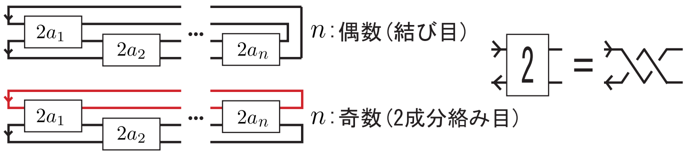
この定理 11 の系として、トーラス絡み目の細川パリティは次のようになる。

系 12. $p,q>0$ のとき

$$p(T(p,q)) = \begin{cases} 1 & (\mu=1 \text{ かつ } pq \text{ が奇数}) \\ (-1)^{\frac{q-1}{2}} & (\mu=1 \text{ かつ } p \text{ が偶数、} q \text{ が奇数}) \\ (-1)^{\frac{pq}{4}-1} & (\mu=2) \\ (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} & (\mu \geq 3 \text{ かつ } pq \text{ が奇数}) \\ 0 & (\mu \geq 3 \text{ かつ } pq \text{ が偶数}) \end{cases}$$

4.2　2 橋絡み目

2 橋絡み目は以下のダイアグラムを持つことが知られている。



このとき、signature と linking number は以下のようになる。

命題 13. L を 2 橋絡み目としたとき次が成り立つ。

$$\sigma(L) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sign}(a_i)$$

また L が 2 成分 2 橋絡み目のとき $(n = 2m-1)$ 次が成り立つ。

$$\mathrm{lk}(L) = -\sum_{i=1}^{m} a_{2i-1}$$

この命題の系として 2 橋絡み目の細川パリティは次のようになる。

系 14. L が 2 橋結び目のとき、

$$p(L) = (-1)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sign}(a_i)}$$

L が 2 橋絡み目であり $p(L) \neq 0$ のとき、

$$p(L) = (-1)^{\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Sign}(a_i) - \mathrm{Sign}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{2i-1}\right)\right)}$$

5　主定理の証明

絡み目の正規化された細川多項式をザイフェルト行列を用いて構成する。

L を μ 成分絡み目、F を種数 g のザイフェルト曲面とする。また F から得られるザイフェルト行列を M とする。M は $(2g+\mu-1)$ 次正方行列である。L のアレクサンダー多項式 $\Delta_L(t)$ は M を用いて次のように構成出来ることはよく知られている。

$$\Delta_L(t) = \det(M - tM^T)$$

これより L の細川多項式 $H_L(t)$ は次のようになる。

$$H_L(t) = \frac{1}{(1-t)^{\mu-1}} \det(M - tM^T)$$

この $H_L(t)$ は $H_L(t) = t^{2g}H_L(t^{-1})$ を満たす。その理由は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
H_L(t) &= \frac{1}{(1-t)^{\mu-1}}\det(M - tM^T) \\
&= \frac{1}{(-t)^{\mu-1}(1-t^{-1})^{\mu-1}}(-t)^{2g+\mu-1}\det(-t^{-1}M + M^T) \\
&= \frac{1}{(1-t^{-1})^{\mu-1}}(-t)^{2g}\det(-t^{-1}M + M^T)^T \\
&= t^{2g}\frac{1}{(1-t^{-1})^{\mu-1}}\det(M - t^{-1}M^T) \\
&= t^{2g}H_L(t^{-1})
\end{aligned}$$

このことから $\tilde{H}_L(t) := t^{-g}\det(M - tM^T)/(1-t)^{\mu-1}$ は L の正規化された細川多項式である。

この $\tilde{H}_L(t)$ に対して、$\mathrm{Sign}(\tilde{H}_L(\pm 1))$ は次を満たす。

補題 15. ザイフェルト行列を用いて構成した $\tilde{H}_L(t)$ に対して、$\tilde{H}_L(1) \neq 0$ のとき次が成り立つ。

$$\mathrm{Sign}(\tilde{H}_L(1)) = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1-\mathrm{lk}\sigma(L))}$$

補題 16. ザイフェルト行列を用いて構成した $\tilde{H}_L(t)$ に対して、$\tilde{H}_L(-1) \neq 0$ のとき次が成り立つ。

$$\mathrm{Sign}(\tilde{H}_L(-1)) = (-1)^{\frac{1}{2}(\sigma(L)-(\mu-1))}$$

この 2 つの補題から主定理が成り立つ。

補題 15 の証明　L のザイフェルト曲面 F として図 2 に示すザイフェルト標準形をとる。$H_1(F)$ の基底 $a_1, \ldots, a_{2g+\mu-1}$ を図 2 のようにとる。$m_{ij} := \mathrm{lk}(a_i^+, a_j)$ とし、ザイフェルト行列 $M := (m_{ij})$ を定義する。ここで a_i^+ は a_i を F の正の方向に押し出したループである。

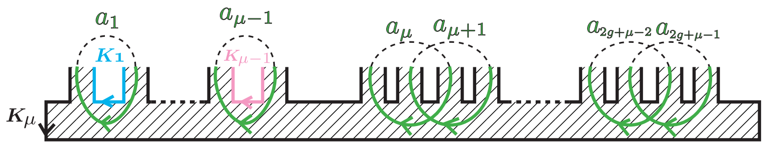


図 2: ザイフェルト標準形

$i \neq j$ を満たす任意の a_i と a_j に対して、次が成り立つ。

$$\begin{cases} a_i \cap a_j \neq \emptyset & ((i,j) = (2k+\mu-2, 2k+\mu-1)\ \ (1 \leq k \leq g)) \\ a_i \cap a_j = \emptyset & (\text{その他}) \end{cases}$$

よって m_{ij} と m_{ji} の関係は次のようになる。

$$\begin{cases} m_{ij} = m_{ji} - 1 & ((i,j) = (2k+\mu-2, 2k+\mu-1)\ \ (1 \leq k \leq g)) \\ m_{ij} = m_{ji} & (\text{その他}) \end{cases}$$

よって、M は以下の形になる。

$$M = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix}$$

ここで、 P は $(\mu-1)$ 次対称行列、R は $2g$ 次正方行列である。さらに R は以下のような形になっている。

$$R=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
M_1 & \multicolumn{4}{c}{R_1} \\ \hline
 & M_2 & \multicolumn{3}{c}{R_2} \\ \cline{2-5}
R_1^T & & \ddots & & \\ \cline{4-5}
 & R_2^T & & M_{g-1} & R_{g-1} \\ \cline{3-5}
 & & & R_{g-1}^T & M_g
\end{array}\right]
\qquad
M_i=\begin{bmatrix} m_{2i+\mu-2\,2i+\mu-2} & m_{2i+\mu-1\,2i+\mu-2}-1 \\ m_{2i+\mu-1\,2i+\mu-2} & m_{2i+\mu-1\,2i+\mu-1} \end{bmatrix}$$

ここで、$1\le i\le \mu-1$ を満たす任意の i に対して、a_i と K_i は平行である。よって $i\ne j$ のとき $m_{ij}=\mathrm{lk}(K_i,K_j)$ である。さらに

$$\begin{aligned}
\mathrm{lk}(K_i,K_\mu) &= -\sum_{j=1}^{\mu-1} m_{ij} \\
&= -\sum_{j=1\ j\ne i}^{\mu-1} \mathrm{lk}(K_i,K_j)-m_{ii}.
\end{aligned}$$

よって次が成り立つ。

$$m_{ii}=-\sum_{j=1\ j\ne i}^{\mu} \mathrm{lk}(K_i,K_j).$$

したがって、P は linking matrix の μ 行目と μ 列目を削除した行列である。

$\tilde{H}_L(t)$ を式変形すると次のようになる。ここで、P が $(\mu-1)$ 次対称行列であることに注意する。

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_L(t) &= t^{-g}\det(M-tM^T)/(1-t)^{\mu-1} \\
&= t^{-g}\frac{1}{(1-t)^{\mu-1}}\det\begin{bmatrix} (1-t)P & (1-t)Q \\ (1-t)Q^T & R-tR^T \end{bmatrix} \\
&= t^{-g}\det\begin{bmatrix} P & Q \\ (1-t)Q^T & R-tR^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

よって、

$$H_L(1)=\det\begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & R-R^T \end{bmatrix}$$

ここで、

$$R-R^T=\bigoplus_{i=1}^{g}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから、 $\tilde{H}_L(1)=\det P$ である。仮定より $p(L)\ne 0$ であるから、$\tilde{H}_L(1)=\det P\ne 0$ である。ゆえに P の正の固有値と負の固有値の個数をそれぞれ ν_+,ν_- とすると、 P が $(\mu-1)$ 次正方行列であるから次が成り立つ。

$$\nu_+ + \nu_- = \mu-1$$

P は L の linking matrix の μ 行目と μ 列目を削除した行列であるから、命題 7 より P の固有値の符号和は $\mathrm{lk}\sigma(L)$ である。それゆえ次が成り立つ。

$$\nu_+ - \nu_- = \mathrm{lk}\sigma(L)$$

よって ν_- は次のようになる。

$$\nu_- = \frac{1}{2}(\mu - 1 - \mathrm{lk}\sigma(L))$$

以上より、

$$\mathrm{Sign}(H_L(1)) = (-1)^{\nu_-} = (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1-\mathrm{lk}\sigma(L))}$$

□

補題 16 の証明

$$\tilde{H}_L(-1) = (-1)^{-g}\frac{1}{2^{\mu-1}}\det(M + M^T)$$

である。仮定より $p(L) \neq 0$ であるから $\tilde{H}(-1) \neq 0$ である。$M + M^T$ の正の固有値の個数と負の固有値の個数をそれぞれ λ_+, λ_- と置くと、$M + M^T$ は $(2g + \mu - 1)$ 次正方行列であるから次が成り立つ。

$$\lambda_+ + \lambda_- = 2g + \mu - 1$$

絡み目の signature の定義から次が成り立つ。

$$\lambda_+ - \lambda_- = \sigma(L)$$

よって λ_- は次のようになる。

$$\lambda_- = g + \frac{1}{2}(\mu - 1 - \sigma(L))$$

λ_- は整数より $(-1)^{\lambda_-} = (-1)^{-\lambda_-}$ であるから、以上より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Sign}(H_L(-1)) &= (-1)^{-g}(-1)^{-\lambda_-} \\ &= (-1)^{g}(-1)^{-g-\frac{1}{2}(\mu-1-\sigma(L))} \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(\sigma(L)-(\mu-1))}\end{aligned}$$

□

この補題 15、16 より主定理は示された。

参考文献

[Giller] C. Giller, *A family of links and the Conway calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. **270** (1982), 75-109.

[細川] F. Hosokawa, *On ∇-polynomials of links*, Osaka Math. J. **10** (1958), 273-282.

[Hoste] J. Hoste, *The first coefficient of the Conway polynomial*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 299-302.

[Labastida] J. M. F. Labastida and M. Marino, *The HOMFLY polynomial for torus links from Chern-Simons gauge theory*, Internat. J. Modern Phys. A **10** (1995) 1045-1089.

[河内] A. Kawauchi, *The quadratic form of a link*, Contemp. Math. **233** (1999), 97-116.