

# Bracket polynomials of knotoids

大西 輝 (大阪市立大学 M2)\*<sup>1</sup>

## 概要

V. Turaev[1] によって紹介された knotoid とは交差点の上下の情報を持った double points のみを持つ垂直に交わった平面弧で表される diagram の同値類である。今回の講演では, knotoid のブラケット多項式を定義して, その span と交点数の関係について述べていく。

## §1 Knotoid

この章では knotoid について定義していく。

**定義 1.1.**  $D$  が *knotoid diagram* であるとは特異点が交差点の上下の情報を持った double points である  $[0, 1]$  から  $S^2$  へのはめ込みの像のことをいう。

Knotoid diagram は 0 の像である leg と、1 の像である head と呼ばれる 2 つの端点 (*endpoints*) を持つ。以下, diagram には leg から head への向きが付いているものとする。  $D$  の double point のことを  $D$  の交点 (*crossings*) という。

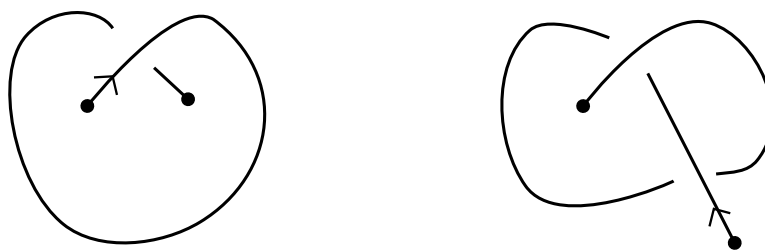


図 1. knotoid diagrams

2 つの knotoid diagram の同値性を調べるために Reidemeister move が使われる。これは, knot diagram における Reidemeister move と同じであるが, endpoint を飛び越えるような図 2 の変形は許されていない。

---

\*<sup>1</sup> e-mail: a.ohnishi.math@gmail.com

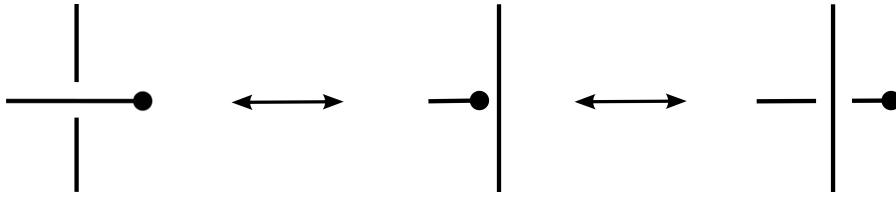


図 2. Forbidden moves

**定義 1.2.** 2つの knotoid diagram が同値 (*equivalent*) であるとは, 一方の diagram がもう一方の diagram から  $S^2$  内のアイソトピーと Reidemeister move の有限列で得られることをいう.

$S^2$  の *knotoid*  $K$  とは knotoid diagram の同値類であり,  $K = [D]$  とあらわす. この時,  $K$  の交点数 (*crossing number*) とは  $K$  の diagram の最小交点数であり,  $cr(K)$  とあらわす.  $cr(K) = 0$  の *knotoid* のことを *trivial knotoid* という.

## §2 Bracket polynomial

この章では *knotoid* に対するブラケット多項式とその span について定義する. 初めに交点に対する操作として *A-splice* と *B-splice* を紹介する.

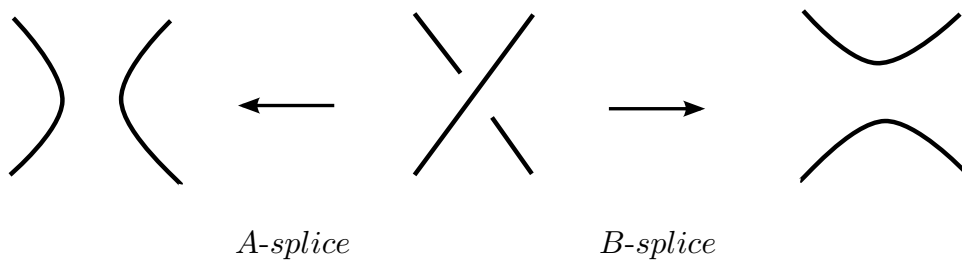


図 3. Splices

$D$  を *knotoid diagram* とする.  $D$  における状態 (*state*)  $s$  とは  $D$  の各交点を *A-splice* または *B-splice* に置き換える変形のことである. その  $s$  によって導かれる diagram を  $D_s$  と呼ぶ.

**定義 2.1.**  $S(D)$  を  $D$  の状態の全ての集合とする.  $a(s)$  と  $b(s)$  をそれぞれ  $D$  から

$D_s$  を得るために必要な  $A$ -splice,  $B$ -splice の数とする.  $|s|$  を  $D_s$  の成分数とする. この時  $D$  の ブラケット多項式 (bracket polynomial)  $\langle D \rangle$  は次の Laurent polynomial であらわされる.

$$\langle D \rangle = \sum_{s \in S(D)} A^{a(s)-b(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|s|-1}.$$

この Laurent polynomial  $\langle D \rangle$  は Reidemeister moves  $\Omega_2$  と  $\Omega_3$  では不変であるが,  $\Omega_1$  では  $(-A^3)^{\pm 1}$  倍される. このずれを補正するために *writhe* が用いられる.

**定義 2.2.** Knotoid diagram  $D$  の *writhe*  $w(D)$  とは,  $D$  の交点における符号の合計である. その符号は下記のようにして定める.

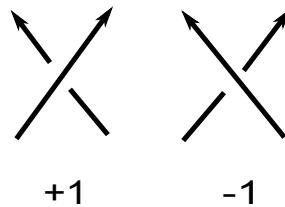


図 4. 交点の符号

**定義 2.3.**  $D$  の標準化されたブラケット多項式 (normalized bracket polynomial)  $\langle D \rangle_0$  は次の Laurent polynomial であらわされる.

$$\langle D \rangle_0 = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle.$$

$\langle D \rangle_0$  は Reidemeister moves  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  の下で不変である. すなわち knotoid の不変量となっている.

ブラケット多項式を使った便利な不変量の 1 つとして *span* がある.

**定義 2.4.** Laurent polynomial  $f$  の *span* とは, polynomial の最大次数と最小次数の差であり,  $\text{span}(f)$  とあらわされる.

Knotoid diagram  $D$  のブラケット多項式の *span* は  $\text{span}(D) = \text{span}(\langle D \rangle)$  のように定義する. Knotoid  $K$  に対する diagram  $D$  のブラケット多項式の *span* は  $\text{span}(K) = \text{span}(\langle K \rangle_0) = \text{span}(\langle D \rangle_0)$  とあらわす. 定義より knotoid の *span* は負ではない偶数に

なることがわかる.

### §3. Main result

この章では主結果について紹介する. 最初の定理の前に準備として knotoid diagram に対する shortcut を定義する.

**定義 3.1.**  $D$  を knotoid diagram とする.  $a$  が  $D$  の *shortcut* であるとは,  $a$  が次の 3 つの条件を満たした  $S^2$  への滑らかに埋め込まれた弧のことをいう.

- (i)  $D$  の端点同士をつないでいること.
- (ii)  $D$  と有限個の点で垂直に交わっていること.
- (iii)  $a$  が  $D$  に対する overpass または underpass になっていること.

$a$  が overpass になっている時,  $D \cup a$  は  $D_+$  とあらわし,  $a$  が underpass になっている時,  $D \cup a$  は  $D_-$  とあらわす. つまり, 1 つの knotoid diagram から 2 つの結び目図式が作り出される.

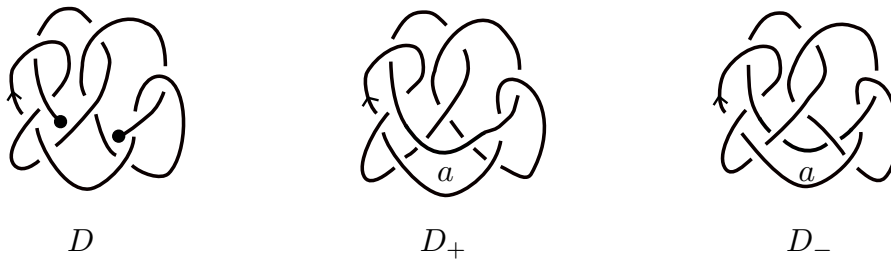


図 5. Shortcuts

$D_+$  と  $D_-$  であらわされる結び目は  $a$  の選び方には依らない. それはどのような 2 つの shortcut もアイソトピーとなっているからである. 以下では,  $\#(D \cap a)$  が最小となるように  $a$  を取り,  $\#(D \cap a) = n$  とする. そしてそのような  $a$  を  $D$  の  $n$  交点 shortcut と呼ぶ.

**定義 3.2.** Knotoid diagram  $D$  が *pure* ではあるとは,  $D_+$  と  $D_-$  が同値でないことをいう.

図5の  $D$  の場合, 変形により  $D_+$  と  $D_-$  が同値でないことがわかるため pure diagram となっている. また *pure knotoid*  $K$  とは, pure knotoid diagram を持つような knotoid のことである.

**定理 3.3.**([1])  $K$  を pure knotoid とする. その時次の不等式を得る.

$$\text{span}(K) \leq 4cr(K) - 2.$$

この定理の証明には次の2つの定理を使えばよい. 証明は [1] を参照してほしい.

**定理 3.4.** 任意の knotoid  $K$  に対して次が成り立つ.

$$\text{span}(K) \leq 4cr(K).$$

**定理 3.5.**  $D$  を knotoid  $K$  の diagram とする. また  $a$  を  $D$  の  $n$  交点 shortcut とする. この時,  $\text{span}(K) = 4cr(K)$  となる必要十分条件は  $n = 0$  かつ  $D \cup a$  が既約交代結び目図式をあらわすときである.

定理 3.3 について次の図 6 を使って様々な例でみていく. まずは左の 5 交点 diagram  $D_1$  であらわされる knotoid  $K_1$  の場合である. この knotoid は pure である. また  $\langle D_1 \rangle_\circ = A^8 - A^4 + 2 - 2A^{-4} - A^{-6} + A^{-8} + A^{-10}$  より  $\text{span}(K_1) = 8 - (-10) = 18$  である. よって定理 3.3 を使うと  $cr(K_1) = 5$  となることがわかる. 次に真ん中の 7 交点 diagram  $D_2$  であらわされる knotoid  $K_2$  についてである. こちらも pure knotoid である. そして  $\langle D_2 \rangle_\circ = A^{-12} + A^{-14} - 2A^{-18} + 3A^{-22} + 2A^{-24} - 3A^{-26} - 3A^{-28} + A^{-30} + 2A^{-32} - A^{-36}$  より  $\text{span}(K_2) = -12 - (-36) = 24$  である. よって  $cr(K_2) = 7$  であることがわかる. 最後に右の 3 交点 diagram  $D_3$  であらわされる knotoid  $K_3$  についてである. これは  $a$  を overpass と underpass のどちらででつないでも左手系三葉結び目になるため pure knotoid ではない. また  $\langle D_3 \rangle_\circ = -A^{16} + A^{12} + A^4$  より  $\text{span}(K_3) = 16 - 4 = 12$  である. よって  $K_3$  には定理 3.3 が適用できないことがわかる. (実は  $K_3$  には定理 3.5 が適用できて, それにより  $cr(K_3) = 3$  であることがわかる.)

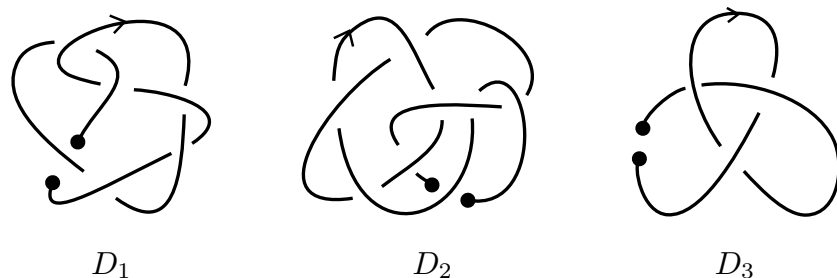


図 6. 定理 3.3 に関する例

今回の講演ではこの定理を様々な pure knotoid について詳しく考察した. これから述べていくが, その前に 2 つの knotoid の積を紹介する. Knotoid diagram の各端点は  $D$  と 1 点のみで交わる閉 2 - 円板近傍  $B$  を持つ. このような  $B$  を端点の正則近傍 (*regular neighborhood*) と呼ぶ. この近傍を使って knotoid の積を定義する.  $K_1, K_2$  を knotoid,  $D_1, D_2$  をそれぞれ  $K_1, K_2$  の diagram とする. まず  $D_1$  の head の正則近傍  $B_1$  と  $D_2$  の leg の正則近傍  $B_2$  を取る. 次に  $D_1 \cap \partial B_1$  を  $D_2 \cap \partial B_2$  につす同相写像  $\partial B_1 \rightarrow \partial B_2$  で  $S_2 - \text{Int}(B_1)$  と  $S_2 - \text{Int}(B_2)$  を貼りつける. そうすることで  $S_2 - \text{Int}(B_1)$  と  $S_2 - \text{Int}(B_2)$  が 1 点で交わり  $S^2$  の diagram  $D_1 D_2$  が作り出される.  $D_1 D_2$  で定められる knotoid  $K_1 K_2$  は 向きを保つ同相写像を除き well-defined になっている. またこの時,  $\langle K_1 K_2 \rangle_\circ = \langle K_1 \rangle_\circ \langle K_2 \rangle_\circ$  と  $\text{span}(K_1 K_2) = \text{span}(K_1) + \text{span}(K_2)$  が成り立つ.

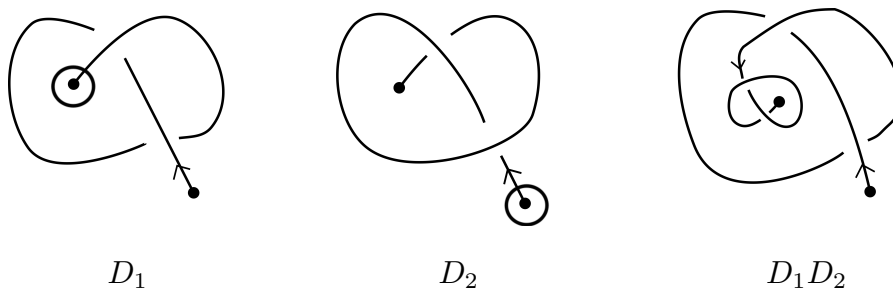


図 7. knotoid の積

**定義 3.6.** Knotoid  $K$  が *prime* であるとは,  $K$  が trivial knotoid ではなく 2 つの non-trivial knotoids  $K_1$  と  $K_2$  により  $K = K_1 K_2$  のようにあらわされないことをいう.

次の定理は prime pure knotoid に関するものである.

**定理 3.7.**  $K$  を prime pure knotoid で  $D$  をその diagram とする.  $a$  を  $D$  の  $n$  交点 shortcut として  $\widehat{D} = D \cup a$  を結び目図式とする. もし  $n = 1$  かつ  $\widehat{D}$  が  $cr(D) + 1$  交点 既約交代結び目図式をあらわす (ここでは  $D_+$ ,  $D_-$  のどちらかがあらわすという意味) ならば,

$$span(K) = 4cr(K) - 2$$

という等式を得る. また  $n = 1$  かつ  $\widehat{D}$  がそのような交代図式をあらわさない時 ( $D_+$ ,  $D_-$  のどちらもあらわさない), または  $n \geq 2$  ならば,

$$span(K) \leq 4cr(K) - 4$$

という不等式を得る.

**証明の概要.** まずは  $span(K) = 4cr(K) - 2$  の場合を考える.  $\widehat{D}$  を交代結び目図式とする.  $s_+(\widehat{D})$  と  $s_-(\widehat{D})$  をそれぞれ  $\widehat{D}$  のすべての交点で  $A$ -splice,  $B$ -splice した diagram とする.  $\widehat{D}$  のブラケット多項式の  $span$  は交点数の 4 倍に等しいことと,  $s_+(D)$  と  $s_-(D)$  の成分数がそれぞれ  $s_+(\widehat{D})$  と  $s_-(\widehat{D})$  の成分数よりもちょうど 1 だけ小さいことから計算により等式  $span(D) = 4cr(D) - 2$  を得て, 定理の等式が導き出される.

次に  $span(K) \leq 4cr(K) - 4$  の場合を考える. この不等式を考えるために次の補題を与える.

**補題 3.8.**  $a$  を  $D$  の  $n$  交点 shortcut,  $\widehat{D}$  を自明でない非交代結び目図式とする.  $s_+(\widehat{D}; a)$ ,  $s_-(\widehat{D}; a)$  をそれぞれ  $\widehat{D}$  から  $a$  の周りを除く全ての交点で  $A$ -splice,  $B$ -splice した diagram とする. その時, 次の不等式を得る.

$$|s_+(\widehat{D}; a)| + |s_-(\widehat{D}; a)| \leq |s_+(\widehat{D})| + |s_-(\widehat{D})| - n.$$

**補題 3.9.**  $\widehat{D}$  を自明でなく prime な非交代結び目図式とする. この時, 次の不等式を得る.

$$|s_+(\widehat{D})| + |s_-(\widehat{D})| \leq cr(\widehat{D}).$$

この2つの補題を使って  $\text{span}$  の計算をすることで  $\text{span}(K) \leq 4\text{cr}(K) - 4$  を得て、定理の不等式が証明できる。  $\square$

定理 3.7 では prime knotoid について述べたが、この定理を使うことで prime ではない knotoid についても次の不等式が成り立つ。

**公理 3.10.**  $K = K_1K_2$  を  $K_1$  と  $K_2$  が non-trivial knotoid である pure knotoid,  $D$  をその diagram とする。また  $a$  を  $D$  の  $n$  交点 shortcut とする。この時、

$$\text{span}(K) \leq \begin{cases} 4\text{cr}(K) - 2 & (n = 1) \\ 4\text{cr}(K) - 4 & (n \geq 2) \end{cases}$$

を得る。

この公理について次の図 8 を使ってみていく。まず左の 5 交点 diagram  $D_4$  であらわされる knotoid  $K_4$  についてである。  $\langle D_4 \rangle_0 = A^{26} - 2A^{22} - A^{20} + A^{18} + A^{16} - A^{14} + A^{10} + A^8$  より  $\text{span}(K_4) = 26 - 8 = 18$  となり  $\text{span}(K_4) = 4\text{cr}(K_4) - 2$  が成り立つ。よって  $\text{cr}(K_4) = 5$  であることがわかる。次に右の 4 交点 diagram  $D_5$  であらわされる knotoid  $K_5$  の場合では、  $\langle D_5 \rangle_0 = -A^6 - A^4 + A^2 + 3 + A^{-2} - A^{-4} - A^{-6}$  より  $\text{span}(K_5) = 6 - (-6) = 12$  となり  $\text{span}(K_5) = 4\text{cr}(K_5) - 4$  を得る。よって  $\text{cr}(K_5) = 4$  であることがわかる。

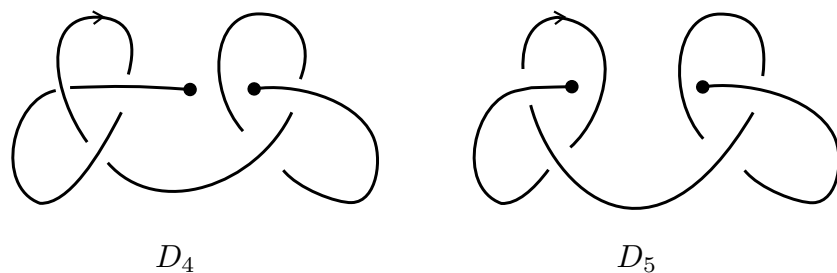


図 8. 公理 3.10 に対する例

#### §4. 補足

研究集会の講演で削除されていたと言いました knotoid の表ですが、報告集作成時に発見いたしましたので掲載します.[2] しかしこれには研究集会内で谷山先生が質問で挙げ



られた次の 4 交点 diagram  $D_6$  であらわされる knotoid  $K_6$  が掲載されていませんでした. この  $K_6$  についてであるが  $D_{6+}$  と  $D_{6-}$  が共に左手系三葉結び目になるため pure ではなく, また  $\langle D_6 \rangle_0 = A^{20} - 2A^{16} - 2A^{14} + A^{12} + 2A^{10} + A^8$  となるため自明ではないことがわかります. ここで  $\text{span}(K_6) = 20 - 8 = 12$  であることと, 定理 3.4, 3.5 より  $\text{span}(K_6) \leq 4cr(K_6) - 2$  であるから  $cr(K_6) = 4$  を得ます. 表自体が pure なものを対象としてリストを挙げている可能性もありますが, まだよくわかっていないのが現状です.

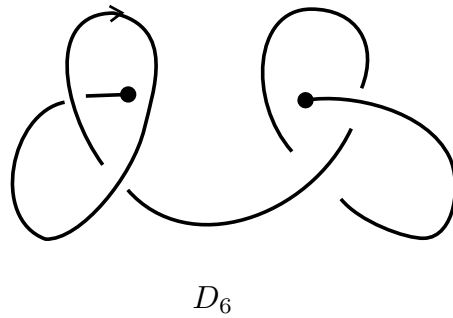


図 9. 自明でなく pure でもない knotoid(谷山先生による例示)

## 参考文献

- [1] V. Turaev, KNOTOIDS, arXiv:1002.4133v5
- [2] A. Bartholomew, <http://www.layer8.co.uk/maths/knotoids/index.htm>.