

ミュータントな結び目の零番係数 HOMFLYPT 多項式の ケーブル化不変量 (The cable version of the zeroth coefficient HOMFLYPT polynomial of a mutant knot)

滝岡 英雄

大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻後期博士課程 1 年

概要

HOMFLYPT 多項式とその 2 ケーブル化不変量ではミュータントな結び目の組を区別できないことが知られている [3]. 一方で, HOMFLYPT 多項式の 3 ケーブル化不変量で区別できるミュータントな結び目の組が存在することが知られている [5], [6]. そこで, 興味があるのは HOMFLYPT 多項式の一部である零番係数多項式のケーブル化不変量でミュータントな結び目の組を区別できるかという問題である. 本稿では, 零番係数多項式の 3 ケーブル化不変量ではミュータントな結び目の組を区別できないことを示す.

1 零番係数 HOMFLYPT 多項式

HOMFLYPT 多項式 $P(L) = P(L; y, z) \in \mathbb{Z}[y, y^{-1}, z, z^{-1}]$ は, 絡み目 L の不変量で次のスケイン関係式が成り立つ:

$$(i) P(\bigcirc) = 1, (ii) yP(L_+) + y^{-1}P(L_-) = zP(L_0).$$

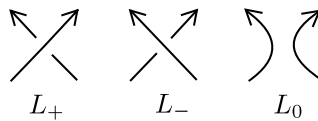


図 1

r 成分の絡み目 L の HOMFLYPT 多項式は, 次のように表せる:

$$P(L; y, z) = (yz)^{-r+1} \sum_{n \geq 0} c_n(L; -y^2) z^{2n}.$$

ここで z^{2n} の係数 $c_n(L; -y^2)$ は変数 $-y^2$ のローラン多項式で, これもまた絡み目の不変量である. このローラン多項式 $c_n(L) = c_n(L; x)$ ($x = -y^2$) を n 番係数 HOMFLYPT 多項式という ($c_{-1}(L) = 0$). 特に零番係数 HOMFLYPT 多項式 $c_0(L)$ を $\Lambda(L)$ で表す. 河内明夫氏によって n 番係数 HOMFLYPT 多項式のスケイン関係式が次のように与えられている [2]:

$$(i) c_n(\bigcirc) = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ 0 & (n \neq 0), \end{cases} \quad (ii) -xc_n(L_+) + c_n(L_-) = (-x)^\delta c_{n-\delta}(L_0).$$

ここで $\delta = \frac{r_+ - r_0 + 1}{2}$ ($= 0$ か 1) で, r_+, r_0 はそれぞれ L_+, L_0 の成分数である. 本稿では, 特に零番係数 HOMFLYPT 多項式に注目する. その理由は, 次のような計算を簡単にする性質があるからである.

命題 1.1. $L = K_1 \cup \dots \cup K_r$ を r 成分の絡み目とし, L の全絡み数を $\text{lk}(L) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} \text{lk}(K_i, K_j)$ で表す. このとき, 次が成り立つ:

$$\Lambda(L) = (1-x)^{r-1} x^{-\text{lk}(L)} \Lambda(K_1) \cdots \Lambda(K_r).$$

この性質から零番係数 HOMFLYPT 多項式のスケイン関係式は次のようになる:

$$-x\Lambda(K_+) + \Lambda(K_-) = (1-x)x^{-\text{lk}(K', K'')} \Lambda(K') \Lambda(K'').$$

ここで $(K_+, K_-, K_0 = K' \cup K'')$ はスケイントリプルであり, K_+, K_- は結び目で K_0 は 2 成分 K', K'' から成る絡み目である.

例 1.2. 8 の字結び目の零番係数 HOMFLYPT 多項式の計算を紹介する.

$$\begin{aligned} \Lambda(K_+) &= x^{-1} \Lambda(K_-) - x^{-1} (1-x) x^{-\text{lk}(K', K'')} \Lambda(K') \Lambda(K'') \\ &= x - 1 + x^{-1}. \end{aligned}$$

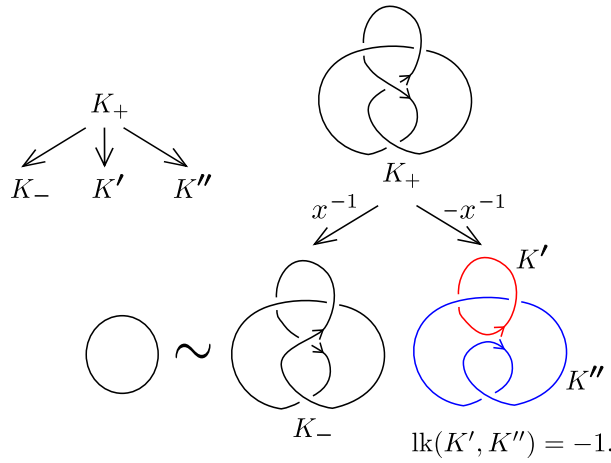


図 2

2 零番係数 HOMFLYPT 多項式のケーブル化不変量

K を S^3 内の結び目とし N を K の管状近傍とする. $T(p, q)$ を S^3 内の標準的なソリッドトーラス V 上の (p, q) トーラス結び目とする. $\varphi: V \rightarrow N$ を忠実な同相写像とする. 即ち, 同相写像 φ は V のメリディアンロンジチュード系対を N のメリディアンロンジチュード系対に写すものである. このとき, S^3 内の結び目 $\varphi(T(p, q))$ を K の (p, q) ケーブル結び目といい, $K^{(p, q)}$ で表す. $K^{(p, q)}$ の不変量は, K の不変量にもなるので, 次のように結び目 K の零番係数 HOMFLYPT 多項式の (p, q) ケーブル化不変量 $\Lambda_{p/q}(K)$ を定義できる:

$$\Lambda_{p/q}(K) = \Lambda(K^{(p, q)}).$$

例 2.1. 金信結び目 $k(n)$ は, すべての n に対して *HOMFLYPT* 多項式とそのカテゴリー化である *Khovanov-Rozansky* ホモロジーが一致することで知られている [1], [4]. しかし, 零番係数 *HOMFLYPT* 多項式の $(2, 1)$ ケーブル化不変量を使うことで完全に分類することができる [7]:

定理 2.2. $k(n)$ を金信結び目 ($n \geq 0$) とする. このとき, 次の漸化式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \Lambda_{2/1}(k(0)) &= 5x^4 - 22x^3 + 48x^2 - 60x + 39 \\ &\quad + 4x^{-1} - 34x^{-2} + 34x^{-3} - 17x^{-4} + 4x^{-5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{2/1}(k(n)) - \Lambda_{2/1}(k(n-1)) &= \\ &= -2x^{n+2} + 8x^{n+1} - 10x^n + 10x^{n-2} - 8x^{n-3} + 2x^{n-4} \\ &\quad + 2x^{-n+3} - 8x^{-n+2} + 10x^{-n+1} - 10x^{-n-1} + 8x^{-n-2} - 2x^{-n-3}. \end{aligned}$$

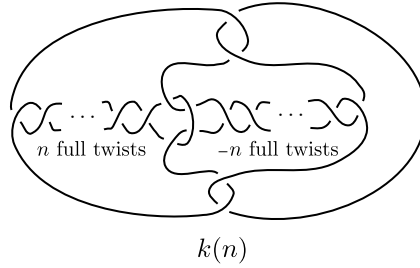


図 3

3 主結果

定理 3.1. K と K' をミュータントな結び目の組とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\Lambda_{3/q}(K) = \Lambda_{3/q}(K').$$

Proof. まず $D(G)$ を K の図式とする. このとき, K' は図 4 中の図式 $D(G_x)$, $D(G_y)$, $D(G_z)$ のいずれかである. ここで G_x, G_y, G_z は, $D(G)$ のタングル G をそれぞれ x, y, z 軸に関して 180 度回転したものである. 次に図 5 のように $D(G), D(G_x), D(G_y), D(G_z)$ の $(3, q)$ ケーブル結び目図式 $\tilde{D}(G), \tilde{D}(G_x), \tilde{D}(G_y), \tilde{D}(G_z)$ を考える. ここで \tilde{G}, \tilde{R} はそれぞれ $D(G)$ のタングル G, R を平行化したものである. これらの図式は, タングル Q を使うとそれぞれ図式 $\tilde{D}(Q), \tilde{D}(Q_x), \tilde{D}(Q_y), \tilde{D}(Q_z)$ と同値であることがわかる. つまり, $\Lambda(\tilde{D}(Q)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_x)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_y)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_z))$ を示せばよい. $\Lambda(\tilde{D}(Q)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_x)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_y)) \implies \Lambda(\tilde{D}(Q)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_z))$ なので $\Lambda(\tilde{D}(Q)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_x)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_y))$ を示せば十分である. さらに, 図 6 より次の補題が成り立つ:

補題 3.2. $\Lambda(\tilde{D}(Q)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_x)) \implies \Lambda(\tilde{D}(Q)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_y))$.

この補題 3.2 により, $\Lambda(\tilde{D}(Q)) = \Lambda(\tilde{D}(Q_x))$ を示せば十分である. 図 7 のように $\tilde{D}(Q)$ と $\tilde{D}(Q_x)$ のタングル Q と Q_x 内の対応する交差点でスケイン関係式を繰り返し適用していく. 最終的に得られたスケイン分解樹の対応する末端の図式 $\tilde{D}(Q')$ と $\tilde{D}(Q'_x)$ を比較する. 図 8 より, その対応するすべての図式が同値であることが確かめられる. (図 8 の図式の意味は図 9 で例を用いて示している.) \square

同様に n ケーブル化不変量の場合 ($n \geq 4$) を考察する. しかし, 図 10 のように, 一般に $\Lambda(\tilde{D}(Q')) \neq \Lambda(\tilde{D}(Q'_x))$ をみたすタングル Q' が存在するので, この議論では示すことができない.

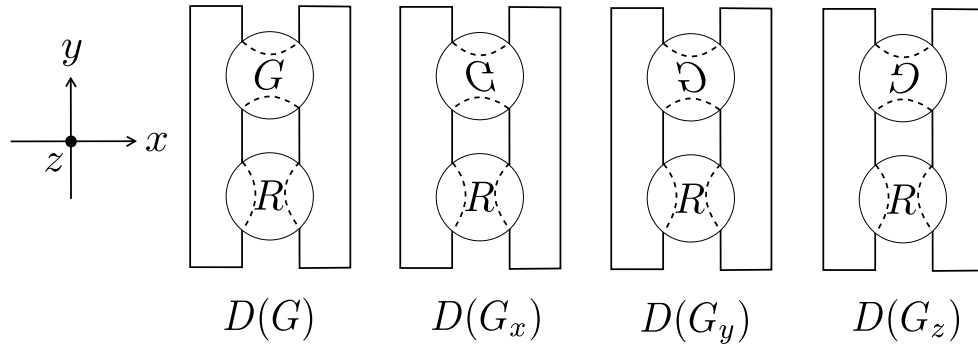


図 4

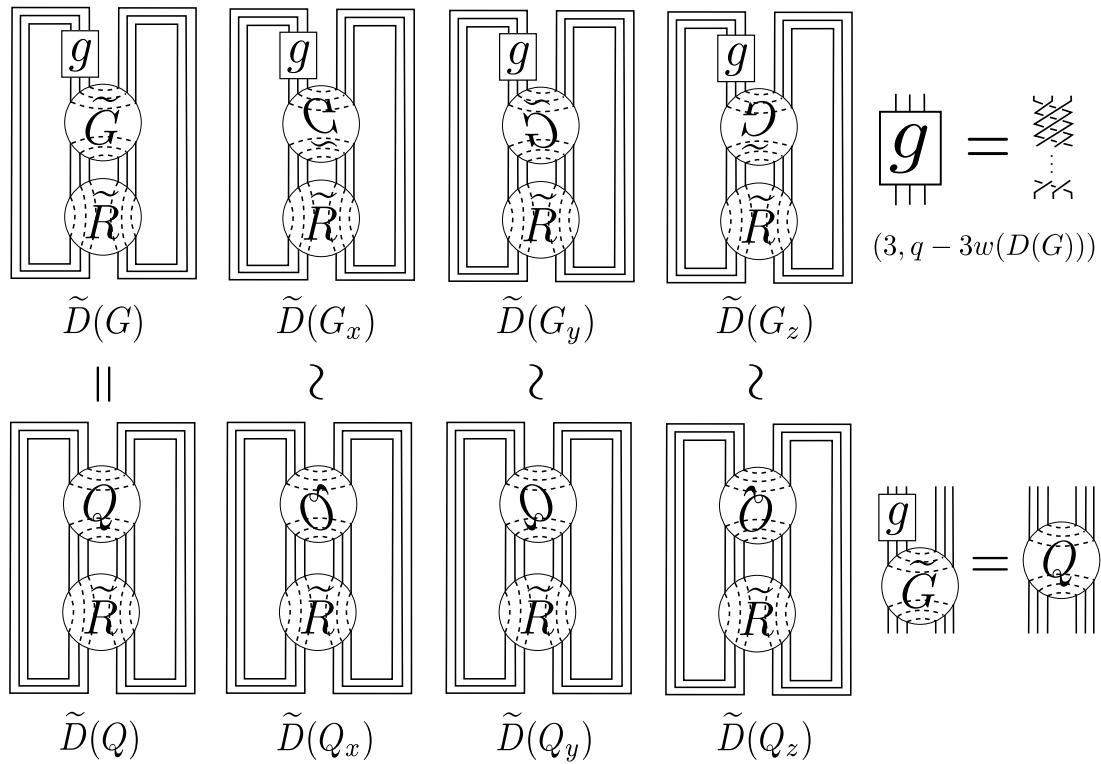


図 5

参考文献

- [1] Taizo Kanenobu: Infinitely many knots with the same polynomial invariant. Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), no. 1, 158-162.

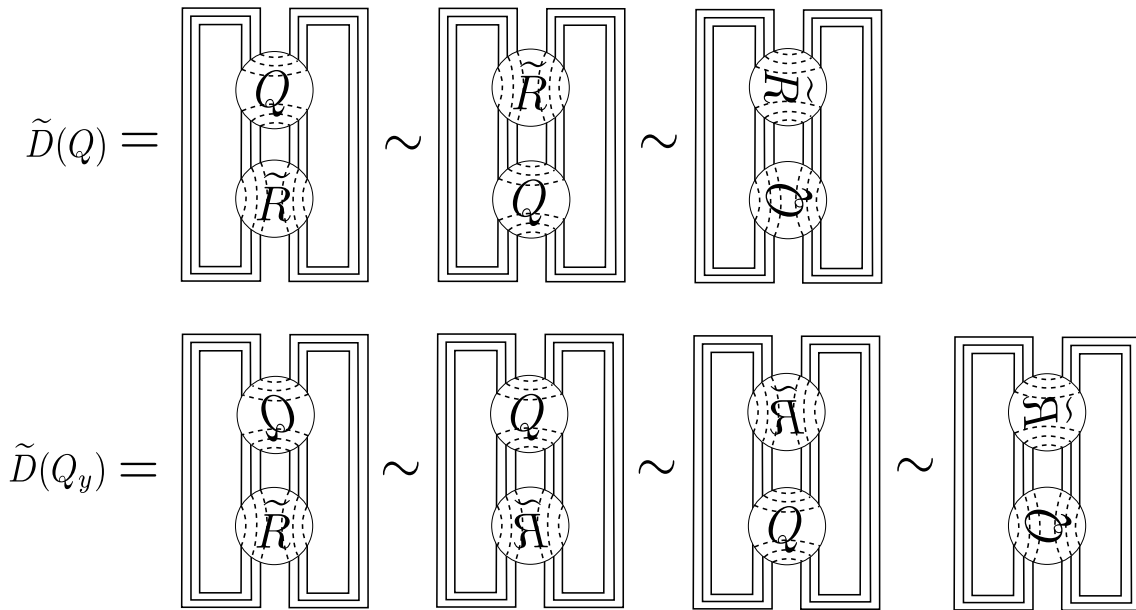


図 6

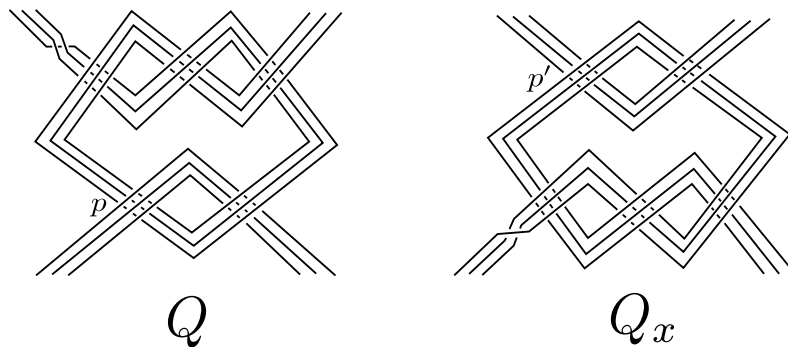


図 7

- [2] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版 (2007).
- [3] W. B. R. Lickorish and A. S. Lipson: Polynomials of 2-cable-like links. Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), no. 2, 355-361.
- [4] A. Lobb: The Kanenobu knots and Khovanov-Rozansky homology, arXiv: 1105.3985v1 [math.GT] (2011).
- [5] H. R. Morton and P. Traczyk: The Jones polynomial of satellite links around mutants. Braids (Santa Cruz, CA, 1986), 587-592, Contemp. Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [6] Jun Murakami: The parallel version of polynomial invariants of links. Osaka J. Math. 26 (1989), no. 1, 1-55.
- [7] Hideo Takioka: The zeroth coefficient HOMFLYPT polynomial of a 2-cable knot, to appear in J. Knot Theory Ramifications.

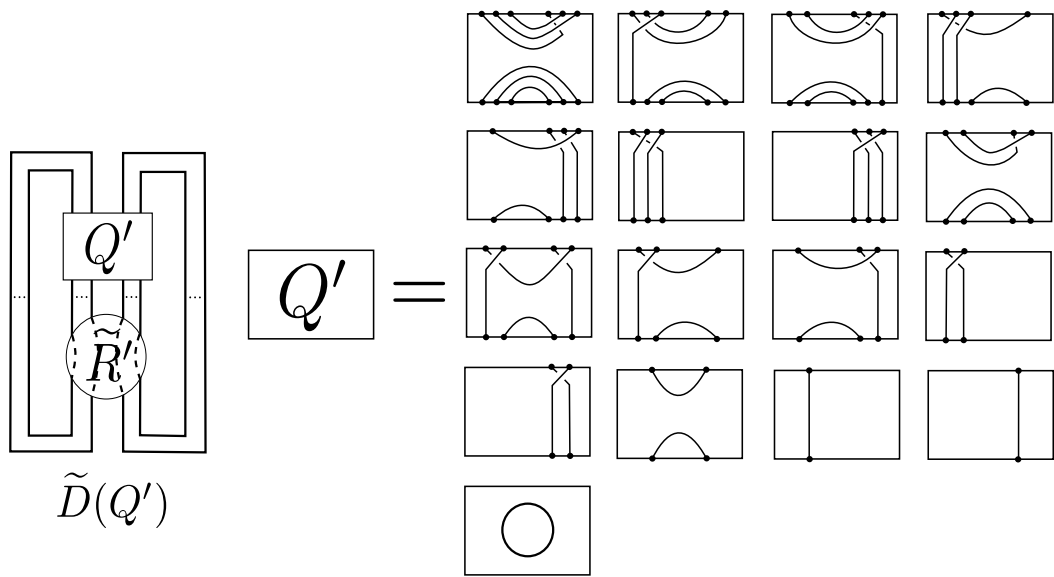


图 8

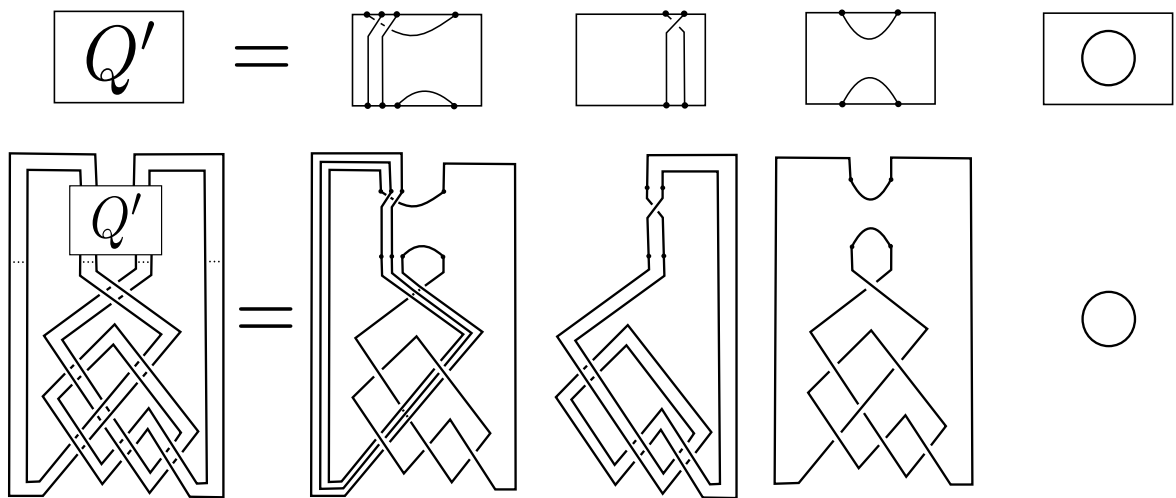


图 9

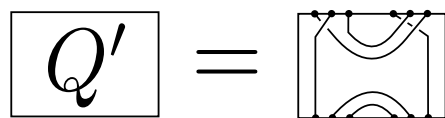


图 10