

# 研究集会「結び目の数理」

## 講演アブストラクト集

12月23日(日)

瀧村祐介(学習院中等科)

Crosscap number and knot projections

(伊藤昇氏(東大数理)との共同研究)

球面上の knot projection に対して、unknotting-type number を定義する。この値と、knot projection から得られる knot の crosscap number との不等式を得たので、報告する。

伊藤昇(東京大学大学院数理科学研究科)

On crosscap number two alternating knots

(瀧村祐介氏(学習院中等科)との共同研究)

本講演は瀧村祐介氏(学習院中等科)との共同研究である。結び目のクロスキャップは1978年にClark氏により導入され、その論文で結び目がクロスキャップ1であることの必要十分条件は得られていた。今回、交代結び目がクロスキャップ2であることの必要十分条件を得たので報告する。

本講演に際し最低限言及しなくてはならない先行研究について付記する(以下、敬称略)。これまでクロスキャップは、結び目種数との関係と加法性に関する必要十分条件(村上斉-安原, 1995)、トラス結び目(寺垣内, 2004)、2橋結び目(平澤-寺垣内, 2006)、プレツェル結び目(市原-水嶋, 2010)といった形で解明されてきた。これらを踏まえて今回は、Clarkの続きとしてクロスキャップを下から決めていくという方向性の研究を紹介する。我々の方針はAdams-Kindred(2013)によるカウフマンステイトによるクロスキャップの理論的決定に対し瀧村氏が導入したknot projectionのunknotting-type numberを用いて実質的な計算法を考案していくというストーリーで記述される。尚、我々とは別の方向性でAdams-Kindredのクロスキャップ理論はKalfagianni-Lee(2016)によりcolored Jones多項式と関係付けられ再解釈とともに計算効率化されていることも申し添えておきたい(この論文は我々も使っている)。

小林住香(奈良女子大学大学院人間文化研究科)

Stable double point numbers of pairs of spherical curves

For a pair of spherical curves  $P$  and  $P'$  that are related by a sequence of deformations of type RI or type RIII, the *stable double point number between  $P$  and  $P'$* , denoted  $sd(P, P')$  is defined to be the minimum of the maximum of the double point numbers of the spherical curves in a sequence connecting  $P$  and  $P'$  among all sequences connecting  $P$  and  $P'$ . In this talk, we show that there exists a spherical curve  $P(5; 5)$  with 25 double points such that  $sd(P(5; 5), \text{trivial spherical curve}) = 27$ .

橋爪恵(明治大学研究・知財戦略機構/大阪市立大学数学研究所)

Distances of complexes derived from spherical curves and their estimates

本研究は伊藤昇氏(東京大学)との共同研究です。球面曲線に対して交差の上下の情報を無視した Reidemeister move  $I, II, III$  ( $RI, RII, RIII$  と書く)を施す。本講演では球面曲線と球面曲線に  $RI$  と  $RIII$  を施すことから誘導される複体を考える。この複体を考えるにあたって、局所変形  $RI$  と  $RIII$  に代わる局所変形を提案し、その局所変形から誘導される複体を考える。

**中根優太 (名古屋工業大学大学院工学研究科)**

**Shortening the flat length of the Alexander polynomial of 2-bridge knots by twisting**

交代結び目の Alexander 多項式の係数に関して、Fox の台形予想が未解決である。この予想は、70 年代に Hartley によって 2-bridge link に対して証明された。台形の上辺の長さを flat length と呼ぶ。Hirasawa-Murasugi は交代結び目の Alexander 多項式に関して flat length が knot signature を超えないことを予想した。2018 年に Wenzhao Chen はこの予想を 2-bridge link に対して証明した。本講演では、任意の  $n$  に対して、signature および flat length が  $2n$  となる 2-bridge knot  $K$  から出発し、それぞれ band twist 一回で  $K$  から得られ、signature は  $2n$  のままで flat length が 0 から  $2n - 2$  までの偶数が揃う 2-bridge knot の列を構成する。

**12 月 24 日 (月)**

**松土恵理 (日本大学大学院総合基礎科学研究科)**

**On the minimal coloring number of a minimal diagram for torus links**

**(石川勝巳氏 (京都大学数理解析研究所)、市原一裕氏 (日本大学文理学部) との共同研究)**

For a link diagram admitting a  $\mathbb{Z}$ -coloring, the minimal coloring number of the diagram is defined as the minimum of the number of the colors on the diagram. In this talk, we report some results of the minimal coloring number of a minimal diagram for a  $\mathbb{Z}$ -colorable torus link.

**橋本悠 (東京学芸大学大学院教育学研究科)**

**Quandle 2-cocycle 不変量と shadow 3-cocycle 不変量の関係について**

Quandle 2-cocycle 不変量とは、図式の弧へ quandle 彩色を施すごとに quandle 2-cocycle で評価した値を集めた結び目不変量である。一方、shadow 3-cocycle 不変量とは、弧に加えて補領域へも quandle 彩色を施すごとに、quandle 3-cocycle で評価した値を集めた結び目不変量である。これら二種類の不変量は、それぞれ用いる cocycle の次数が異なるため、一見すると無関係に思える。本講演では、quandle homology 理論へ新しい chain 写像を導入することにより、二種類の不変量の間関係を考察する。この研究は、田中心氏 (東京学芸大学教育学部) との共同研究である。

**大峯正己 (東京学芸大学大学院教育学研究科)**

**曲面絡み目の bridge trisection の対称性について**

2017 年に Jeffrey Meier と Alexander Zupan は曲面絡み目の bridge trisection 表示を導入し、基本的な定理群 (表示の存在・全同位に対応する表示の基本変形) を示した。2018 年には、結び目ホモロジー理論の枠組みで、bridge trisection 表示を用いて曲面絡み目不変量が定義される (Saltz によるプレプリント) など、この表示方法は近年注目を集めている。Bridge trisection (の spine) とは、trivial 1-tangle の順序付き三対から成る対象であるが、置換による振る舞いは明示的に述べられてはいなかった。本講演では、bridge trisection の順序付き三対へ奇置換を施した際の振る舞いを考察し、得られた成果について紹介する。

**小島俊祐 (日本大学大学院総合基礎科学研究科)**

**Ideal tetrahedral decomposition of hyperbolic chain link complement**

**(市原一裕氏 (日本大学文理学部) との共同研究)**

It is known by Han Yoshida that if a noncompact hyperbolic 3-manifold  $M$  is obtained by glueing two convex ideal polyhedra  $P_1$  and  $P_2$  in such a way that every face of  $P_1$  is pasted with a face of  $P_2$ , then  $M$  can be decomposed into ideal tetrahedra. In fact, she showed that there exists a pair of vertices  $v_1, v_2$  of  $P_1, P_2$  such that the cone decomposition of  $P_1$  from  $v_1$  is compatible that of  $P_2$  from  $v_2$ . In this talk, we consider hyperbolic link complements and ideal

polyhedral decompositions induced from their balanced alternating diagrams, and determine the number of such pairs of vertices. This talk is based on a joint work with Kazuhiro Ichihara (Nihon University).

### 北澤直樹 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所) 折り目写像とその Reeb 空間の位相的情報と定義域多様体

「結び目の数学 VIII」と「結び目の数学 X」に続き、様々な多様体を、Morse 関数の高次元化である折り目写像他良い写像により、写像して次元のより低い空間に表現するということについて、具体的には、部分多様体に沿って手術を繰り返すという構成的手法により写像や多様体を得るという講演者の研究について、最近の内容まで説明する。

Morse 関数と、多様体の代数トポロジーの性質や微分トポロジー的性質への応用に関する有名な理論の確立後、高次元化として、1950 年代に Whitney や Thom による平面への良い可微分写像の研究が始まり、その少し後に関連した Levine の研究、そして Eliashberg による一般次元の折り目写像の存在についての研究等があった。

そして、1990 年代に佐伯修氏 (九州大学) や佐久間一浩氏 (近畿大学) により、一連の流れが、微分トポロジーに新たに応用された。例えば多様体の可微分構造の理解に有益そうであることが明らかにされた。関連して、小林真人氏 (秋田大学) による写像の系統的構成や写像による多様体の像の微分トポロジー的研究というのも生まれた。本研究はこれらに関連した、多様体の (微分) トポロジーへの新たな応用に関するものである。

さて、講演者の研究含めた一連の研究で、Reeb 空間という、逆像の各成分を一点とみなしてできる定義域多様体の商空間が鍵になる: これは多くの場合自然に値域と次元の等しい多面体になる。Reeb 空間は、よく多様体のホモロジー群やホモトピー的情報を引き継ぐ。よって Reeb 空間の位相的、幾何的性質が基本的で重要であるが、基本的な部分を含めて未開の部分も意外に多い。例えば、大域的なトポロジーのパターンは、基本的で重要だが、写像と定義域多様体の構成の難しさと相まって未知の部分が多かった。過去の講演で、講演者は、構成できた写像や定義域多様体、そして得られる Reeb 空間のホモロジー群のパターン等について紹介した。今回は、以前今後の課題として触れた、コホモロジーなどのより深い情報について調べ、分かったことを中心に紹介する。

### 小林竜馬 (石川工業高等専門学校一般教育科) コンパクトな向き付け不可能曲面の Torelli 群の正規生成系について

曲面の Torelli 群とは、曲面の写像類群の部分群であり、曲面上の同相写像が誘導する整係数 1 次ホモロジー群上の同型写像が恒等写像となる同相写像のアイソトピー類からなる群のことである。本講演では、コンパクトな向き付け不可能曲面の Torelli 群の生成系について解説する。

### 岡村美緑 (信州大学大学院総合理工学研究科) 絡み目図式の atom と村杉型不等式

2004 年に鎌田直子氏は交代的な仮想絡み目の村杉型等式を得るため、図式からある向きづけ可能な曲面を構成した。また 2013 年に V. O. Manturov 氏と D. P. Ilyutko 氏は、図式から atom という向きづけ可能とは限らない曲面を構成し、その Euler 標数を使って村杉型不等式を改良した。本講演では、これらの曲面を用いて改良された村杉型不等式の等号が成り立つための十分条件の 1 つを与える。本研究の一部は、境圭一氏 (信州大学) との共同研究に基づく。

### 大久保佳織 (名古屋市立大学システム自然科学研究科) 3 実交点の twisted knot の分類表

twisted knot は Bourgoin によって導入された結び目の拡張である。仮想結び目は向き付けられた曲面上の結び目図式の安定同値類に対応する。twisted knot は向き付け不可能な場合も含め

た曲面上の結び目図式の安定同値類に対応する。本講演では素な 3 実交点の twisted knot の分類表について報告する。

**阿部翠空星（大阪市立大学数学研究所）**

**Riemann zeta function of rational homology 3-spheres**

zeta function には様々な種類がある。例えば、結び目に関連して braid zeta function というものが存在する。本講演では rational homology 3-sphere 版の zeta function を定義する。摂動的不変量の性質を利用して rational homology 3-sphere 版の zeta function のリーマン予想をたてる。そして、レンズ空間に対して予想がある程度正しいことを示す。

**12月25日（火）**

**米澤康好（名古屋大学多元数理科学研究科）**

**Braid group actions from categorical symmetric Howe duality on deformed Webster algebras**

対称 Howe 双対から得られるある量子群の表現の圏化を与えた。さらにこの圏化によって、新たな組紐群のホモロジカル作用が得られる。本講演では具体的な例を用いながら構成について説明する。この研究は Mikhail Khovanov, Aaron D. Lauda, Joshua Sussan との共同研究である。

**増田宙斗（慶應大学理工学研究科）**

**非可換群が作用する同変コルクについて**

$C$  をコンパクト可縮 4 次元多様体、 $G$  を  $\partial C$  の微分同相群の部分群とする。任意の  $g \in G \setminus \{e\}$  に対して、 $g$  が  $C$  の微分同相に拡張できないとき、組  $(C, G)$  を  $G$ -コルクという。 $G$ -コルクは閉 4 次元多様体のエキゾチック構造と関係があり、研究が進められているが、知られている例のほとんどは  $G$  が可換であり、非可換な例は Auckly-Kim-Melvin-Ruberman による  $G$  が  $SO(4)$  の有限部分群となるもののみである。本講演では  $G$ -コルクの先行研究を概観した後、 $SO(4)$  の有限部分群による  $\mathbb{Z}^m$  の拡大  $G$  に対して、 $G$ -コルクを構成する方法を紹介する。また  $G$ -コルクの定義において、 $G$  を  $\partial C$  の写像類群の部分群と置き換えると、弱同変  $G$ -コルクの定義が得られる。時間が許せば、有限可解群による  $\mathbb{Z}^m$  の拡大  $G$  に対して、弱同変  $G$ -コルクの構成にも触れる。

**福田瑞季（東北大学大学院理学研究科 / JSPS）**

**Gluck twists on branched twist spins**

A branched twist spin is a fibered 2-knot in the four sphere and it is a generalization of twist spun knots. In four-dimensional topology, the Gluck twist that is an operation of removing a neighborhood of a 2-knot from  $S^4$  and regluing it by some non-trivial homeomorphism is well-studied. In general, the original 2-knot and the image of the original 2-knot by the Gluck twist are not the same. In this talk, we determine the knot type of the 2-knot obtained from a branched twist spin by the Gluck twist.

**María de los Angeles Guevara Hernández（大阪市立大学数学研究所）**

**Gap between the alternation number and the dealternating number**

The dealternating number and the alternation number are invariants that measure how far a link is from being alternating. These invariants were introduced by C. Adams et al. and A. Kawachi, respectively. By definitions, for any link we have the alternation number is less than or equal to the dealternating number. In this talk we will show knot families where the difference between these invariants is arbitrarily large.

**小澤裕子 (東京女子大学大学院理学研究科)**

**Non-existence of epimorphisms between certain genus two handlebody-knot groups**

For two genus  $g$  handlebody-knots  $H_1$  and  $H_2$ , we denote  $H_1 \geq H_2$  if there exists an epimorphism from the (handlebody-)knot group of  $H_1$  onto the one of  $H_2$ . In the case of  $g = 1$  (knot case), this “ $\geq$ ” is a partial order for prime knots and has been determined up to 11 crossings. In this talk, we consider the case of  $g = 2$  and exhibit a lot of ordered pairs of irreducible handlebody-knots in the table up to 6 crossings, each of which does not admit this order. This is a joint work with R. Nikkuni and M. Suzuki.

**新庄玲子 (国士舘大学理工学部)**

**平面 4 価グラフの実現問題の結び目射影図への拡張**

**(田中心氏 (東京学芸大学教育学部) との共同研究)**

球面上の結び目射影図の「補領域の  $i$  辺形の個数  $f_i$  たち ( $i \neq 4$ )」は、球面のオイラー標数から得られる等式  $\sum_{i=1}^{\infty} (4-i)f_i = 8 \cdots (*)$  を満たすことが知られている。そこで、等式  $(*)$  を満たす数列を指定した際に、「任意の結び目が、その数列を実現する射影図を持つかどうか」という問題を考察する。これは、グラフ理論で古典的に知られている「平面 4 価グラフの実現問題」の結び目射影図版と言える。講演者らは以前に、条件「 $f_1 = f_2 = 0$ 」の下で肯定的であることを示している。例えば、数列「 $f_1 = f_2 = f_i = 0$  ( $i \geq 5$ ),  $f_3 = 8$ 」は等式  $(*)$  と追加条件を満たすので、「任意の結び目は 3 辺形 8 個 (と 4 辺形いくつか) のみを持つ射影図で表せる」ことが従う。本講演では、条件「 $f_1 = 0, f_2 > 0$ 」の下で上記問題を考察し、得られた結果を紹介する。本研究は田中心氏 (東京学芸大学教育学部) との共同研究である。

**新井雅章 (早稲田大学大学院基幹理工学研究科)**

**制限付きライデマイスター変形における結び目射影図の最小交点数**

あやとりから着想を得て、ライデマイスター変形に制限を加えた中での、結び目図式の交点の解消について、新しい用語・関数を定義しながら考えた。主なものとして、「結び目の最小交点数を満たす図式への変形を阻止する最小の制限」に関する値を示す関数  $\varphi(P)$  と、「結び目の最小交点数を満たす図式への変形を阻止しない最大の制限」に関する値を示す関数  $\psi(P)$  がある。本研究では特に、自明な結び目の図式に対するこれらの関数の値について調べ、自明な結び目の交点を持つ任意の射影図に対して、 $\varphi(P) = 2$  となることを証明した。発表では、現在証明に取り組んでいる予想についても紹介したい。

**森下央子 (東京女子大学大学院理学研究科)**

**Generalization of the Conway-Gordon theorems and intrinsic knotting and linking on complete graphs**

Conway-Gordon theorems show that for every spatial complete graph on 6 vertices, the sum of the linking numbers over all of the constituent 2-component links is odd, and that for every spatial complete graph on 7 vertices, the sum of the Arf invariants over all of the Hamilton knots is odd. In this talk, we generalize the Conway-Gordon theorems to complete graphs with arbitrary number of vertices  $\geq 6$ . This is a joint work with R. Nikkuni.

**市原一裕 (日本大学文理学部)**

**Most graphs are knotted**

**(Thomas Mattman 氏 (カリフォルニア州立大学チコ校) との共同研究)**

I will talk about random graphs and consider the intrinsically knotted/linked properties. It will be shown that the probability that a graph is intrinsically knotted goes to one as the

number of vertices increases, and also that most graphs with sufficiently many vertices are intrinsically knotted and intrinsically linked. This talk is based on a joint work with Thomas Mattman (California State University, Chico).

12月26日(水)

宮脇恭平 (甲南大学大学院自然科学研究科)

ひねりトーラス結び目  $T(3, q; n)$  のアレキサンダー多項式

トーラス結び目または絡み目  $T(3, q)$  ( $q > 0$ : 自然数) において、隣り合う2本の弧を  $n$  回半ひねりして得られる結び目または絡み目を  $T(3, q; n)$  と書く。  $T(3, q; n)$  のアレキサンダー多項式を計算し、多項式が一致する場合と異なる場合の判定を行う。さらに、多項式が一致する場合、結び目そのものが一致するか否かについて、考察する。

佐野岳人 (東京大学大学院数理科学研究科)

Rasmussen-type invariants from the divisibility of the canonical classes

We define a family of integer-valued link invariants  $\hat{s}_c(-; R)$  each determined by a non-zero non-invertible element  $c$  in a domain  $R$ . Each  $\hat{s}_c(L; R)$  is given by a combination of some classical properties of a diagram  $D$  of  $L$ , and the “ $c$ -divisibility” of the canonical class of  $D$  in a Khovanov-type link homology determined by  $(R, c)$ . Similar to Rasmussen’s  $s$ -invariant, each  $\hat{s}_c$  is a link-concordance invariant, provides a lower bound for the slice-genus of knot, and gives an alternative proof for the Milnor conjecture. Under some condition, they also define homomorphisms from the knot concordance group to  $\mathbb{Z}$ . For the special case  $(R, c) = (\mathbb{Q}[h], h)$ , the knot invariant  $\hat{s}_c$  coincides with the Rasmussen’s  $s$ -invariant. At the moment we do not know whether there exists a pair  $(R, c)$  that gives an invariant distinct from  $s$ .

浅野喜敬 (東北大学大学院理学研究科)

Simplified trisection map による弧の逆像として得られる閉3次元多様体について

閉4次元多様体の trisection とは4次元のハンドル体3つの組による、閉4次元多様体の分割である。Gay-Kirby は、閉4次元多様体から2次元円盤への安定写像 (trisection map) を構成することで、任意の閉4次元多様体が trisection を許容することを証明した。本講演では、種数2の simplified trisection map による弧の逆像により得られるすべての閉3次元部分多様体が3次元球面あるいは  $S^2 \times S^1$  の有限個の連結和になることを紹介する。また、section を4つにした multisection において、弧の逆像が双曲多様体となる例が構成できたので、これについても紹介する。

川村友美 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

Integral region choice problems on link diagrams

Shimizu introduced a region crossing change unknotting operation for knot diagrams. As extensions, two integral region choice problems are proposed and the existences of solutions of the problems are shown for all non-trivial knot diagrams by Ahara and Suzuki, and Harada. We relate both integral region choice problems with an Alexander index for regions of a link diagram, and discuss the problems on link diagrams.