絡み目図式の atom と村杉型不等式

岡村美緑

信州大学大学院 総合理工学研究科 理工専攻 数学分野

2018 年 12 月 24 日 (月)

一部は, 境圭一氏 (信州大学) との共同研究に基づく

研究内容と主結果

定理 (L. H. Kauffman, K. Murasugi, M. B. Thistlethwaite, 1987)

D：連結な古典絡み目図式，　$c(D)$：D の交点数

$$\Longrightarrow \ \operatorname{span}\langle D\rangle \leq 4c(D).$$

D が既約かつ連結な交代図式ならば等号成立.

定理 (N. Kamada, 2004)

D：連結, proper かつ交代的な仮想絡み目図式,
$g(D)$：D から構成する fat frame の種数,

$$\Longrightarrow \ \operatorname{span}\langle D\rangle = 4(c(D) - g(D)).$$

また D：v-alternating 図式 $\Longrightarrow \ \operatorname{span}\langle D\rangle = 4(c(D) - g(D)) + 2.$

研究内容と主結果

定理 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

D : 連結な仮想絡み目図式, $c(D)$: D の実交点数,
$\chi(D)$: D から構成する曲面 **atom** の Euler 標数.

$$\Longrightarrow \operatorname{span}\langle D\rangle \leq 4c(D) + 2(\chi(D) - 2).$$

D が **adequate** 図式ならば等号成立.

定理 (岡村-境, 2018)

D : **v-adequate** 図式

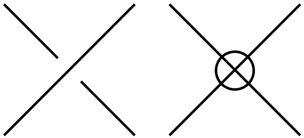
$$\Longrightarrow \operatorname{span}\langle D\rangle = 4c(D) + 2(\chi(D) - 2).$$

系 (岡村-境, 2018)

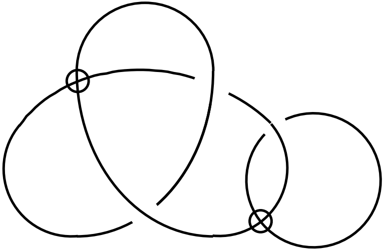
D : adequate 図式,　D' : D から構成する v-adequate 図式.
$\Longrightarrow$ 少なくともどちらか一方は真に仮想絡み目を表す図式である.

仮想絡み目図式

- D : 仮想絡み目図式, 既約かつ連結



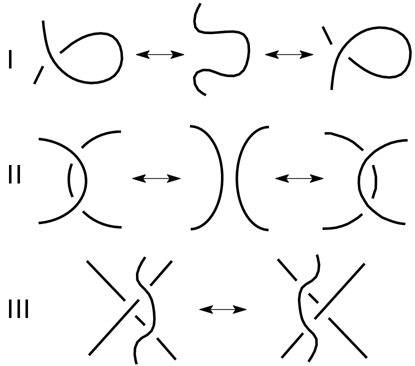
実交点　　仮想交点



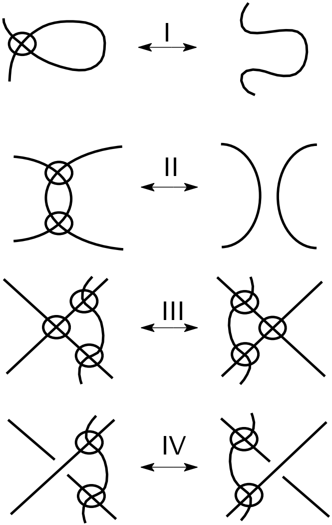
- 特に, 仮想交点をもたない図式を古典絡み目図式という.

Reidemeister move and Virtual Reidemeister move

Reidemeister move



Virtual Reidemeister move



2 つの図式が同型であるとは,
上記の変形で移りあうこと.

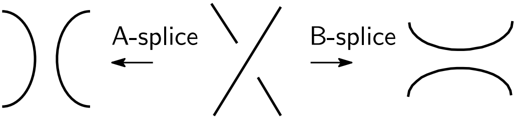
Kauffman bracket 多項式

- 写像 $s : \{D$ の各実交点 $\} \to \{$A-splice, B-splice$\}$ を D の state という.
- $D(s)$: state s による splice で得られた実交点のない図式.
- $\sharp D(s)$: $D(s)$ の成分数.
- $\sharp s^{-1}(A)(\sharp s^{-1}(B))$: D のある state s での A-splice(B-splice) の数.
- s の重み : $\langle D/s \rangle = A^{\sharp s^{-1}(A) - \sharp s^{-1}(B)}(-A^2 - A^{-2})^{\sharp D(s) - 1}$.

定義 (Kauffman bracket 多項式)

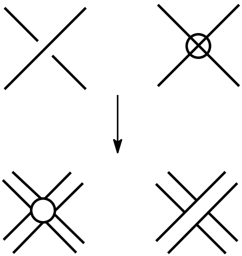
$$\langle D \rangle = \sum_s \langle D/s \rangle .$$

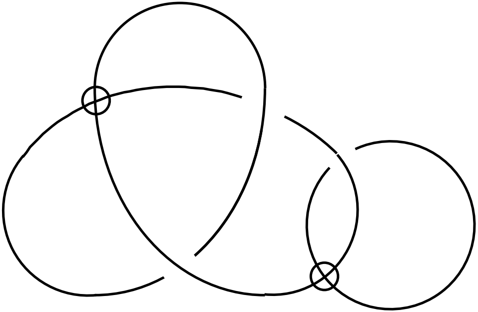
- Reidemeister move II, III, virtual Reidemeister move で不変.
- Reidemeister move I による変形で多項式が $-A^{\pm 3}$ 倍変化する.
- $\mathrm{span}\,\langle D \rangle = \overline{\deg}\,\langle D \rangle - \underline{\deg}\,\langle D \rangle$(仮想絡み目の不変量).



Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

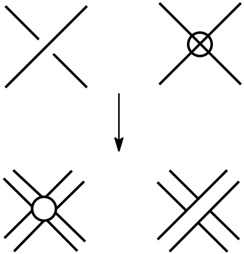
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.

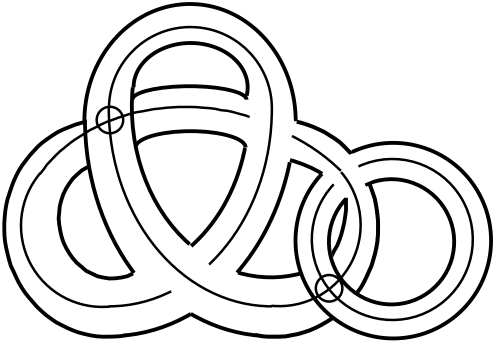




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

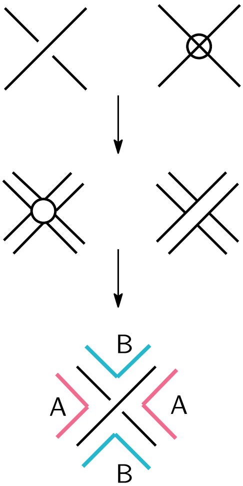
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.

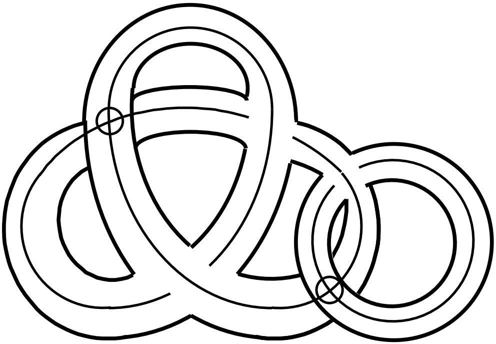




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

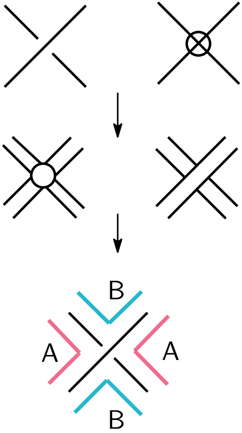
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.
- A-splice, B-splice の色付けに従って, 交点周辺の境界に色付けを行う.

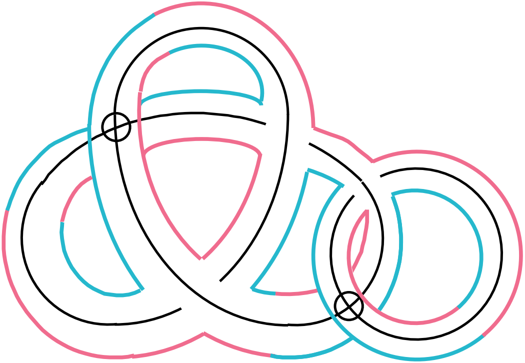




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

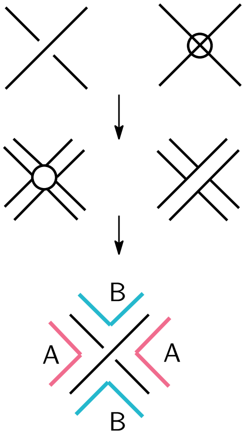
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.
- A-splice, B-splice の色付けに従って, 交点周辺の境界に色付けを行う.

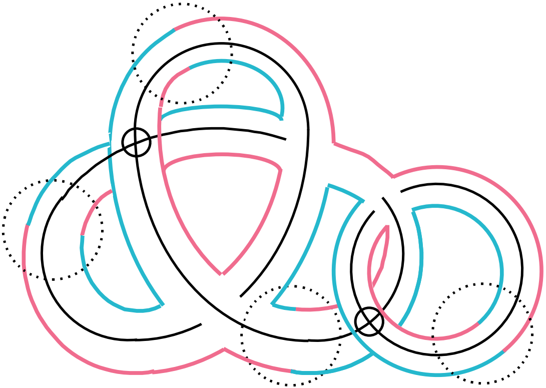




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

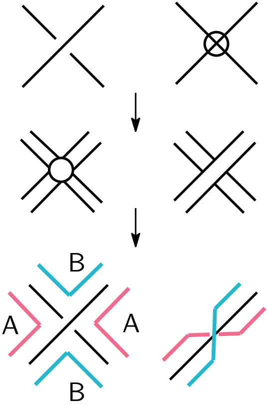
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.
- A-splice, B-splice の色付けに従って, 交点周辺の境界に色付けを行う.

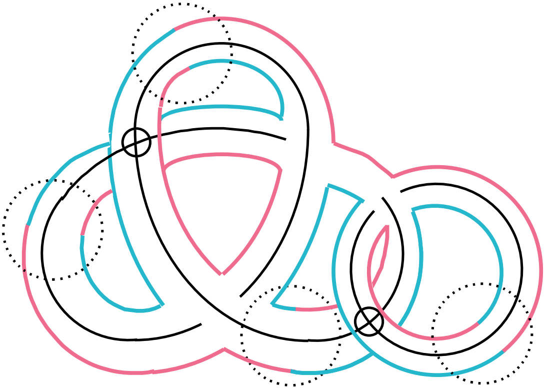




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

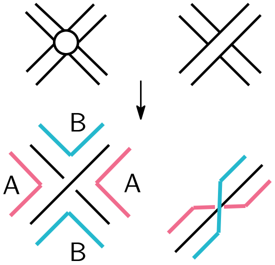
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.
- A-splice, B-splice の色付けに従って, 交点周辺の境界に色付けを行う.
- 色付けがうまくいくように band に $180°$ ひねりを加える.

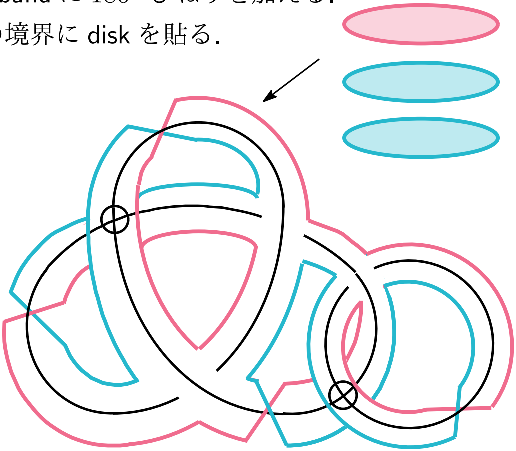




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

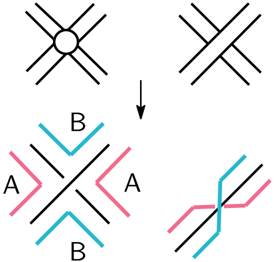
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.
- A-splice, B-splice の色付けに従って, 交点周辺の境界に色付けを行う.
- 色付けがうまくいくように band に $180°$ ひねりを加える.
- ひねりを加えた fat frame の境界に disk を貼る.

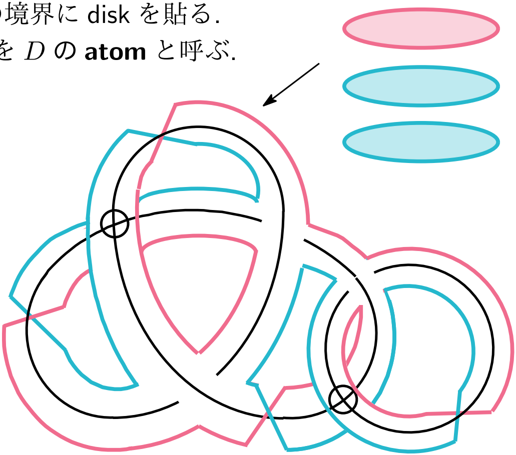




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

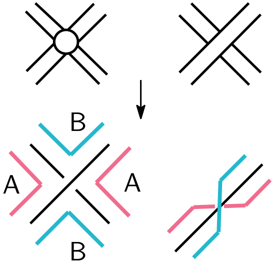
- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.
- A-splice, B-splice の色付けに従って, 交点周辺の境界に色付けを行う.
- 色付けがうまくいくように band に $180°$ ひねりを加える.
- ひねりを加えた fat frame の境界に disk を貼る.
- この操作で得られた閉曲面を D の **atom** と呼ぶ.

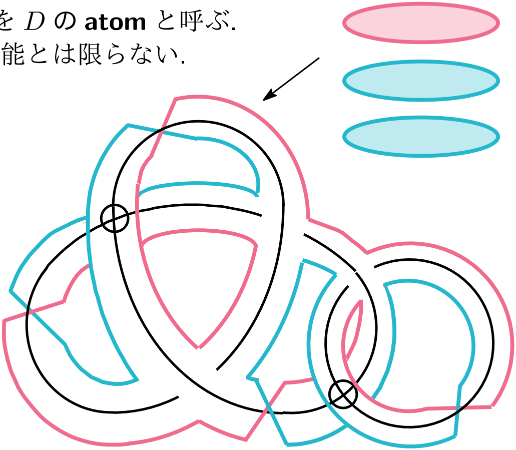




Atom の構成方法 (V. O. Manturov, D. P. Ilyutko, 2013)

- 図式 D の実交点を disk, 辺を band とみて, fat frame を構成する.
- A-splice, B-splice の色付けに従って, 交点周辺の境界に色付けを行う.
- 色付けがうまくいくように band に 180° ひねりを加える.
- ひねりを加えた fat frame の境界に disk を貼る.
- この操作で得られた閉曲面を D の **atom** と呼ぶ.
- 一般に atom は, 向きづけ可能とは限らない.

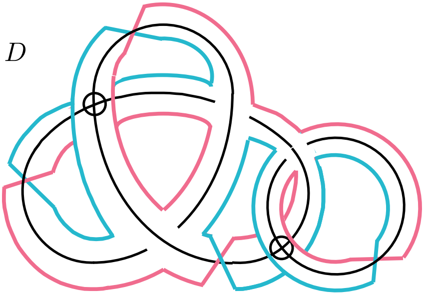




Atom の Euler 標数

- $s_A(s_B)$: D のすべての実交点を A-splice(B-splice) する state,
- $\sharp$(ひねりを加えた fat frame の境界) $= \sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)$,
- $c(D)$: D の実交点数, $\chi(D)$: D の atom の Euler 標数,

$$\Longrightarrow \ \chi(D) = -c(D) + \sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)$$



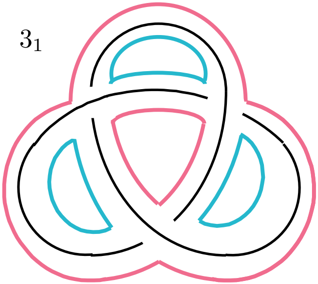
$$c(D) = 3$$
$$\#D(s_A) = 1 \Longrightarrow \chi(D) = 0$$
$$\#D(s_B) = 2$$

Atom の Euler 標数

- $s_A(s_B)$: D のすべての実交点を A-splice(B-splice) する state,
- $\sharp$(ひねりを加えた fat frame の境界) $= \sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)$,
- $c(D)$: D の実交点数, $\chi(D)$: D の atom の Euler 標数,

$$\Longrightarrow \chi(D) = -c(D) + \sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)$$

- 古典絡み目図式の atom は向きづけ可能である.
- 交代的な古典絡み目図式の atom $\approx S^2$



$$c(D) = 3$$
$$\#D(s_A) = 2 \Longrightarrow \chi(3_1) = 2$$
$$\#D(s_B) = 3$$

adequate 図式の Atom と村杉型不等式

定理 (Manturov, Ilyutko, 2013)

D：連結な仮想絡み目図式, $c(D)$：D の実交点数,
$\chi(D)$：D から構成する曲面 **atom** の Euler 標数.

$$\Longrightarrow \ \mathrm{span}\,\langle D\rangle \leq 4c(D) + 2(\chi(D) - 2).$$

D が **adequate** 図式ならば等号成立.

<u>証明の方針</u>

- $\langle D\rangle = \sum_s \langle D/s\rangle$.
- $\mathrm{span}\,\langle D\rangle = \overline{\deg}\,\langle D\rangle - \underline{\deg}\,\langle D\rangle$.

上次数, 下次数を実現する state s, s' は何か?

$$\overline{\deg}\,\langle D\rangle = \overline{\deg}\,\langle D/s\rangle\,, \ \underline{\deg}\,\langle D\rangle = \underline{\deg}\,\langle D/s'\rangle$$

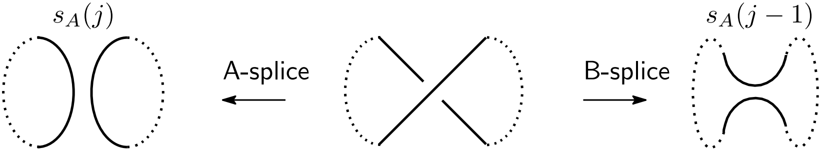
証明の概略

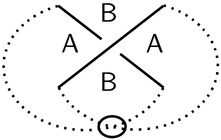
s の重みは $\langle D/s \rangle = A^{\sharp s^{-1}(A) - \sharp s^{-1}(B)}(-A^2 - A^{-2})^{\sharp D(s)-1}$ だから,

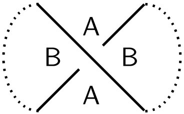
$\overline{\deg}\ \langle D/s \rangle = \sharp s^{-1}(A) - \sharp s^{-1}(B) + 2\sharp D(s) - 2.$

- s_A : 全ての実交点を A-splice する D の state, $\sharp s_A^{-1}(A) = c(D)$
- $s_A(j)$: s_A の j か所を A-splice から B-splice に変えた D の state,

$$\sharp D(s_A(j-1)) - 1 \leq \sharp D(s_A(j)) \leq \sharp D(s_A(j-1)) + 1$$
$$\sharp D(s_A(j)) \leq \sharp D(s_A) + j.$$







証明の概略

$\langle D/s_A\rangle$ と $\langle D/s_A(j)\rangle$ の上次数は,

$$\begin{aligned}\overline{\deg}\,\langle D/s_A(j)\rangle &= c(D) - 2j + 2\sharp D(s_A(j)) - 2\\ &\leq c(D) + 2\sharp D(s_A) \mathbf{-2},\\ \overline{\deg}\,\langle D/s_A\rangle &= c(D) + 2\sharp D(s_A) \mathbf{-2}.\end{aligned}$$

- $\overline{\deg}\,\langle D\rangle \leq \overline{\deg}\,\langle D/s_A\rangle = c(D) + 2\sharp D(S_A) - 2$,
- $\underline{\deg}\,\langle D\rangle \geq \underline{\deg}\,\langle D/s_B\rangle = -c(D) - 2\sharp D(s_B) + 2$.

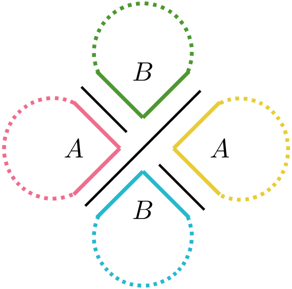
$$\begin{aligned}\mathrm{span}\,\langle D\rangle &\leq \overline{\deg}\,\langle D/s_A\rangle - \underline{\deg}\,\langle D/s_B\rangle\\ &= 2c(D) + 2(\sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)) - 4\\ &= 2c(D) + 2(\chi(D) + c(D)) - 4\\ &= 4c(D) + 2(\chi(D) - 2).\end{aligned}$$

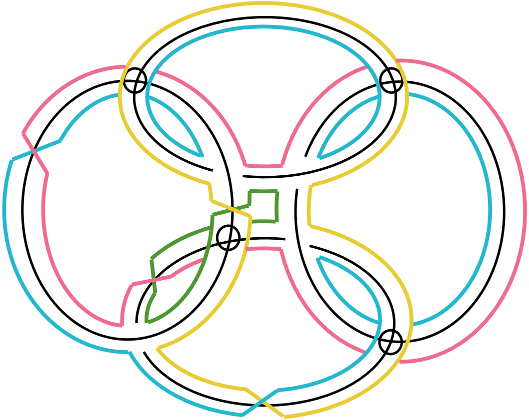
- Atom の Eluer 標数 $\chi(D) = -c(D) + \sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)$.
- Atom を使わないと $\sharp D(s_A) + \sharp D(s_B) \leq c(D) + 2$ より $\mathrm{span}\,\langle D\rangle \leq 4c(D)$.

Adequate 図式

定義

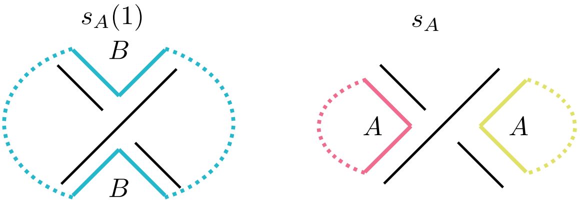
D の各実交点の周辺において, D のひねりを加えた fat frame の境界成分がすべて異なるとき, D は **adequate 図式**であるという.





証明の概略：adequate 図式 D の場合

$$\sharp D(s_A(1)) = \sharp D(s_A) - 1,\ \ \sharp D(s_A(j)) \le \sharp D(s_A) + j \mathbf{-2}.$$



$\langle D/s_A \rangle$ と $\langle D/s_A(j) \rangle$ の上次数は,

$$\begin{aligned}\overline{\deg}\ \langle D/s_A(j)\rangle &= c(D) - 2j + 2\sharp D(s_A(j)) - 2 \\ &\le c(D) + 2\sharp D(s_A) \mathbf{-6}, \\ \overline{\deg}\ \langle D/s_A \rangle &= c(D) + 2\sharp D(s_A) \mathbf{-2}.\end{aligned}$$

したがって $\overline{\deg}\ \langle D/s_A(j)\rangle < \overline{\deg}\ \langle D/s_A\rangle = \overline{\deg}\ \langle D\rangle$.

同様にして $\underline{\deg}\ \langle D/s_B(j)\rangle > \underline{\deg}\ \langle D/s_B\rangle = \underline{\deg}\ \langle D\rangle$.

証明の概略：adequate 図式 D の場合

- $\overline{\deg}\ \langle D \rangle = \overline{\deg}\ \langle D/s_A \rangle = c(D) + 2\sharp D(S_A) - 2,$
- $\underline{\deg}\ \langle D \rangle = \underline{\deg}\ \langle D/s_B \rangle = -c(D) - 2\sharp D(s_B) + 2.$

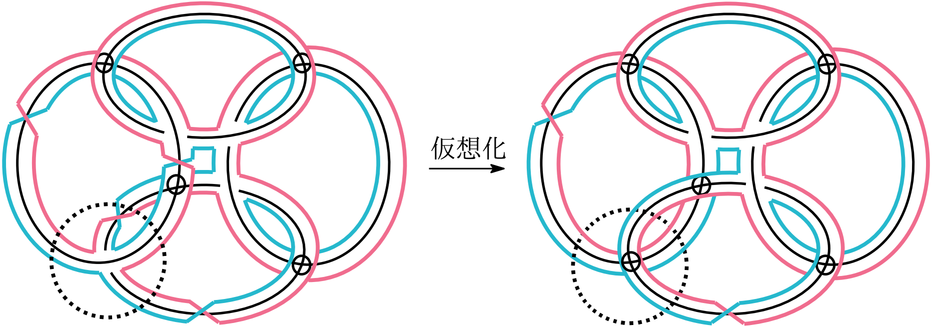
$$\begin{aligned}
\operatorname{span} \langle D \rangle &= \overline{\deg}\ \langle D/s_A \rangle - \underline{\deg}\ \langle D/s_B \rangle \\
&= 2c(D) + 2(\sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)) - 4 \\
&= 2c(D) + 2(\chi(D) + c(D)) - 4 \\
&= 4c(D) + 2(\chi(D) - 2).
\end{aligned}$$

Atom の Euler 標数

$$\chi(D) = -c(D) + \sharp D(s_A) + \sharp D(s_B)$$

v-adequate 図式

実交点を仮想交点に置き換えることを実交点を仮想化するという．adequate 図式の実交点を 1 つ仮想化して得られた図式を **v-adequate 図式**という．



adequate 図式　　v-adequate 図式

v-adequate 図式 D' の atom と村杉型不等式

定理 (岡村-境, 2018)

D : adequate 図式,　D' : D を仮想化して得られた **v-adequate** 図式

$$\Longrightarrow \ \mathrm{span}\,\langle D' \rangle = 4c(D') + 2(\chi(D') - 2).$$

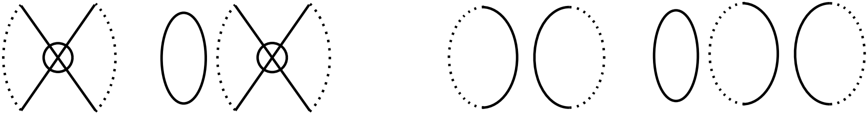
<u>証明の概略</u>

$$\sharp D'(s_A) - 1 \leq \sharp D'(s_A(1)) \leq \sharp D'(s_A),$$
$$\sharp D'(s_B) - 1 \leq \sharp D'(s_B(1)) \leq \sharp D'(s_B).$$

$\because \sharp D'(s_A(1)) = \sharp D'(s_A) + 1$ と仮定すると, $\sharp D(s_A(1)) = \sharp D(s_A) + 1$.

これは D が adequate 図式であることに矛盾.

$D'(s'_A)$　$D'(s'_A(1))$　$D(s_A)$　$D(s_A(1))$



証明の概略：v-adequate 図式 D' の場合

$\sharp D'(s_A) - 1 \leq \sharp D'(s_A(1)) \leq \sharp D'(s_A)$ より $\sharp D'(s_A(j)) \leq \sharp D'(s_A) + j \mathbf{-1}$.

$\langle D'/s_A \rangle$ と $\langle D'/s_A(j) \rangle$ の上次数は,

$$\begin{aligned}
\overline{\deg}\, \langle D'/s_A(j) \rangle &= c(D') - 2j + 2\sharp D'(s_A(j)) - 2 \\
&\leq c(D') + 2\sharp D'(s_A) \mathbf{-4}, \\
\overline{\deg}\, \langle D'/s_A \rangle &= c(D') + 2\sharp D'(s_A) \mathbf{-2},
\end{aligned}$$

したがって $\overline{\deg}\, \langle D'/s_A(j) \rangle < \overline{\deg}\, \langle D'/s_A \rangle = \overline{\deg}\, \langle D' \rangle$.

同様に考えて, $\underline{\deg}\, \langle D'/s_B(j) \rangle > \underline{\deg}\, \langle D'/s_B \rangle = \underline{\deg}\, \langle D' \rangle$

$$\begin{aligned}
\mathrm{span}\, \langle D' \rangle &= \overline{\deg}\, \langle D'/s_A \rangle - \underline{\deg}\, \langle D'/s_B \rangle \\
&= 2c(D') + 2(\sharp D'(s_A) + \sharp D'(s_B)) - 4 \\
&= 2c(D') + 2(\chi(D') + c(D')) - 4 \\
&= 4c(D') + 2(\chi(D') - 2).
\end{aligned}$$

adequate 図式と v-adequate 図式の比較

- D : adequate 図式,
- D' : D を仮想化して得られる v-adequate 図式,

補題

$$\chi(D') = \chi(D) - 1.$$

上記の補題と $c(D') = c(D) - 1$ より, 次の系が成り立つ.

系 (岡村-境, 2018)

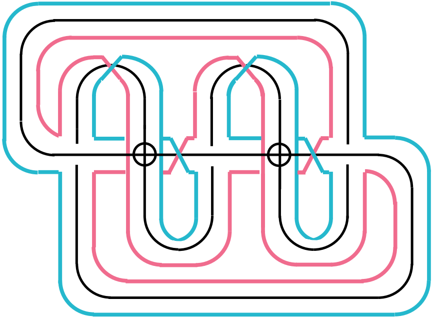
$$\mathrm{span}\,\langle D' \rangle = \mathrm{span}\,\langle D \rangle - 6.$$

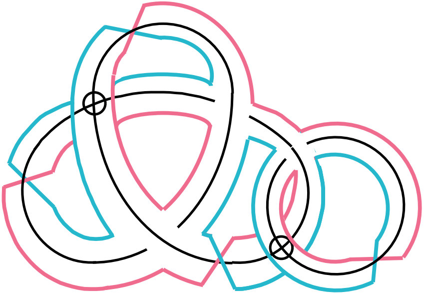
$\mathrm{span}\,\langle$ 古典絡み目 $\rangle = 4$ の倍数であるから, adequate 図式と v-adequate 図式の少なくともどちらか一方は真に仮想絡み目を表す.

予想 (1) Atom の向きづけ可能性

命題

古典絡み目図式から構成する atom は向きづけ可能である.





予想

- Atom の向きづけ可能性 $+\alpha$ で仮想交点数を評価できる.
- adequate 図式の atom は向きづけ可能である.

予想 (2) Tait 型予想

L : adequate 図式をもつ仮想絡み目,

D, D' : L を表す図式,

$g(D)$ $(g(D'))$: D (D') の fat frame の種数,

$$D \text{ が adequate 図式} \implies c(D) \le c(D'),\ g(D) \le g(D'),$$

(Y. Bae, H. S. Lee, C. -Y. Park, 2009).

予想

$$D \text{ が adequate 図式} \implies \chi(D') \le \chi(D).$$