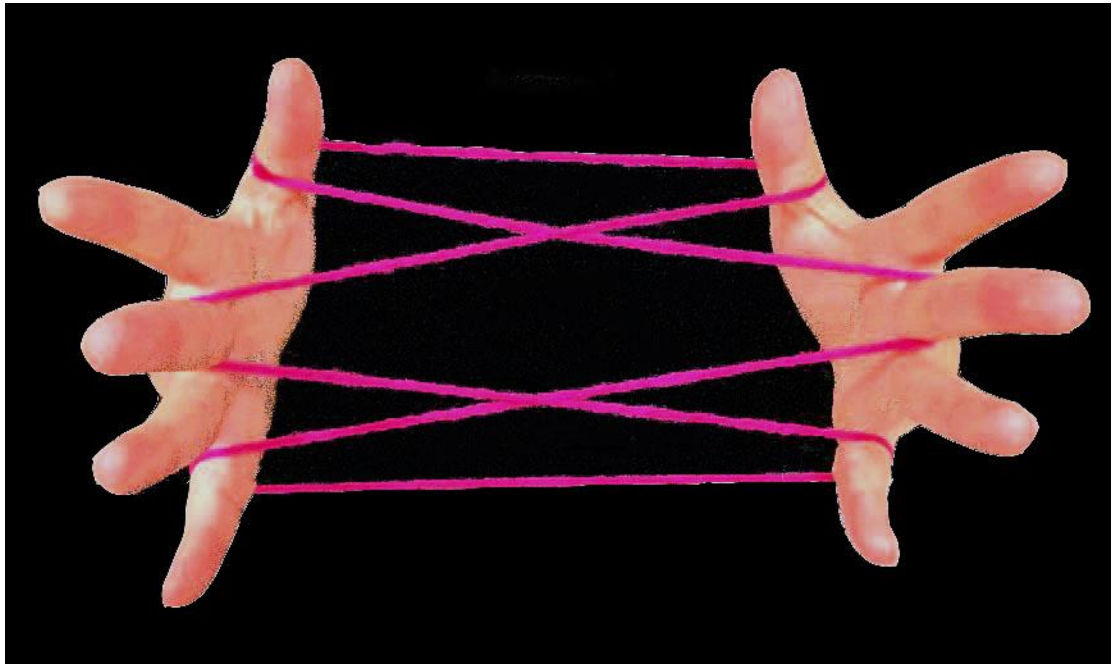
制限付きライデマイスター変形における結び目図式の最小交点数

新井　雅章
（早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 修士1年）

2018年12月25日　結び目の数理

制限付きライデマイスター変形における結び目図式の最小交点数

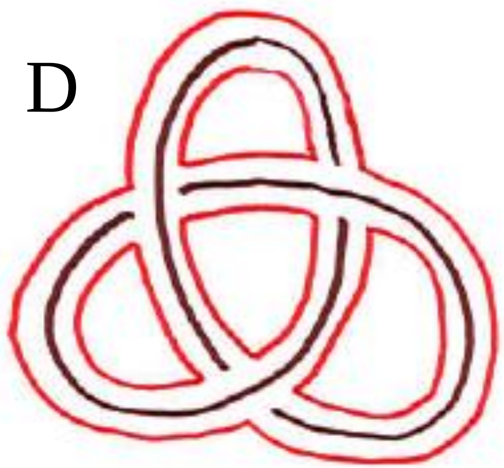


あやとりの紐は自明な結び目だが,
間に指があることで変形が制限され,
模様を描いている
(交点が解消されない)

K: 結び目

D: $\boldsymbol{S}^2$ 上の結び目Kの図式

D



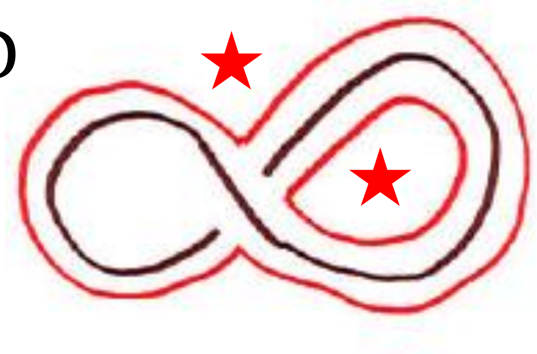
N(D) : 正則近傍

- $\boldsymbol{S}^2 \setminus$ N(D) の連結成分を領域(region)と呼ぶ
- R(D) $:=$ Dの領域全体の集合
- s $\subseteq$ R(D) :いくつかの領域を選ぶ

- $\tilde{s} = \bigcup_{r \in s} r$ ：sの元の領域の和集合
- $S^2 \setminus \tilde{s}$ 上で行うライデマイスター変形を s-制限ライデマイスター変形と呼ぶ
- c(D) ≔ 図式Dの交点数
- c(D, s) ≔ min{ c(D') | D'はDから ____〃____ で得られる図式 }

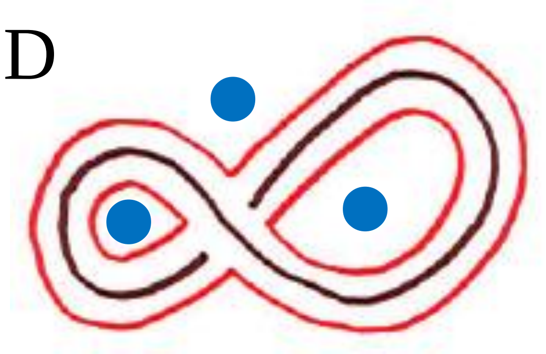
e.g.

D



c(D, s_1) = 0

D



c(D, s_2) = 1

remark ① c(K) ≦ c(D, s) ≦ c(D)

② c(K) = c(D, ϕ) = c(D, {r}) （∀r ∈ R(D)）

③ $s_1 \subseteq s_2$ ⇒ c(D, s_1) ≦ c（D, s_2）

$$0 \leqq n \leqq |R(D)| \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

- $c_{max}(D, n) \ := \max\{\, c(D, s) \mid |s| = n \,\}$
- $c_{min}(D, n) \ := \min\{\, c(D, s) \mid |s| = n \,\}$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
c(K) & = & c_{max}(D, 0) & = & c_{max}(D, 1) & \leqq & c_{max}(D, 2) & \leqq & c_{max}(D, 3) & \leqq & \dots & \leqq & c_{max}(D, |R(D)|) & \leqq & c(D) \\
 & & \| & & \| & & \rotatebox{90}{$\leqq$} & & \rotatebox{90}{$\leqq$} & & & & \| & & \\
c(K) & = & c_{min}(D, 0) & = & c_{min}(D, 1) & = & c_{min}(D, 2) & \leqq & c_{min}(D, 3) & \leqq & \dots & \leqq & c_{min}(D, |R(D)|) & \leqq & c(D)
\end{array}$$

※ remark② $c(K) = c(D, \phi) = c(D, \{r\})$ ※ 後述の命題より示せる

Dが $c(K) < c(D)$ を満たすとき, 次を定義する:

・$\varphi(D) := \min\{ n \mid c_{max}(D, n) > c(K) \}$

・$\psi(D) := \min\{ n \mid c_{min}(D, n) > c(K) \}$

$\varphi(D)$, $\psi(D)$: 下図を左から順に見ていき, $\leqq$ が最初に $<$ を満たした直後のn

$$c(K) = c_{max}(D, 0) = c_{max}(D, 1) \leqq c_{max}(D, 2) \leqq c_{max}(D, 3) \leqq \dots \leqq c_{max}(D, |R(D)|) \leqq c(D)$$

$$c(K) = c_{min}(D, 0) = c_{min}(D, 1) = c_{min}(D, 2) \leqq c_{min}(D, 3) \leqq \dots \leqq c_{min}(D, |R(D)|) \leqq c(D)$$

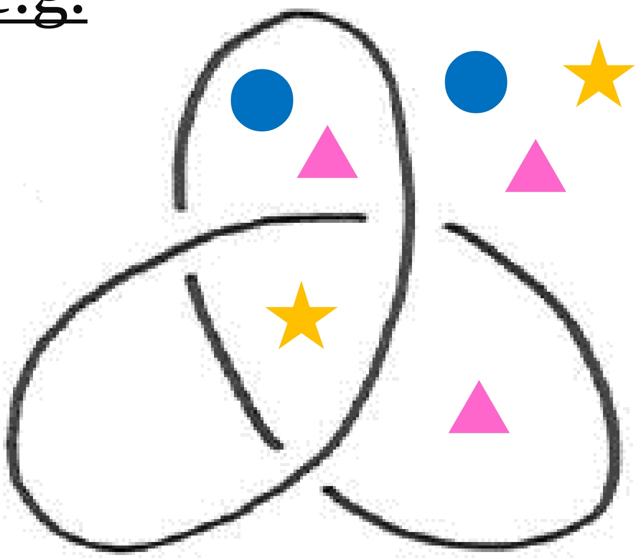
・$c_{max}(D, n) := \max\{c(D, s) \mid |s| = n\}$

・$c_{min}(D, n) := \min\{c(D, s) \mid |s| = n\}$

以下，K: 自明な結び目　とする　（i.e. $c(K) = 0$）

- $\varphi(D) \coloneqq \min\{\, n \mid c_{max}(D, n) > 0 \,\}$
- $\psi(D) \coloneqq \min\{\, n \mid c_{min}(D, n) > 0 \,\}$

e.g.



$c_{max}(D, 0) = 0$ （$\because$ remark②）

$c_{max}(D, 1) = 0$ （$\because$ remark②）

$c_{max}(D, 2) = 1$ （★）

$\therefore\ \varphi(D) = 2$

$c_{min}(D, 2) = 0$ （●）

$c_{min}(D, 3) = 0$ （▲）

$c_{min}(D, 4) = 1$ （$\because$ 後述の命題）

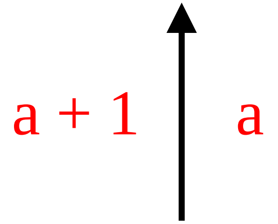
$\therefore\ \psi(D) = 4$

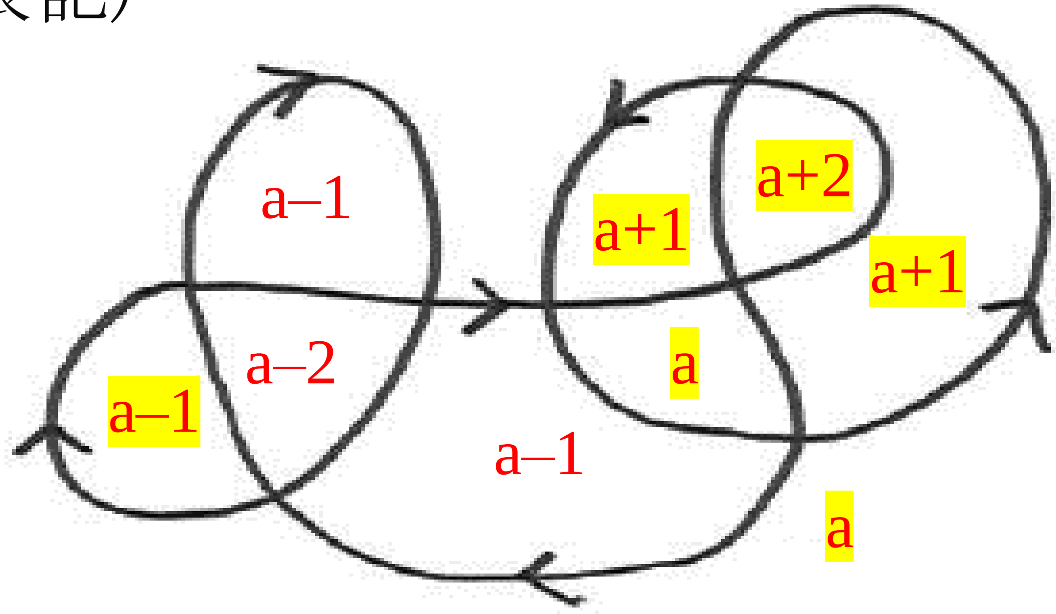
Th.　D: (交点を持つ)自明な結び目の図式

$\Rightarrow$ $\varphi(D) = 2$

- $\varphi(D) := \min\{\, n \mid c_{max}(D, n) > 0 \}$
- $c_{max}(D, n) := \max\{c(D, s) \mid |s| = n\}$

Alexander-numbering（以下 A-n と表記）





s ⊆ R(D) に対して, 次を定義する:

- span(s)　:= sの元にふられた A-n 値の最大値と最小値の差

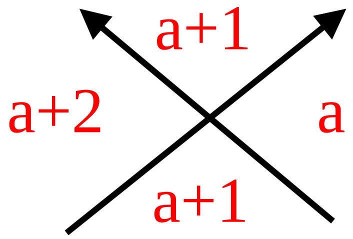
e.g.

上図で,　span(s)　=　(a + 2) – (a – 1)　=　3

span(R(D))　=　(a + 2) – (a – 2)　=　4

Remark ④ $c(D) \geqq 1 \Rightarrow \mathrm{span}(R(D)) \geqq 2$

$(\because)$



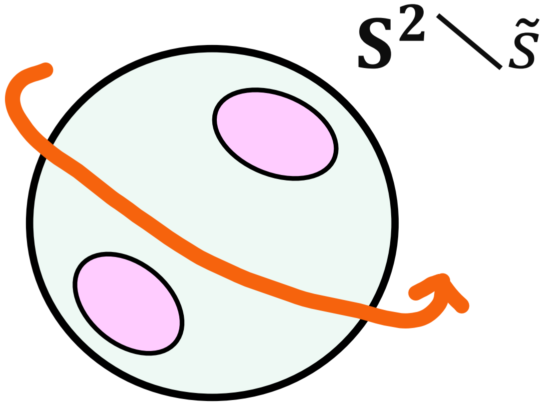
交点のまわりで
2差の領域組が存在

Lem. D: 交点を持つ結び目の図式,

$$c_{max}(D, 2) \geqq \mathrm{span}(R(D)) - 1 \geqq 1$$

※ $\geqq$ は Remark ④ より示せる

> **Lem.** D: 交点を持つ結び目の図式 ,
>
> $c_{max}(D, 2) \geqq \mathrm{span}(R(D)) - 1 \geqq 1$



Proof of Lem. (≧)

Dに A-n を考え, その値で最大値, 最小値を持つ2領域を元として $s \subseteq R(D)$ を定める. （このとき, $\mathrm{span}(s) = \mathrm{span}(R(D))$ ）

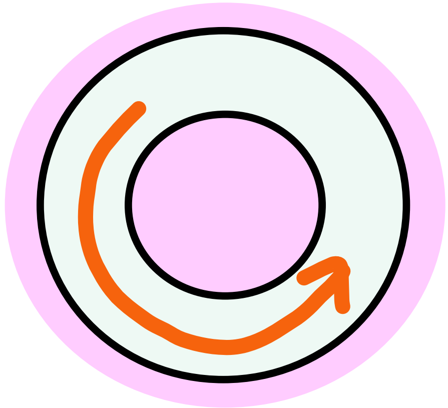
$S^2 \setminus \tilde{s} \cong S^1 \times [0, 1]$: アニュラス

結び目はこのアニュラス上を代数的にspan(s)周する閉曲線.

$\therefore\ c(D, s) \geqq \mathrm{span}(s) - 1 = \mathrm{span}(R(D)) - 1$

$\therefore\ c_{max}(D, 2) \geqq \mathrm{span}(R(D)) - 1$ ■

※ $c_{max}(D, 2) \coloneqq \max\{c(D, s) \mid |s| = 2\}$



Th. D: (交点を持つ)自明な結び目の図式
⇒ $\varphi(D) = 2$

Lem. D: 交点を持つ結び目の図式,
$c_{max}(D, 2) \geqq \mathrm{span}(R(D)) - 1 \geqq 1$

Proof of Th.

D: 交点を持つ自明な結び目Kの図式

Lem.より, $c_{max}(D, 2) \geqq 1 > 0 = c(K)$

$\therefore \varphi(D) = 2$ ■

※ $\varphi(D) := \min\{ n \mid c_{max}(D, n) > c(K)\}$

※ $c_{max}(D, 0) = c_{max}(D, 1) = 0$

Conj.1　D: 結び目の図式 ,

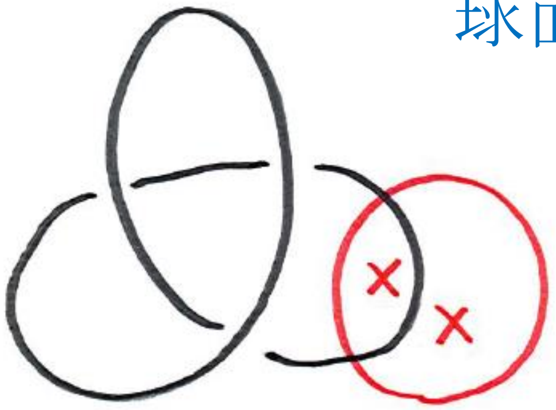
$$c(D, R(D)) = c(D)$$

全部の領域に指が入っていると
交点の解消ができない（予想）

Conj.2　D: (交点を持つ)自明な結び目の図式

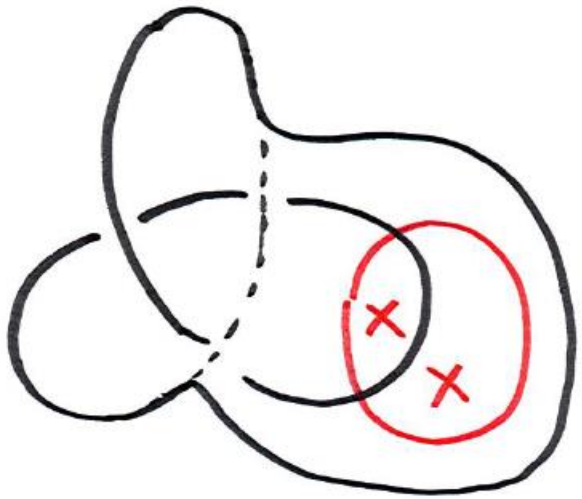
$$\Rightarrow \quad 2 \leqq \psi(\mathrm{D}) \leqq \frac{c(\mathrm{D})}{2} + 2$$

Proof of [≦]



球面の”裏”を迂回

→

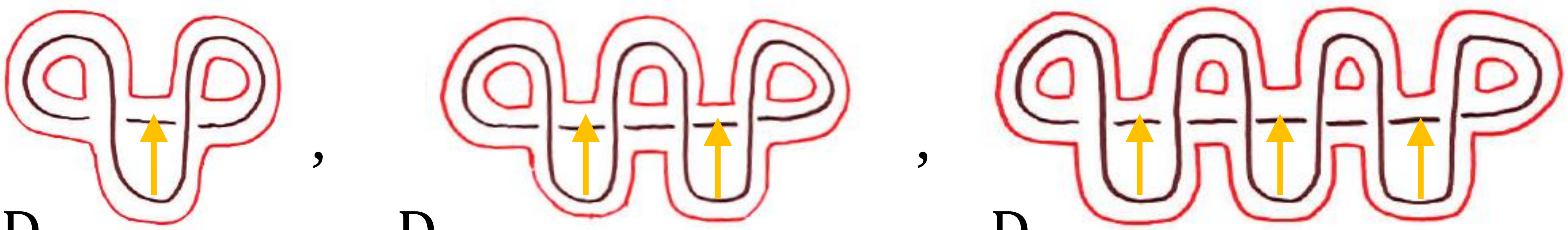


■

Conj.2 D: (交点を持つ)自明な結び目の図式

$$\Rightarrow \quad 2 \leqq \psi(D) \leqq \frac{c(D)}{2} + 2$$

予想($\leqq$)の根拠:



D_1 , D_2 , D_3 , …

このとき, $\begin{cases} c(D_i) = 2i \\ \psi(D_i) = i + 2 \end{cases}$

より精度の高いものがあるか？

Thank you very much