ひねりトーラス結び目 $T(3, q; n)$ のアレキサンダー多項式

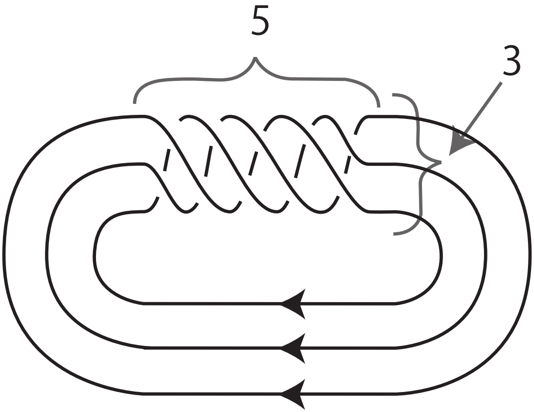
宮脇　恭平

甲南大学大学院　自然科学研究科　知能情報学専攻 21724006

2018 年 12 月 26 日

1.1 トーラス結び目

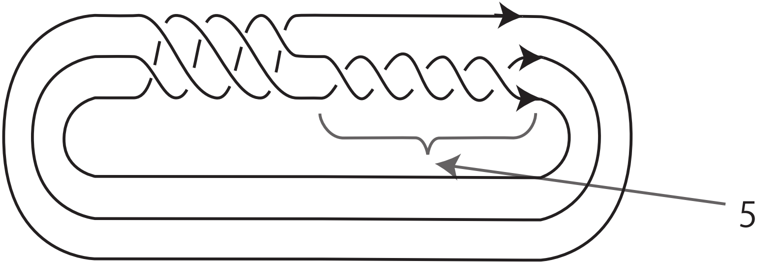
(3,5) 型トーラス結び目 $T(3,5)$ である。



1.2 ひねりトーラス結び目

トーラス結び目の平行な 2 本に n 交点のひねりを加えた結び目をひねりトーラス結び目といい，$T(p,q;n)$ とかく。

下図は，(3,4;5) 型ひねりトーラス結び目 $T(3,4;5)$ である。



2.1 $T(p,q)$ のアレキサンダー多項式

$T(p,q)$ のアレキサンダー多項式を $\Delta(p,q)$,

$T(p,q;n)$ のアレキサンダー多項式を $\Delta(p,q;n)$ とかく。

$\Delta(p,q)$ について次が知られている。

定理

$\gcd(p,q)=1$ のとき

$$\Delta(p,q)(t)=\frac{(1-t)(1-t^{pq})}{(1-t^p)(1-t^q)}\times t^{-\frac{(p-1)(q-1)}{2}}$$

$\gcd(p,q)=d\,(d>1)$ のとき

$$\Delta(p,q)(t)=\frac{(1-t)(1-t^{\frac{pq}{d}})^d}{(1-t^p)(1-t^q)}\times t^{-\frac{(p-1)(q-1)}{2}}$$

2.2 $T(p,q;2m)$ のアレキサンダー多項式

$\gcd(p,q)=1, n=2m$ のとき，

H.R.Morton によって次が示されている。

定理

$$\Delta(p,q,2m)=\frac{1-t}{(1-t^p)(q-t^q)}$$
$$\times(1-(1-t)(1+t^2+\cdots+t^{2m-2})(t^{rq+1}+t^{(p-r)q})-t^{pq+2m})$$

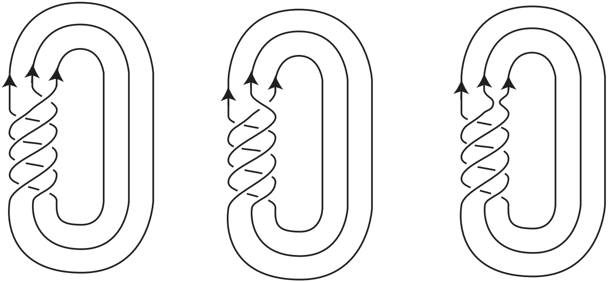
$$\Delta(p,q,-2m)=\frac{1-t}{(1-t^p)(q-t^q)}$$
$$\times(1-(1-t)(t^{-2}+t^{-4}+\cdots+t^{-2m})(t^{rq+1}+t^{(p-r)q})-t^{pq-2m})$$

2.3 $T(3, q; n)$ の成分数

$$T(3,q;n)\text{ の成分数} = \begin{cases} 1 & q \not\equiv 0 \pmod 3 \text{ and } n \equiv 0 \pmod 2 \\ 2 & n \equiv 1 \pmod 2 \\ 3 & q \equiv 0 \pmod 3 \text{ and } n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

2.4 $T(3, q; 1)$ のアレキサンダー多項式

$n = 1$ のときの L_+, L_-, L_0 は下図のようになる。

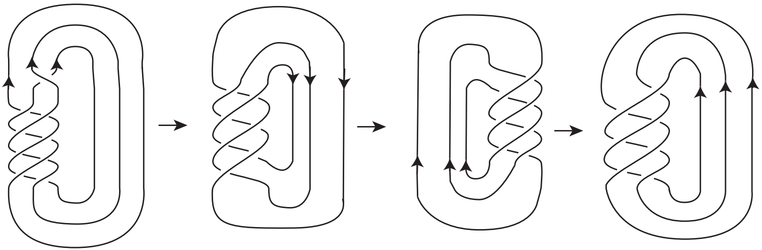


L_+　　L_-　　L_0

$T(3, 4; 1)$　　$T(3, 4; -1)$　　$T(3, 4; 0) \cong T(3, 4)$

2.4 $T(3, q; 1)$ のアレキサンダー多項式

L_- は下図のように変形することができる。



$$T(3, 4; -1) \cong T(3, 3; 1)$$

一般に $T(3, q; -1) \cong T(3, q-1; 1)$

このことから,

アレキサンダー多項式のルール 2 より以下が成り立つ。

$$\Delta(3, q; 1) = \Delta(3, q-1; 1) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(3, q)$$

2.4 $T(3, q; 1)$ のアレキサンダー多項式

計算結果は以下の通りである。

$\Delta(3, 0; 1) = 0$

$\Delta(3, 1; 1) = -t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} = -t^{-\frac{1}{2}}(t-1) \quad = -t^{-\frac{1}{2}}(t-1)\dfrac{t^3-1}{t^3-1}$

$\Delta(3, 2; 1) = -t^{-\frac{3}{2}}(t-1)(t^2+1) = -t^{-\frac{3}{2}}(t-1)\dfrac{t^5+t^3-t^2-1}{t^3-1}$

$\Delta(3, 3; 1) = -t^{-\frac{5}{2}}(t-1)(t^4+1) = -t^{-\frac{5}{2}}(t-1)\dfrac{t^7-t^4+t^3-1}{t^3-1}$

$\Delta(3, 4; 1) = -t^{-\frac{7}{2}}(t-1)\dfrac{(t^9-1)}{(t^3-1)}$

$\Delta(3, 5; 1) = -t^{-\frac{9}{2}}(t-1)\dfrac{(t^{11}+t^6-t^5-1)}{(t^3-1)}$

2.4 $T(3,q;1)$ のアレキサンダー多項式

$$\Delta(3,6;1) = -t^{-\frac{11}{2}}(t-1)\frac{(t^{13}-t^7+t^6-1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,7;1) = -t^{-\frac{13}{2}}(t-1)\frac{(t^{15}-1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,8;1) = -t^{-\frac{15}{2}}(t-1)\frac{(t^{17}+t^9-t^8-1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,9;1) = -t^{-\frac{17}{2}}(t-1)\frac{(t^{19}-t^{10}+t^9-1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,10;1) = -t^{-\frac{19}{2}}(t-1)\frac{(t^{21}-1)}{(t^3-1)}$$

2.4 $T(3,q;1)$ のアレキサンダー多項式

計算結果から，次が推測される。

補題 2.1

(i) $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき

$$\Delta(3,3k;1) = -t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+1}-t^{3k+1}+t^{3k}-1}{(t^3-1)}$$

(ii) $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき

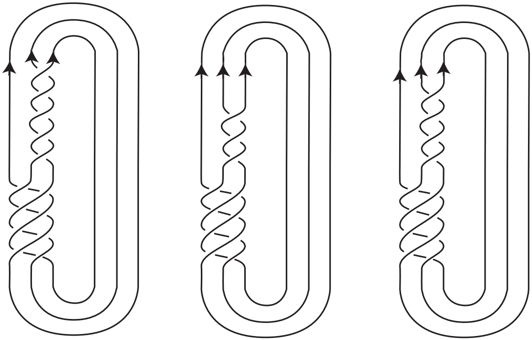
$$\Delta(3,3k+1;1) = -t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+3}-1}{(t^3-1)}$$

(iii) $q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき

$$\Delta(3,3k+2;1) = -t^{-\frac{6k+3}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+5}+t^{3k+3}-t^{3k+2}-1}{(t^3-1)}$$

2.5 $T(3, q; n)$ のアレキサンダー多項式

下図は $n = 5$ のときの図である。



L_+ L_- L_0

$T(3, 4; 5)$ $T(3, 4; 3)$ $T(3, 4; 4)$

アレキサンダー多項式のルール 2 より，

$\Delta(3, q; n) = \Delta(3, q; n-2) - (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(3, q; n-1)$ を得る。

2.5 $T(3,q;n)$ のアレキサンダー多項式

■ $q \equiv 0 \pmod 3$ のときのアレキサンダー多項式の計算結果

$$\Delta(3,3k;1) = -t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+1}-t^{3k+1}+t^{3k}-1}{t^3-1}$$

$$\Delta(3,3k;2) = t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{1}{2}}(t^{6k+2}-t^{3k+2}-t^{3k}+1)}{t^3-1}$$

$$\Delta(3,3k;3) = -t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{-1}(t^{6k+3}-t^{3k+3}+t^{3k}-1)}{t^3-1}$$

$$\Delta(3,3k;4) = t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{3}{2}}(t^{6k+4}-t^{3k+4}-t^{3k}+1)}{t^3-1}$$

2.5 $T(3, q; n)$ のアレキサンダー多項式

■ $q \equiv 1 \pmod 3$ のときのアレキサンダー多項式の計算結果

$$\Delta(3, 3k+1; 1) = -t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+3}-1}{t^3-1}$$

$$\Delta(3, 3k+1; 2) = t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{1}{2}}(t^{6k+4}+t^{3k+2}+1)}{t^3-1}$$

$$\Delta(3, 3k+1; 3) = -t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{-1}(t^{6k+5}+t^{3k+3}-t^{3k+2}-1)}{t^3-1}$$

$$\Delta(3, 3k+1; 4)$$

$$= t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{3}{2}}(t^{6k+6}+t^{3k+4}-t^{3k+3}+t^{3k+2}-1)}{t^3-1}$$

2.5 $T(3,q;n)$ のアレキサンダー多項式

■ $q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ のときのアレキサンダー多項式の計算結果

$$\Delta(3,3k+2;1) = -t^{-\frac{6k+3}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+5}+t^{3k+3}-t^{3k+2}-1}{t^3-1}$$

$$\Delta(3,3k+2;2)$$

$$= t^{-\frac{6k+3}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{1}{2}}(t^{6k+6}+t^{3k+4}-t^{3k+3}+t^{3k+2}+1)}{t^3-1}$$

$$\Delta(3,3k+2;3)$$

$$= -t^{-\frac{6k+3}{2}}(t-1)\frac{t^{-1}(t^{6k+7}+t^{3k+5}-t^{3k+4}+t^{3k+3}-t^{3k+2}-1)}{t^3-1}$$

$$\Delta(3,3k+2;4) = t^{-\frac{6k+3}{2}}(t-1)$$

$$\times\frac{t^{-\frac{3}{2}}(t^{6k+8}+t^{3k+6}-t^{3k+5}+t^{3k+4}-t^{3k+3}+t^{3k+2}+1)}{t^3-1}$$

2.5 $T(3, q; n)$ のアレキサンダー多項式

計算結果から，次が推測される。

補題 2.2

(i) $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき $\Delta(3, 3k; n)$

$$= (-1)^n t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{n-1}{2}}\{t^{6k+n}-t^{3k+n}+(-1)^{n-1}t^{3k}+(-1)^n\}}{t^3-1} \quad (n \geq 0)$$

(ii) $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき $\Delta(3, 3k+1; n)$

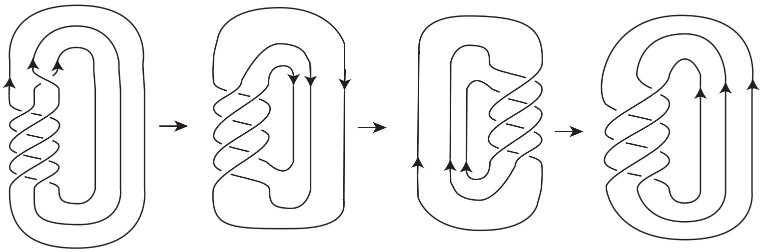
$$= (-1)^n t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{n-1}{2}}\{t^{6k+n+2}+\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j t^{3k+n-j}+(-1)^n\}}{t^3-1} \quad (n \geq 1)$$

(iii) $q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき $\Delta(3, 3k+2; n)$

$$= (-1)^n t^{-\frac{6k+3}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{n-1}{2}}\{t^{6k+n+4}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j t^{3k+n+2-j}+(-1)^n\}}{t^3-1} \quad (n \geq 0)$$

2.6 $T(3, q; -1)$ のアレキサンダー多項式

ひねりが -1 の場合のアレキサンダー多項式について考察する。



$$T(3, 4; -1) \cong T(3, 3; 1)$$

一般に $T(3, q; -1) \cong T(3, q-1; 1)$

したがって，$\Delta(3, q; -1) = \Delta(3, q-1; 1)$ を得る。

2.6 $T(3, q; -1)$ のアレキサンダー多項式

計算結果は以下の通りである。

$$\Delta(3,0;-1) = 0$$

$$\Delta(3,1;-1) = \Delta(3,0;1) = 0$$

$$\Delta(3,2;-1) = \Delta(3,1;1) = -t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}} = -t^{-\frac{1}{2}}(t-1)$$

$$\Delta(3,3;-1) = \Delta(3,2;1) = -t^{-\frac{3}{2}}(t-1)(t^2+1)$$

$$\Delta(3,4;-1) = \Delta(3,3;1) = -t^{-\frac{5}{2}}(t-1)(t^4+1)$$

$$\Delta(3,5;-1) = \Delta(3,4;1) = -t^{-\frac{7}{2}}(t-1)\frac{(t^9-1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,6;-1) = \Delta(3,5;1) = -t^{-\frac{9}{2}}(t-1)\frac{(t^{11}+t^6-t^5-1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,7;-1) = \Delta(3,6;1) = -t^{-\frac{11}{2}}(t-1)\frac{(t^{13}-t^7+t^6-1)}{(t^3-1)}$$

2.6 $T(3,q;-1)$ のアレキサンダー多項式

これらの計算結果から，次が推測される。

補題 2.3

(i) $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき，

$$\Delta(3,3k;-1) = -t^{-\frac{6k-3}{2}}(t-1)\frac{t^{6k-1}+t^{3k}-t^{3k-1}-1}{(t^3-1)}$$

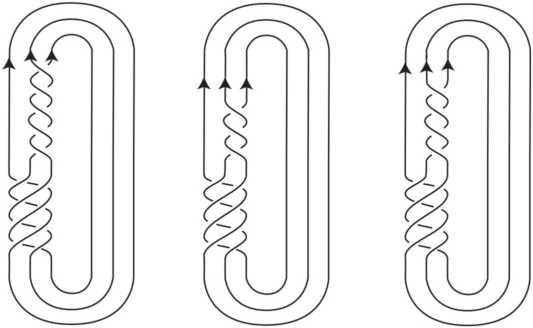
(ii) $q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき，

$$\Delta(3,3k+1;-1) = -t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+1}-t^{3k+1}+t^{3k}-1}{(t^3-1)}$$

(iii) $q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ のとき，

$$\Delta(3,3k+2;-1) = -t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+3}-1}{(t^3-1)}$$

2.7 $T(3, q; -n)$ のアレキサンダー多項式



L_- $\quad$ L_+ $\quad$ L_0

$T(3, 4; -5)$ $\quad$ $T(3, 4; -3)$ $\quad$ $T(3, 4; -4)$

$\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(L_0) = 0$ より，

$\Delta(3, q; -n) = \Delta(3, q; -n+2) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\Delta(3, q; -n+1)$ を得る。

2.7 $T(3, q; -n)$ のアレキサンダー多項式

■ $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$ のときのアレキサンダー多項式の計算結果

$$\Delta(3, 3k; -1) = -t^{-\frac{6k-3}{2}}(t-1)\frac{t^{6k-1} + t^{3k} - t^{3k-1} - 1}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3, 3k; -2) = t^{-\frac{6k-3}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{1}{2}}(t^{6k-2} - t^{3k} - t^{3k-2} + 1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3, 3k; -3) = -t^{-\frac{6k-3}{2}}(t-1)\frac{t(t^{6k-3} + t^{3k} - t^{3k-3} - 1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3, 3k; -4) = t^{-\frac{6k-3}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{3}{2}}(t^{6k-4} - t^{3k} - t^{3k-4} + 1)}{(t^3-1)}$$

2.7 $T(3, q; -n)$ のアレキサンダー多項式

■ $q \equiv 1 \pmod 3$ のときのアレキサンダー多項式の計算結果

$$\Delta(3, 3k+1; -1) = -t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+1} - t^{3k+1} + t^{3k} - 1}{(t^3 - 1)}$$

$$\Delta(3, 3k+1; -2) = t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{1}{2}}(t^{6k} + t^{3k+1} - t^{3k} + t^{3k-1} + 1)}{(t^3 - 1)}$$

$$\Delta(3, 3k+1; -3) =$$
$$-t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t(t^{6k-1} - t^{3k+1} + t^{3k} - t^{3k-1} + t^{3k-2} - 1)}{(t^3 - 1)}$$

$$\Delta(3, 3k+1; -4) =$$
$$t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{3}{2}}(t^{6k-2} + t^{3k+1} - t^{3k} + t^{3k-1} - t^{3k-2} + t^{3k-3} + 1)}{(t^3 - 1)}$$

2.7 $T(3,q;-n)$ のアレキサンダー多項式

■ $q \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ のときのアレキサンダー多項式の計算結果

$$\Delta(3,3k+2;-1) = -t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{6k+3}-1}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,3k+2;-2) = t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{1}{2}}(t^{6k+2}+t^{3k+1}+1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,3k+2;-3) = -t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t(t^{6k+1}-t^{3k+1}+t^{3k}-1)}{(t^3-1)}$$

$$\Delta(3,3k+2;-4) = t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{3}{2}}(t^{6k}+t^{3k+1}-t^{3k}+t^{3k-1}+1)}{(t^3-1)}$$

2.7 $T(3,q;-n)$ のアレキサンダー多項式

これらの計算結果から，次が推測される。

補題 2.4

(i) $q \equiv 0 \pmod 3$ のとき $\Delta(3,3k;-n)$

$$= (-1)^n t^{\frac{6k-3}{2}}(t-1)\frac{t^{-\frac{n-1}{2}}\{t^{6k-n}+(-1)^{n-1}t^{3k}-t^{3k-n}+(-1)^n\}}{t^3-1} \quad (n \geq 0)$$

(ii) $q \equiv 1 \pmod 3$ のとき $\Delta(3,3k+1;-n)$

$$= (-1)^n t^{-\frac{6k-1}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{n-1}{2}}\{t^{6k-n+2}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}t^{3k+1-j}+(-1)^n\}}{t^3-1} \quad (n \geq 0)$$

(iii) $q \equiv 2 \pmod 3$ のとき $\Delta(3,3k+2;-n)$

$$= (-1)^n t^{-\frac{6k+1}{2}}(t-1)\frac{t^{\frac{n-1}{2}}\{t^{6k-n+4}+\sum_{j=0}^{n-2}(-1)^{n+j}t^{3k+1-j}+(-1)^n\}}{t^3-1} \quad (n \geq 1)$$

2.7 $T(3,q;n)$ のアレキサンダー多項式

命題 2.5

$$\Delta(3,3k;n) = (-1)^n t^{-3k+1}(t-1)\frac{t^{-\frac{n}{2}}\{t^{6k+n} + (-1)^{n-1}t^{3k} - t^{3k+n} + (-1)^n\}}{t^3-1}$$

$$\Delta(3,3k+1;n) =$$
$$\begin{cases} (-1)^n t^{-3k}(t-1)\dfrac{t^{-\frac{n}{2}}\{t^{6k+n+2} + \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^j t^{3k+n-j} + (-1)^n\}}{t^3-1} & (n \geq 1) \\ (-1)^n t^{-3k}(t-1)\dfrac{t^{-\frac{n}{2}}\{t^{6k+n+2} + \sum_{j=0}^{-n}(-1)^{-n+j} t^{3k+1-j} + (-1)^n\}}{t^3-1} & (n < 1) \end{cases}$$

$$\Delta(3,3k+2;n) =$$
$$\begin{cases} (-1)^n t^{-3k-1}(t-1)\dfrac{t^{-\frac{n}{2}}\{t^{6k+n+4} + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j t^{3k+n+2-j} + (-1)^n\}}{t^3-1} & (n \geq 0) \\ (-1)^n t^{-3k-1}(t-1)\dfrac{t^{-\frac{n}{2}}\{t^{6k+n+4} + \sum_{j=0}^{-n-2}(-1)^{-n+j} t^{3k+1-j} + (-1)^n\}}{t^3-1} & (n < 0) \end{cases}$$

3.1 結び目のアレキサンダー多項式の分類

命題 2.5 における多項式のうち，一致するのは以下の通りである。

命題 3.1

① $\Delta(3, 3k; 1) = \Delta(3, 3k+1; -1)$
② $\Delta(3, 3k; 1) = \Delta(3, 3k+2; -3)$
③ $\Delta(3, 3k+3; -1) = \Delta(3, 3k+1; 3)$
④ $\Delta(3, 3k+3; -1) = \Delta(3, 3k+2; 1)$
⑤ $\Delta(3, 3k+1; 6m+4) = \Delta(3, 3k+6m+4; -6m-2) \quad (m \geq 0)$
⑥ $\Delta(3, 3k+1; 6m+4) = \Delta(3, 3k+6m+5; -6m-4) \quad (m \geq 0)$
⑦ $\Delta(3, 3k+2; 6m+2) = \Delta(3, 3k+6m+2; -6m-2) \quad (m \geq 0)$
⑧ $\Delta(3, 3k+2; 6m+2) = \Delta(3, 3k+6m+5; -6m-4) \quad (m \geq 0)$
⑨ $\Delta(3, 3k+1; n) = \Delta(3, 3k+2; n-2) \ (n \in Z)$

3.2 同値な結び目

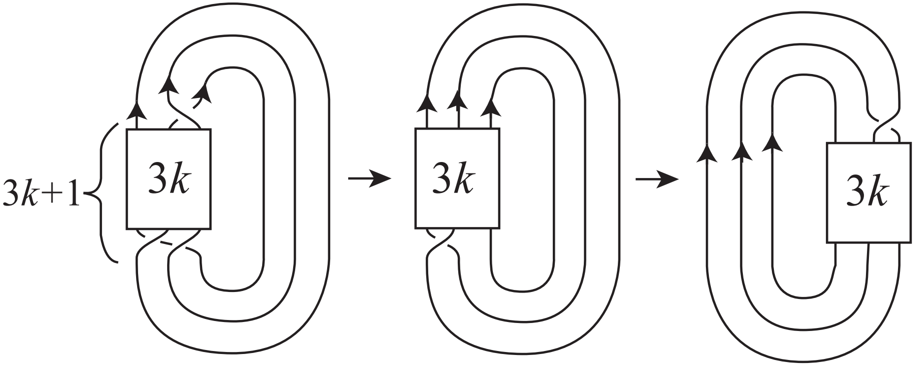
多項式が等しい結び目のうち，同値な結び目は以下の通りである。

命題 3.2

① $T(3,3k;1) \cong T(3,3k+1;-1)$
② $T(3,3k;1) \cong T(3,3k+2;-3)$
③ $T(3,3k+3;-1) \cong T(3,3k+1;3)$
④ $T(3,3k+3;-1) \cong T(3,3k+2;1)$
⑤ $T(3,3k+1;4) \cong T(3,3k+4;-2)$ (3.1⑤ における $m=0$)
⑥ $T(3,3k+1;4) \cong T(3,3k+5;-4)$ (3.1⑥ における $m=0$)
⑦ $T(3,3k+2;2) \cong T(3,3k+4;-2)$ (3.1⑦ における $m=0$)
⑧ $T(3,3k+2;2) \cong T(3,3k+5;-4)$ (3.1⑧ における $m=0$)
⑨ $T(3,3k+1;n) \cong T(3,3k+2;n-2)$ $(n \in Z)$

3.2 同値な結び目

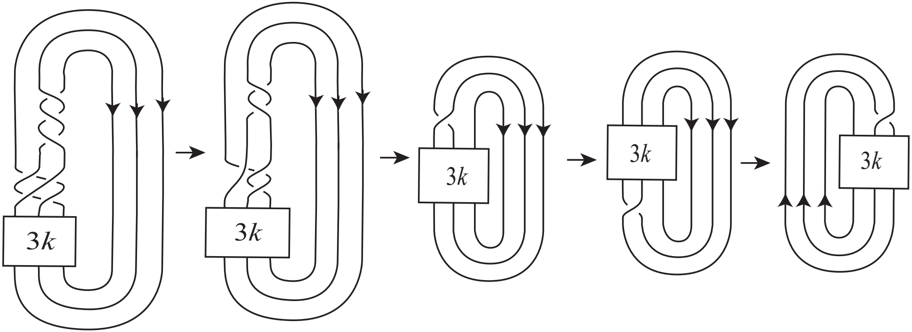
① $T(3, 3k; 1) \cong T(3, 3k+1; -1)$



$T(3, 3k+1; -1)$ $T(3, 3k; 1)$

3.2 同値な結び目

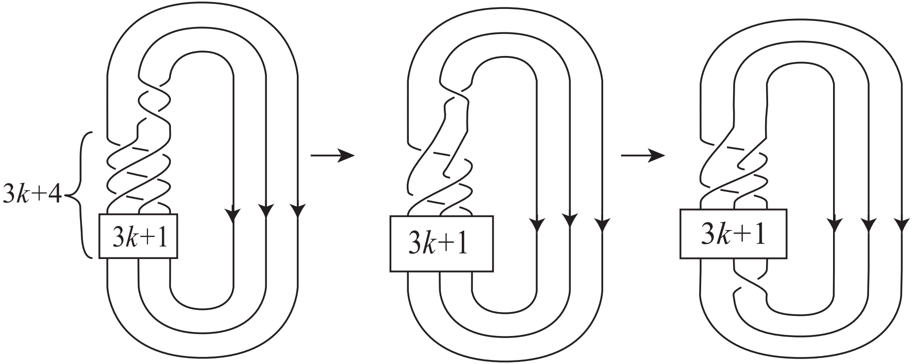
② $T(3,3k;1) \cong T(3,3k+2;-3)$



$T(3,3k+2;-3)$ $T(3,3k;1)$

3.2 同値な結び目

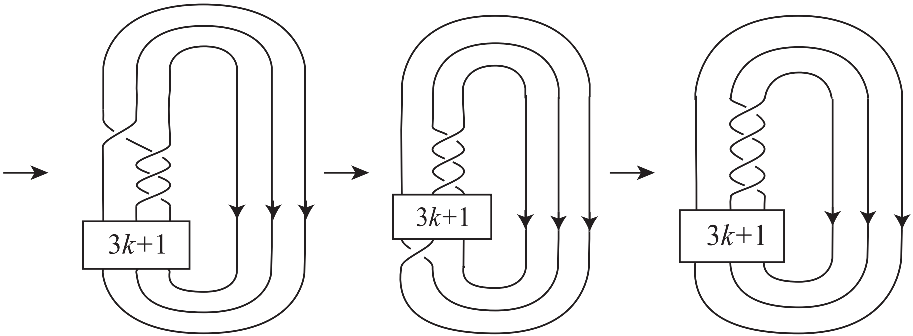
⑤ $T(3, 3k+1; 4) \cong T(3, 3k+4; -2)$



$T(3, 3k+4; -2)$

3.2 同値な結び目

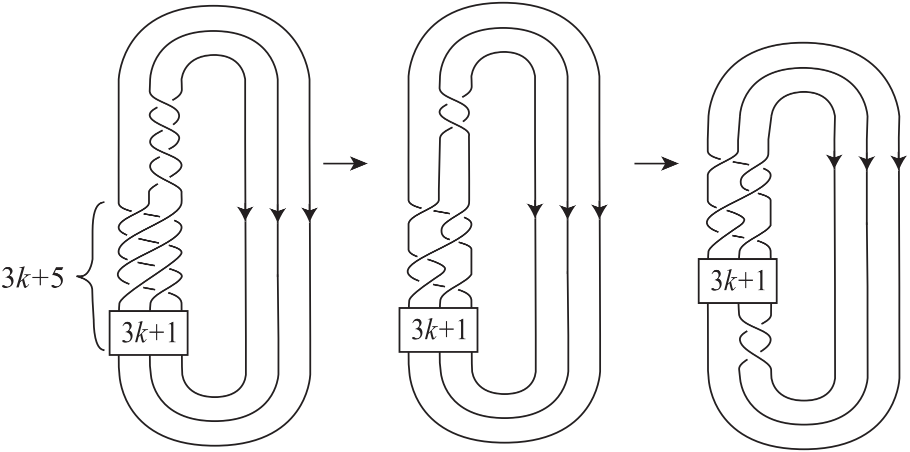
⑤ $T(3, 3k+1; 4) \cong T(3, 3k+4; -2)$



$T(3, 3k+1; 4)$

3.2 同値な結び目

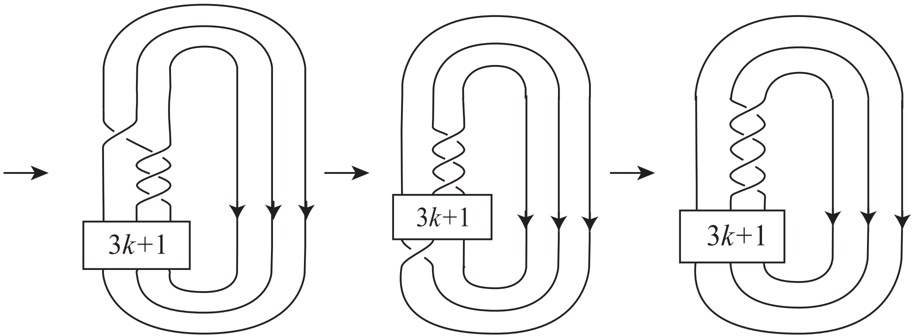
⑥ $T(3, 3k+1; 4) \cong T(3, 3k+5; -4)$



$T(3, 3k+5; -4)$

3.2 同値な結び目

⑥ $T(3, 3k+1; 4) \cong T(3, 3k+5; -4)$

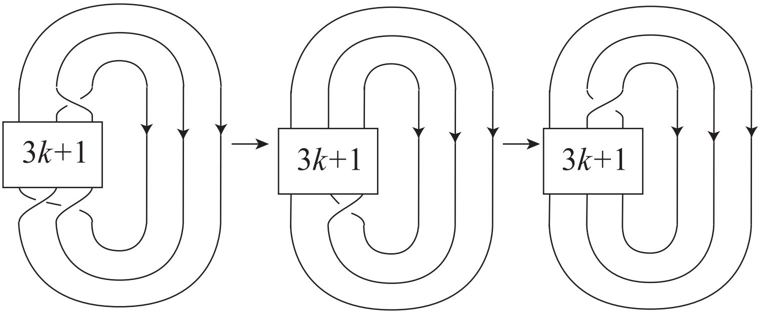


$T(3, 3k+1; 4)$

3.2 同値な結び目

⑨ $T(3, 3k+1; n) \cong T(3, 3k+2; n-2)$ $(n \in Z)$

$n = 1$ のとき

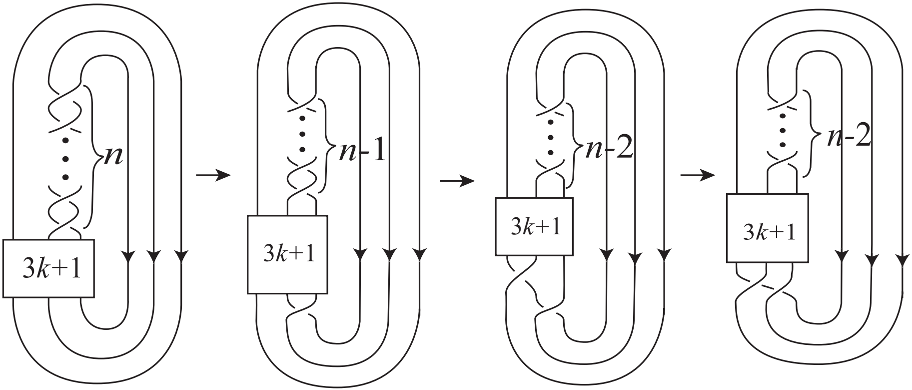


$T(3, 3k+2; -1)$ $T(3, 3k+1; 1)$

3.2 同値な結び目

⑨ $T(3, 3k+1; n) \cong T(3, 3k+2; n-2)$ $(n \in Z)$

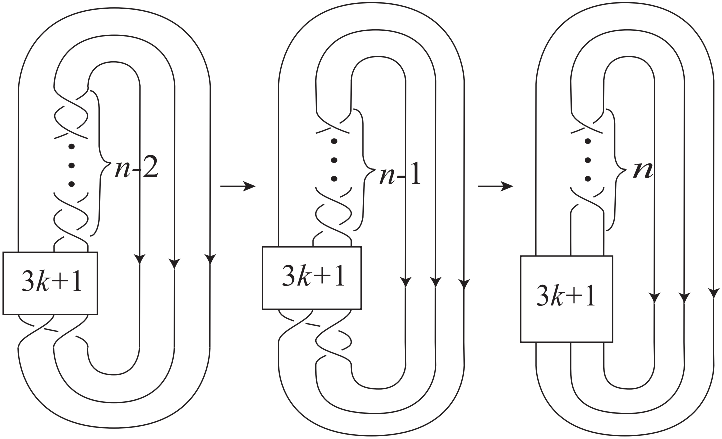
$n \geq 2$ のとき



$T(3, 3k+1; n)$ $T(3, 3k+2; n-2)$

⑨ $T(3, 3k+1; n) \cong T(3, 3k+2; n-2)$ $(n \in Z)$

$n \leq 0$ のとき



$T(3, 3k+2; n-2)$

$T(3, 3k+1; n)$

3.3 課題

命題 3.1 と命題 3.2 より，

アレキサンダー多項式は一致するが，結び目の一致が確認できなかったものは以下である。

$$T(3, 3k+1; 6m+4) \text{ と } T(3, 3k+6m+4; -6m-2) \quad (m>0)$$

$$T(3, 3k+1; 6m+4) \text{ と } T(3, 3k+6m+5; -6m-4) \quad (m>0)$$

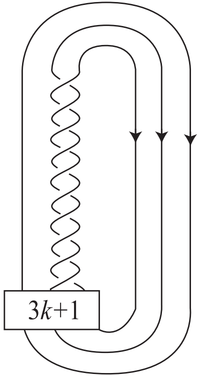
$$T(3, 3k+2; 6m+2) \text{ と } T(3, 3k+6m+4; -6m-2) \quad (m>0)$$

$$T(3, 3k+2; 6m+2) \text{ と } T(3, 3k+6m+5; -6m-4) \quad (m>0)$$

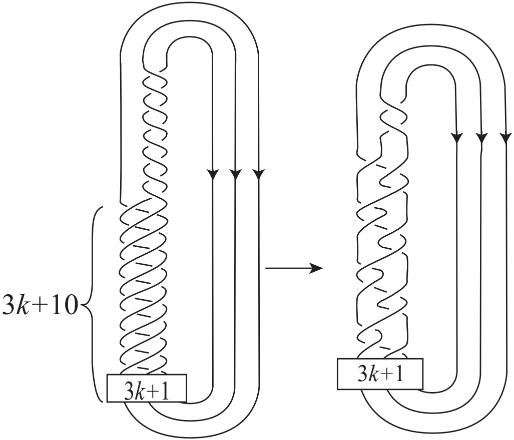
これらは結び目としては同値でないと考えられる。

3.3 課題

$T(3, 3k+1; 10)$ と $T(3, 3k+10; -8)$



$T(3, 3k+1; 10)$



$T(3, 3k+10; -8)$

3.3 課題

アレキサンダー多項式で判定できない結び目については，それ以外の不変量が必要になり，より強力な不変量によって同値でないことを証明する必要がある。

また，アレキサンダー多項式で判定できないが，その他の不変量によって判定できる結び目については，そのような結び目がもつ性質を調べていきたい。

これらは，今後の課題として残された。