Weaving diagram の構成と同値類について

福田瑞季 (東北大学 AIMR)

小谷元子氏と Sonia Mahmoudi 氏との共同研究

2021/12/23

イントロダクション

編み物 (Weave, Knitting, Fabric,$\cdots$) ∴ 編み方が少し変わると物性が変わる

Figure: 光沢のない Plain(左) と光沢のある Satin(右)

先行研究

- 仮想結び目を用いた knitting の研究 (河内，2018)
- ネットワークに関連した周期的な分岐曲面の研究 (石原-小沢-古宇田-下川, 2019)

研究の目的

- 組み合わせ的手法を用いた weave の新しい構成法
- 物性に沿うような同値類の定式化

Outline

1. Weave の定義
2. Weave の組み合わせ的構成
3. 簡単なケースの分類

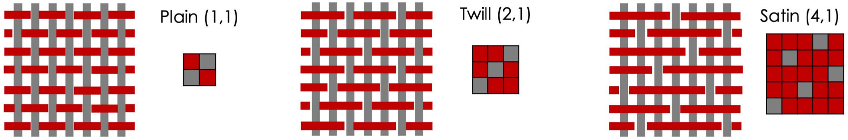
Weaves

定義 (Weave)

N を 2 以上の自然数とする．可算無限個の互いに平行な直線の集合 T_i $(i = 1, \ldots, N)$ の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを (geodesic) weave という．

定義 (Weaving diagram)

Weave W の正則射影図 W_0 に対し、各交点に上下の情報を付与したものを (geodesic) weaving diagram といい，D_{W_0} と書く．

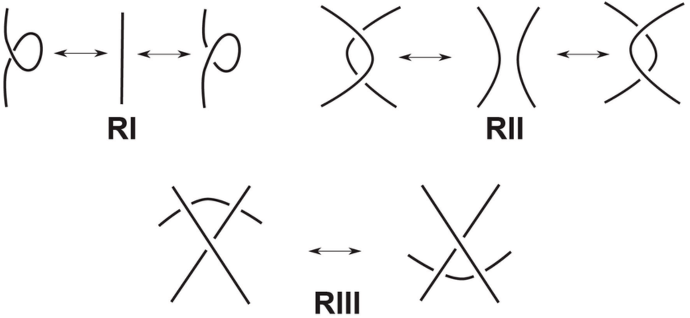


weave のライデマイスター変形

以降 weave は周期性を持つものとする．つまり，基本領域のコピーで weave が復元できるものを考える．

定理 (Grishanov ‘09)

2 つの weave W_1 と W_2 が全同位であるための必要十分条件は D_{W_1} と D_{W_2} がトーラス上のアイソトピー及びトーラスツイスト，ライデマイスター変形で移り合うことである．



Thread-tiling と vertex-cycle

定義

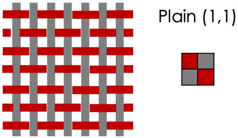
Thread-tiling とは 凸多面体の平面充填によって得られる 4-正則グラフのことをいう.

定義

T_i 内の 1 つの直線を t_i とし，$v_{i,j} = t_i \cap t_j$ とする．添字 i に対して空でない $v_{i,j}$ を並べたもの $(v_{i,j_1}, \ldots, v_{i,j_n})$ $(n \leq N)$ を vertex-cycle といい，σ'_i とかく.
さらに σ'_i の集合を Σ' と書く.

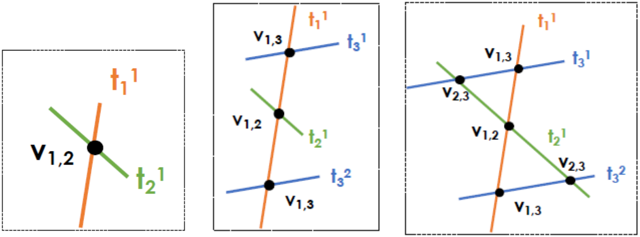
命題 (F.-Kotani-Mahmoudi)

Vertex-cycle の集合 Σ' から Thread-tiling が構成できる.



例 ($\Sigma' \Rightarrow$ thread-tiling)

$\Sigma' = (\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$,
$\sigma'_1 = (v_{1,2}, v_{1,3}), \sigma'_1 = (v_{2,3}, v_{2,1}), \sigma'_3 = (v_{3,1}, v_{3,2})$.



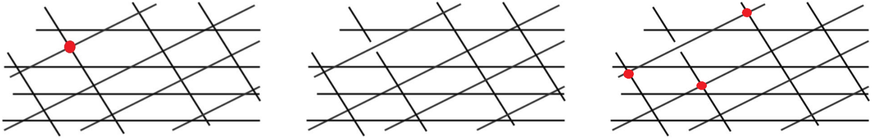
これはカゴメ格子から得られる thread-tiling と同じ.

Crossing-cycle

定義 (Crossing-cycle)

T_i と T_j に対して次を満たす列 $(c_{1,1}, \dots, c_{1,m_1}, c_{2k,1}, \dots, c_{2k,m_{2k}})$ を crossing-cycle とよび，$\sigma_{i,j}$ と書く．また，$\Sigma = \{\sigma_{i,j}\}$ と書く．

- $c_{2l-1,1}, \dots, c_{2l-1,m_{2l-1}}$ はすべて 1,
- $c_{2l,1}, \dots, c_{2l,m_{2l}}$ はすべて-1.



定理 (F.-Kotani-Mahmoudi)

Weaving diagram は Σ' と Σ から得られる．

Σ', Σ を用いた同値類 (1/2)

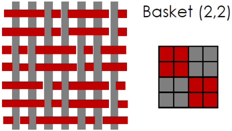
Bascket(2,2) と Twill(2,2) は同じ thread-tiling から構成できる．
基本領域のうち，交点が最も少なくなるものは異なる．
一般に交点が最小になる基本領域を見つけるのは難しい．

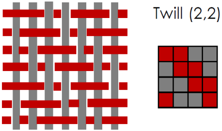
$T_i = \{t^i_1, \ldots, t^i_{n_i}\} \subset$ 基本領域

定義 (Crossing matrix)

次で定める行列 $M_{i,j} = (m_{k,l}) \in M(n_i, n_j; \{\pm 1\})$ を weave の (i,j)-crossing matrix という．

- $m_{k,l}$ は t^i_k と t^j_l の交点の情報で決まる．
- t^i_k が t^j_l の上を通るなら $m_{k,l} = 1$,
- t^i_k が t^j_l の下を通るなら $m_{k,l} =$ -1.





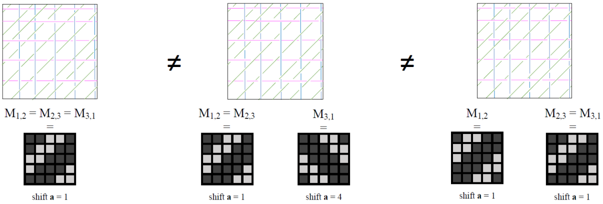
定理 (F.-Kotani-Mahmoudi)

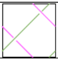
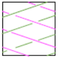
W_1, W_2 をそれぞれ Σ', Σ から定まる weave とする．この 2 つの weave が同値であるための必要十分条件はそれぞれの crossing-matrix の集合が次の操作を除き集合として一致することである．

- 行または列の一斉巡回置換
- 行または列の一斉シフト

注意

巡回置換は基本領域の平行移動，シフトはトーラスツイストに対応している．



Set of Crossing Sequences	Crossing number (Writhe)	Minimal Diagram	Set of Crossing Matrices	Matrices	Number of Crossings by S.C.C.	Number of S.C.C. for Each Set on the Minimal Diagram	Name
{(1,1)}	2 (0)		$\left\{\begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}\right\}$	Rank = 1	2	1 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (1,1)
{(2,1)}	3 (1)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 3 "Diagonal configuration"	3	1 *Ex: (2,1) and (-1,1)*	Twill Square Weaving (1,1)
{(2,2)}	4 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 2 "Diagonal configuration"	4	1 *Ex: (2,1) and (-2,1)*	Twill Square Weaving (2,2)
{(2,2)}	8 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 1	4	2 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (2,2)
{(3,1)}	4 (2)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 4 "Diagonal configuration"	4	1 *Ex: (2,1) and (-2,1)*	Twill Square Weaving (3,1)
{(3,1)}	16 (8)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 4	4	4 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Satin Square Weaving (3,1)
{(3,2)}	5 (1)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 5 "Diagonal configuration"	5	1 *Ex: (1,1) and (-3,2)*	Twill Square Weaving (3,2)
{(3,3)}	6 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 3 "Diagonal configuration"	6	1 *Ex: (3,1) and (-3,1)*	Twill Square Weaving (3,3)
{(3,3)}	18 (0)		$\left\{\begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}\right\}$	Rank = 1	6	3 *Ex: (1,1) and (-1,1)*	Plain Square Weaving (3,3)