

Index polynomial invariants for twisted links

伊藤大貴

大阪大学大学院理学研究科

December 24, 2021

Today's contents

- ① Twisted links
- ② Index polynomials for twisted link diagrams
- ③ Application

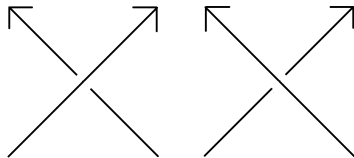
Today's contents

- ① Twisted links
- ② Index polynomials for twisted link diagrams
- ③ Application

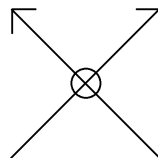
A definition of virtual link diagrams

Definition (Kauffman, 1999)

m -component virtual link diagram とは, 向きと順序の付いた m 個の S^1 の \mathbb{R}^2 へのはめこみであり, 交点が classical crossing と virtual crossing の横断的に交わる 2 重点のみであるものをいう.



classical crossing

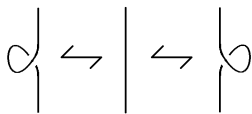


virtual crossing

Generalized Reidemeister moves

Definition (Kauffman, 1999)

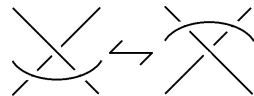
下図の局所変形を Generalized Reidemeister move という. また, $D \sim^v D'$ であるとは, D, D' が有限回の Generalized Reidemeister move で移りあうことをいう.



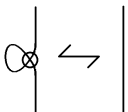
R1



R2



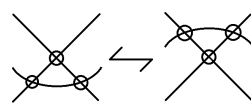
R3



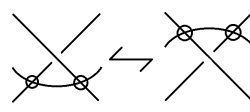
V1



V2



V3



V4

A definition of twisted link diagrams

Definition (Bourgoin, 2008)

m -component twisted link diagram とは, m -comp. virtual link diagram の arc 上に bar の情報を付け加えたものである. (bar は必ずしも無くてもよい.)

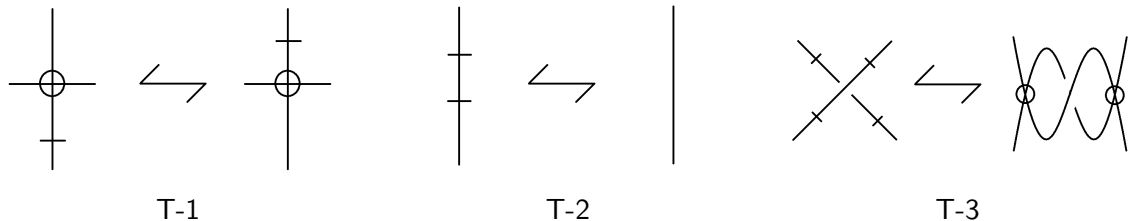


arc 上の bar

Extended Reidemeister moves

Definition (Bourgoin, 2008)

Generalized Reidemeister move と下図の局所変形を合わせて Extended Reidemeister move という。また、 $D \stackrel{t}{\sim} D'$ であるとは、 D, D' が有限回の Extended Reidemeister move で移りあうことをいう。



Even type and odd type

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$: m -comp. twisted link diagram.

Definition

$i \in \{1, \dots, m\}$ に対して,

- (1) D_i が even type $\Leftrightarrow D_i$ の arc 上の bar の個数が偶数個.
- (2) D_i が odd type $\Leftrightarrow D_i$ の arc 上の bar の個数が奇数個.

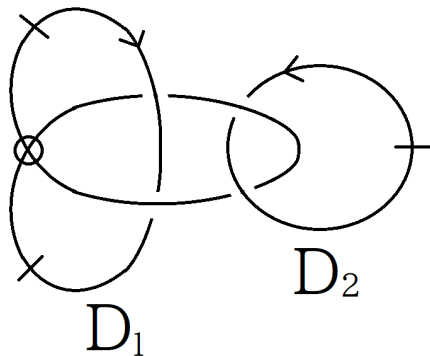
Remark

even type, odd type は twisted link の不変量である.

An example of m -comp. twisted link diagrams

Example. $D = D_1 \cup D_2$: 下図の 2-comp. twisted link diagram.

D_1 は even type, D_2 は odd type.



Today's contents

- ① Twisted links
- ② Index polynomials for twisted link diagrams
- ③ Application

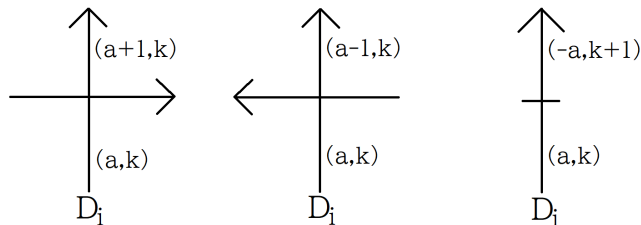
n -colorings for even type D_i

以後, $i \in \{1, \dots, m\}$ を固定して, D_i は even type であると仮定する.

D_i の semi arc とは D_i を classical crossing と bar で区切ったものとする. (virtual crossing は無視する.) また, $\mathcal{A}(D_i) := \{ D_i \text{ の semi arc } \}$ とする.

Definition

n を非負の整数とする. そのとき, D_i の n -coloring \Leftrightarrow 写像 $C_i : \mathcal{A}(D_i) \rightarrow \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$ で下図の条件を満たすもの. 但し, 下図の 2 重点は classical crossing.



$d_i(D)$ -colorings for D_i

Definition

$\mathbf{1}_i : \mathcal{A}(D_i) \rightarrow \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2 : D_i$ の 1-coloring とする.

そのとき, $d_i(D) := |\#\{\text{図 (1)}\} - \#\{\text{図 (2)}\} + \#\{\text{図 (3)}\} - \#\{\text{図 (4)}\}|$.

但し, 下図の 2 重点は classical crossing.

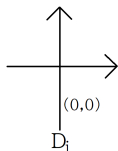


図 (1)

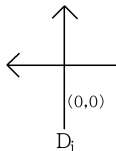


図 (2)

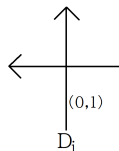


図 (3)

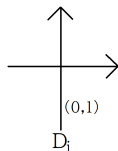


図 (4)

Lemma (I.)

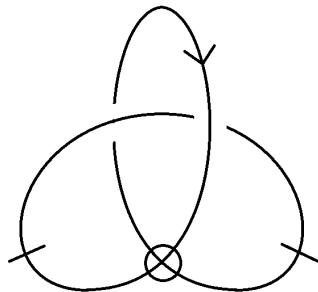
D_i の $d_i(D)$ -coloring が存在する.

An example of $d_i(D)$ -coloring of D_i

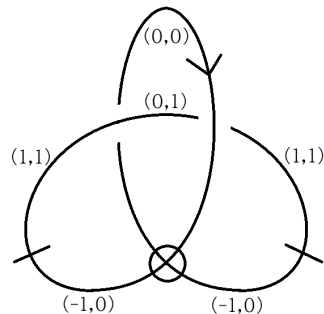
Example. $D = D_1$: 左下図の 1-comp. twisted link diagram.

そのとき, $d_1(D) = 0$ である.

また, $C_1 : \mathcal{A}(D_1) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ を右下図の coloring とすると, C_1 は D_1 の 0-coloring である.



D



0-coloring

Weight for self crossings of D_i

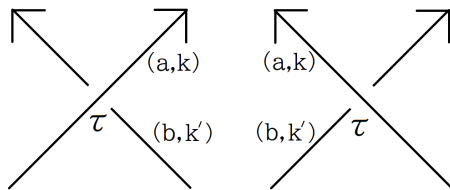
以後, $C_i : D_i$ の $d_i(D)$ -coloring とする.

Definition

D_i の各 self crossing τ に対して,

$$W^{(C_i, D_i)}(\tau) := a - b \in \mathbb{Z}_{d_i(D)}.$$

但し, a, b は 下図に描かれた semi arc の値.



A classification of self crossings of D_i

D_i の self crossing を 3 つの集合 $T^{(C_i, D_i)}$, $T_0^{(C_i, D_i)}$, $T_1^{(C_i, D_i)}$ に分類する.

Definition

$T^{(C_i, D_i)} := \{ \tau : D_i \text{ の self crossing} \mid \text{図 } (\alpha) \text{ の条件を満たす} \}.$

$T_0^{(C_i, D_i)} := \{ \tau : D_i \text{ の self crossing} \mid \text{図 } (0) \text{ の条件を満たす} \}.$

$T_1^{(C_i, D_i)} := \{ \tau : D_i \text{ の self crossing} \mid \text{図 } (1) \text{ の条件を満たす} \}.$

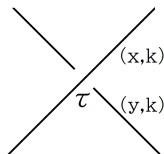


図 (α)

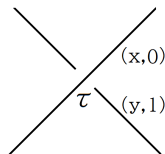


図 (0)

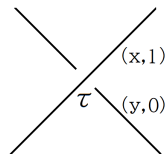


図 (1)

A definition of index polynomials for D_i

Definition (I.)

index polynomial $\phi^{(C_i, D_i)}(t), \psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^{d_i(D)} - 1)$ を

$$\phi^{(C_i, D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T^{(C_i, D_i)}} \text{sign}(\tau) (t^{W^{(C_i, D_i)}(\tau)} - 1),$$

$$\psi_0^{(C_i, D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T_0^{(C_i, D_i)}} \text{sign}(\tau) t^{W^{(C_i, D_i)}(\tau)},$$

$$\psi_1^{(C_i, D_i)}(t) := \sum_{\tau \in T_1^{(C_i, D_i)}} \text{sign}(\tau) t^{W^{(C_i, D_i)}(\tau)}$$

と定義する.

Main results

$f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(t^n - 1)$ に対して,
 $(f_1, f_2) \stackrel{(p)}{\equiv} (g_1, g_2) \stackrel{\text{def}}{\iff}$ ある整数 k が存在して
 $(f_1, f_2) = (g_1 \cdot t^{pk}, g_2 \cdot t^{-pk})$ または $(f_1, f_2) = (g_2 \cdot t^{pk}, g_1 \cdot t^{-pk})$.

Theorem (I.)

$D = D_1 \cup \dots \cup D_m, D' = D'_1 \cup \dots \cup D'_m$: D_i が even type である m -comp. twisted link diagram. そのとき, $D \stackrel{t}{\sim} D' \Rightarrow$ 次が成り立つ.

(1) $d_i(D) = d_i(D')$.

任意の D_i の $d_i(D)$ -coloring C_i と D'_i の $d_i(D')$ -coloring C'_i に対して,

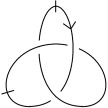
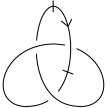
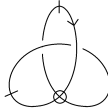
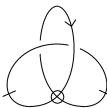
(2) $\phi^{(C_i, D_i)}(t) = \phi^{(C'_i, D'_i)}(t)$.

(3) $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(2)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t))$.

故に, $\phi^{(C_i, D_i)}(t)$ と $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t))$ は twisted link の不変量になる.

Main results

Example. K_1, \dots, K_4 : 下図の 1-comp. twisted link diagram.

				
	K_1	K_2	K_3	K_4
$d_1(D)$	0	2	2	0
$\phi^{(C_1, D_1)}(t)$	0	0	$t - 1$	0
$(\psi_0^{(C_1, D_1)}(t), \psi_1^{(C_1, D_1)}(t))$	(1, 1)	(1, 0)	(t , 0)	(t, t^{-1})

上の表から, $t - 1 \neq 0$, $(1, 1) \stackrel{(2)}{\not\cong} (t, t^{-1})$. 故に, 相異なる j, j' に対して, $K_j \stackrel{t}{\not\cong} K_{j'}$.

Main results

Kauffman は virtual knot K に対して affine index polynomial invariant $P_K(t)$ を定義.
 m -comp. virtual link diagram $D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$ に対しても, 同様に affine index polynomial invariants $P_{D_i}(t)$ が定義できる.

Proposition (I.)

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$: m -comp. virtual link diagram. そのとき, 次の2つの条件が成り立つ.
 任意の $j \in \{1, \dots, m\}$ と D_j の C_j : $d_j(D)$ -coloring に対して,

- (1) $\phi^{(C_j, D_j)}(t) = P_{D_j}(t)$.
- (2) $\psi_0^{(C_j, D_j)}(t) = \psi_1^{(C_j, D_j)}(t) = 0$.

故に, index polynomial invariants は virtual link の affine index polynomial invariants の拡張になっている.

Today's contents

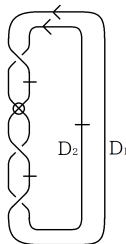
- ① Twisted links
- ② Index polynomials for twisted link diagrams
- ③ Application

A definition of double coverings

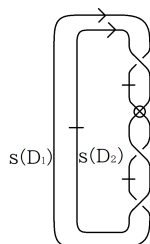
$D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$: m -comp. twisted link diagram.

D の double covering diagram $\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \cdots \cup \tilde{D}_m$ を次の手順で構成する.

(1) D に対し, D の horizontal mirror image を取り, classical crossing の上下を入れ替えた diagram $s(D) = s(D_1) \cup \cdots \cup s(D_m)$ を D の右側に描く.



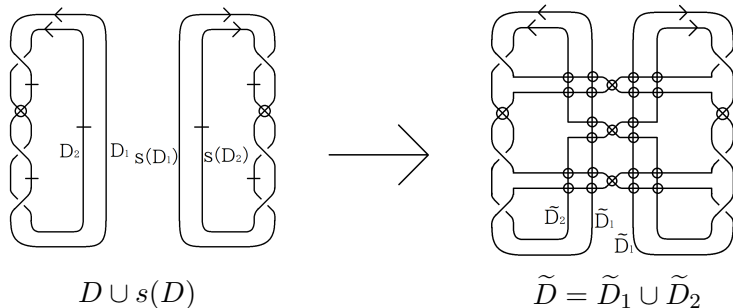
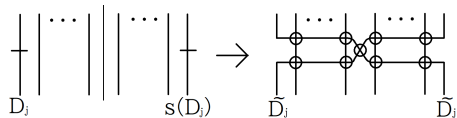
$$D = D_1 \cup D_2$$



$$s(D) = s(D_1) \cup s(D_2)$$

A definition of double coverings

(2) 全ての D_j の bar と, それに対応する $s(D_j)$ の bar を右図のように切り開いて, D_j と $s(D_j)$ をつなげたものを \tilde{D}_j とする.



(1)(2) の手順で構成した virtual link diagram を D の double covering diagram $\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \dots \cup \tilde{D}_m$ と定義する.

A property of double coverings

Proposition (N.Kamada, S.Kamada, 2016)

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$, $D' = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$: m -comp. twisted link diagram.

そのとき, $D \stackrel{t}{\sim} D' \Rightarrow \tilde{D} \stackrel{v}{\sim} \tilde{D}'$.

An application

$D = D_1 \cup \cdots \cup D_m$, $D' = D'_1 \cup \cdots \cup D'_m$: D_i が even type である m -comp. twisted link diagram.

Theorem A (I.)

$\tilde{D} \sim^v \tilde{D}' \Rightarrow$ 次が成り立つ.

(1) $d_i(D) = d_i(D')$.

任意の D_i の $d_i(D)$ -coloring C_i と D'_i の $d_i(D')$ -coloring C'_i に対して,

(2) $\phi^{(C_i, D_i)}(t) = \phi^{(C'_i, D'_i)}(t)$.

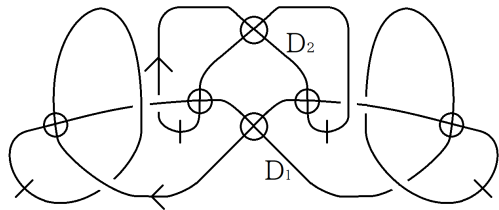
(3) $(\psi_0^{(C_i, D_i)}(t), \psi_1^{(C_i, D_i)}(t)) \stackrel{(1)}{\equiv} (\psi_0^{(C'_i, D'_i)}(t), \psi_1^{(C'_i, D'_i)}(t))$.

Theorem B (I.)

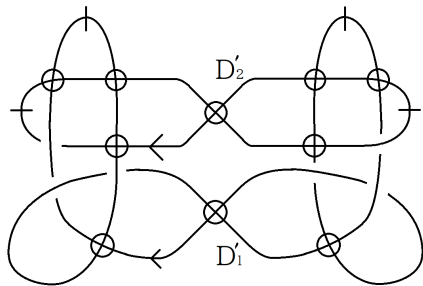
$\tilde{D} \sim^v \tilde{D}'$ であって $D \stackrel{t}{\sim} D'$ であるような D, D' が存在する.

Proof of theorem B

Proof of theorem B. $D = D_1 \cup D_2$, $D' = D'_1 \cup D'_2$: 下図の 2-comp. twisted link diagram.
 このとき, D_1, D'_1 は even type.



$$D = D_1 \cup D_2$$



$$D' = D'_1 \cup D'_2$$

Proof of theorem B

D, D' の double covering diagram は右図の virtual link diagram と同値である. 故に, $\tilde{D} \stackrel{v}{\sim} \tilde{D}'$.

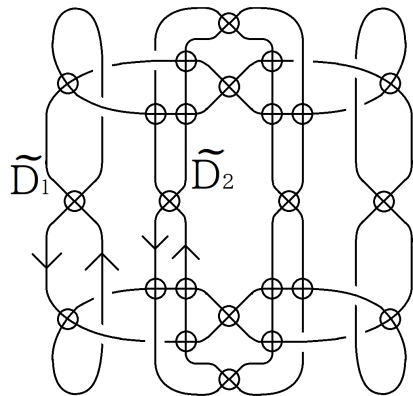
このとき, ある D_i の $d_i(D)$ -coloring C_i と D'_i の $d_i(D')$ -coloring C'_i を与えると

$$\begin{aligned} d_1(D) &= d_1(D') = 2, \\ (\psi_0^{(C_1, D_1)}(t), \psi_1^{(C_1, D_1)}(t)) &= (2t, 0), \\ (\psi_0^{(C'_1, D'_1)}(t), \psi_1^{(C'_1, D'_1)}(t)) &= (2, 0). \end{aligned}$$

故に,

$$(\psi_0^{(C_1, D_1)}(t), \psi_1^{(C_1, D_1)}(t)) \stackrel{(2)}{\not\cong} (\psi_0^{(C'_1, D'_1)}(t), \psi_1^{(C'_1, D'_1)}(t)).$$

従って, $D \stackrel{t}{\not\sim} D'$. \square



Thank you for your attention.