

# 重み付きグラフの変形と結び目理論への応用について

長坂 篤英

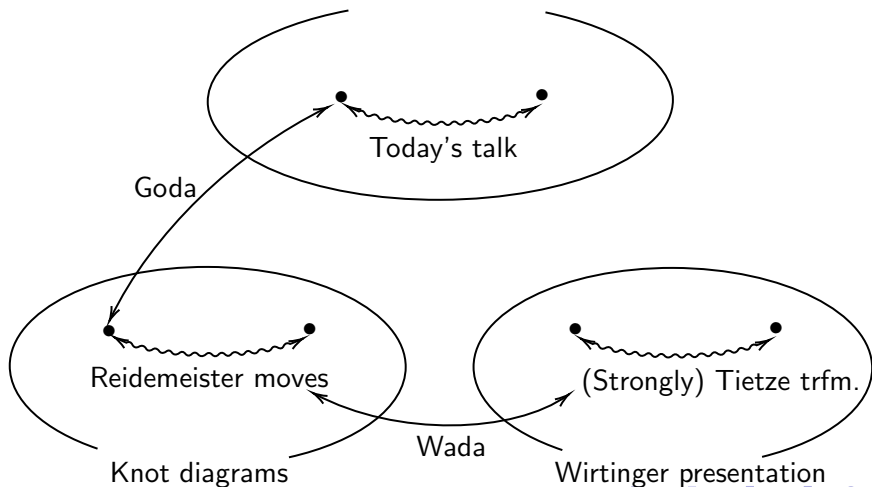
東京大学大学院数理科学研究科

December 24, 2021

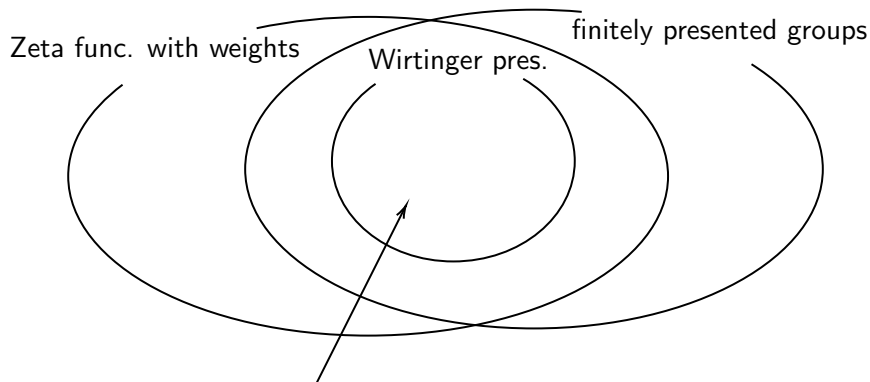
- 1 Introduction
- 2 Deformation on weighted graphs
- 3 Applications to finitely presented groups
- 4 Applications to knot theory
- 5 Weights and Alexander pairs

## §1. Introduction

Zeta function of weighted graphs



グラフの文脈で書くと...



先の関係が全てグラフの中で記述できる！

## §2. Deformation on matrix-weighted graphs

- 重み付きグラフとは, **quiver** の表現のこと.
- 頂点の集合  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  に対し,  $v_i$  には  $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$  が対応する.
- $v_i$  から  $v_j$  への edge には  $R$  成分の  $a_i \times a_j$  サイズの行列が重みとしてのる.

$$\begin{array}{ccc}
 R^{a_i} & \xrightarrow{\quad} & R^{a_j} \\
 v_i \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet v_j \\
 & \left[ \begin{array}{c} \\ * \\ \end{array} \right] & 
 \end{array}$$

重み付きグラフ  $(G, w)$  のゼータ関数とは,

$$\zeta_G(w) = \prod_{[C]} \det(I - w(C))^{-1}$$

で定義される.  $w(C)$  は cycle を一周回った時の行列の積で,  $[C]$  は prime cycles の同値類を走る.

注. prime cycles の同値類とは概ね次の意味:

- prime: ある cycle を  $n$  周のみ回ると言うことはない
- equivalent: cycle の始点はどこにとってもよい

次の様な matrix-weighted graph のゼータ関数への寄与を考えよう:



cycle の長さで分類すると...

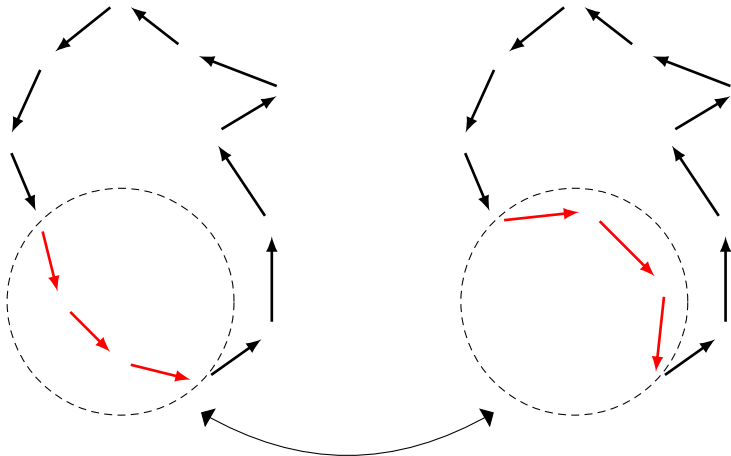
cycle の長さ	ゼータ関数への寄与 ( $w(C)$ に出てくる部分)
1	$a, b$
2	$ab$ ( $aa$ などは prime に反する)
3	$aab, abb$ ( $baa$ は $aab$ と equivalent)

となる．実際は無数個の cycle が出てくる．有限的に計算できる定理として隣接行列と呼ばれる行列  $A$  を用いて

$$\zeta_G(w) = \det(I - A)^{-1}$$

と書けることが知られている．

## ここで考えるグラフの変形とは

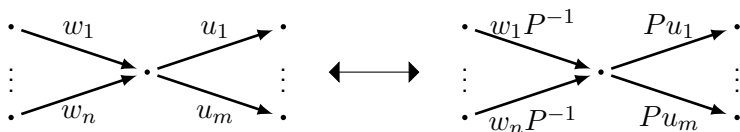


グラフの一部を取り替えて holonomy を保存する様になりたい

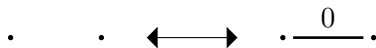


重み付きグラフの基本変形を次で定義する．向きが書いていないものはそれを問わない．辺の向きを逆にした変形も含むものとする．

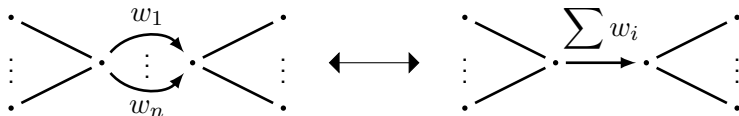
(1) (change of basis)



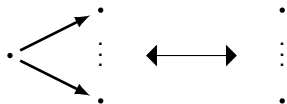
(2) (null edge)



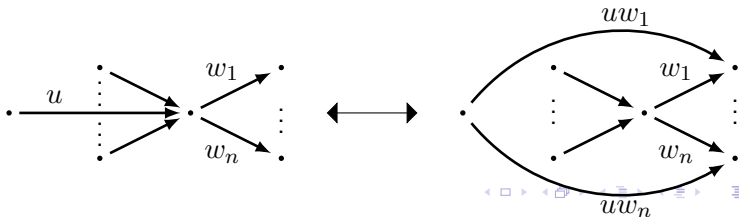
## (3) (weight summation)



## (4) (source/sink eliminating)

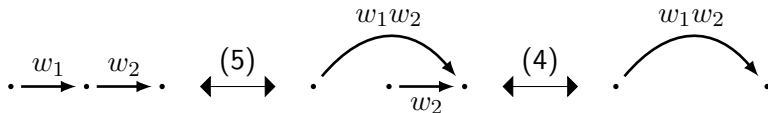


## (5) (hub vertex resolution)



## 定義からわかること

たとえば、次の操作を作れる：



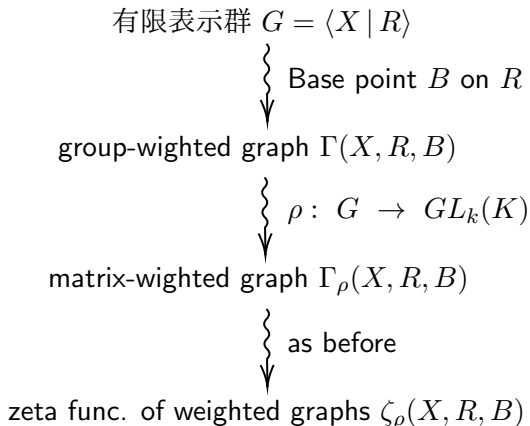
### Theorem (N)

二つの *matrix-weighted graphs*  $(G, w), (G', w')$  が基本変形で移り合うならば

$$\zeta_G(w) = \zeta_{G'}(w')$$

### §3. Applications to finitely presented groups

次の様な流れで重みつきグラフを作ろう:



## Base point $B$ on $R$ とは

適切な有限表示群に対して重み付きグラフを定義する.

### Assumption.

群  $G$  の表示  $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$  関係式は

$$r_i : x_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad \text{pr}(\partial_i f_i) \neq 1$$

という形をしている. ここに,

- $\text{pr} : \langle x_1, \dots, x_n \rangle \twoheadrightarrow G$
- $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$  は自由微分.

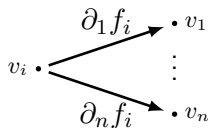
$x_i$  を  $r_i$  の **base point** と呼ぶ.

cf.) 陰関数定理

$\Gamma(X, R, B), \Gamma_\rho(X, R, B)$  の作り方

$G = \langle X \mid R \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$  は先の条件を満たす.

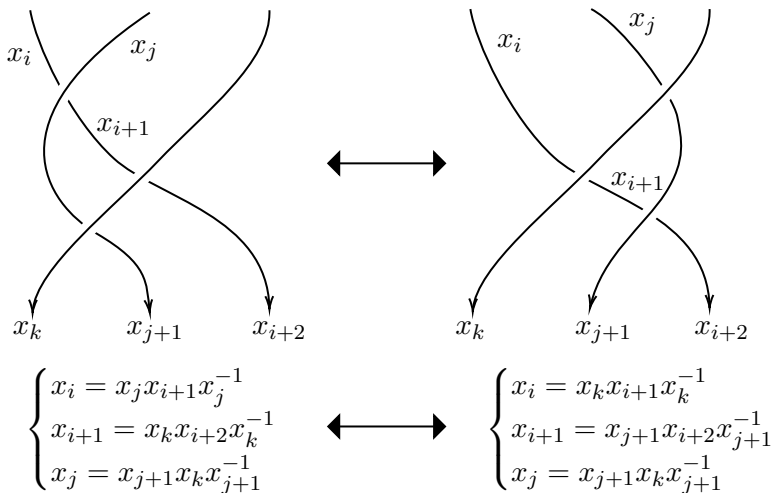
- (1) vertex の集合  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  を用意する.
- (2) 各  $r_i : x_i = f_i$  ごとに,  $\mathbb{Z}G$  に値をとる weight を次でのせる.



この様にしてできたグラフを  $\Gamma(X, R, B)$  とかく. さらに,

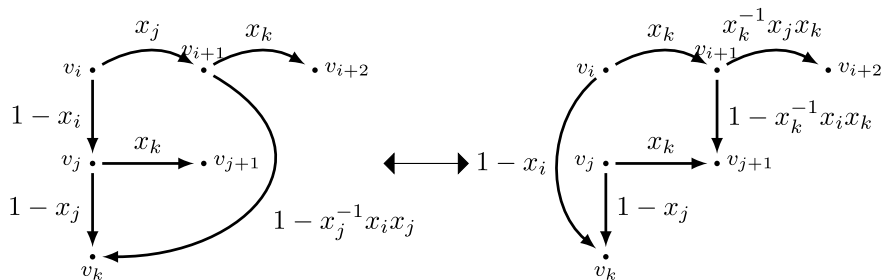
- (3) 各 weight を表現を用いて  $\rho \circ \text{pr}(\partial_j f_i)$  という行列にする.

とした matrix-weighted graph を  $\Gamma_\rho(X, R, B)$  とかく. cf.) Goda

Reidemeister move 3 を用いた  $\Gamma(X, R, B)$  の具体例 1

Reidemeister move 3 を用いた  $\Gamma(X, R, B)$  の具体例 2

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = x_j x_{i+1} x_j^{-1} \\ x_{i+1} = x_k x_{i+2} x_k^{-1} \\ x_j = x_{j+1} x_k x_{j+1}^{-1} \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_i = x_k x_{i+1} x_k^{-1} \\ x_{i+1} = x_{j+1} x_{i+2} x_{j+1}^{-1} \\ x_j = x_{j+1} x_k x_{j+1}^{-1} \end{array} \right.$$





# Weighted graph についてわかること

$\Gamma(X, R, B)$  についての基本変形を, 「matrix-weighted graph の基本変形の (2)~(5) において行列を群環の元に形式的に変えたもの」とする. 次がわかる.

## Theorem (N.)

- (1)  $\rho \sim \rho' \Rightarrow \zeta_\rho(X, R, B) = \zeta_{\rho'}(X, R, B)$
- (2)  $\rho \sim \rho_1 \oplus \rho_2 \Rightarrow \zeta_\rho(X, R, B) = \zeta_{\rho_1}(X, R, B)\zeta_{\rho_2}(X, R, B)$
- (3)  $\Gamma(X, R, B) \sim \Gamma(X', R', B') \Rightarrow \Gamma_\rho(X, R, B) \sim \Gamma_\rho(X', R', B')$
- (4)  $\Gamma(X, R, B) \sim \Gamma$  のとき,  $\Gamma = \Gamma(X', R', B')$  となる  $\langle X | R \rangle$  と *Strongly Tietze equivalent* な  $\langle X' | R' \rangle$  が存在する.
- (5)  $\langle X | R \rangle$  と  $\langle X' | R' \rangle$  が基点を保つ *Strongly Tietze equivalent* ならば  $\Gamma(X, R, B) \sim \Gamma(X', R', B')$

## §4. Applications to knot theory

以下では、結び目理論への応用を考える.

- Wirtinger 表示と言ったときは

$$\pi_K = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle \quad \text{where } r_i : x_i = u_i^{\pm 1} x_{i+1} u_i^{\mp 1}$$

の形をしているとする.

# 不変量を得るための steps

## Theorem (Wada)

*Wirtinger* 表示から得られる *Twisted Alexander invariant* は結び目の不変量になる.

これは, *matrix-weighted graph* の言葉で言うと次の様に言える.

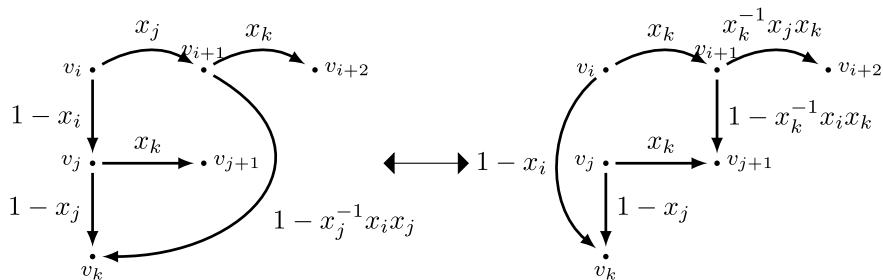
## Theorem

*matrix-weighted graph* のゼータ関数は *Reidemeister moves* の前後で不変である.

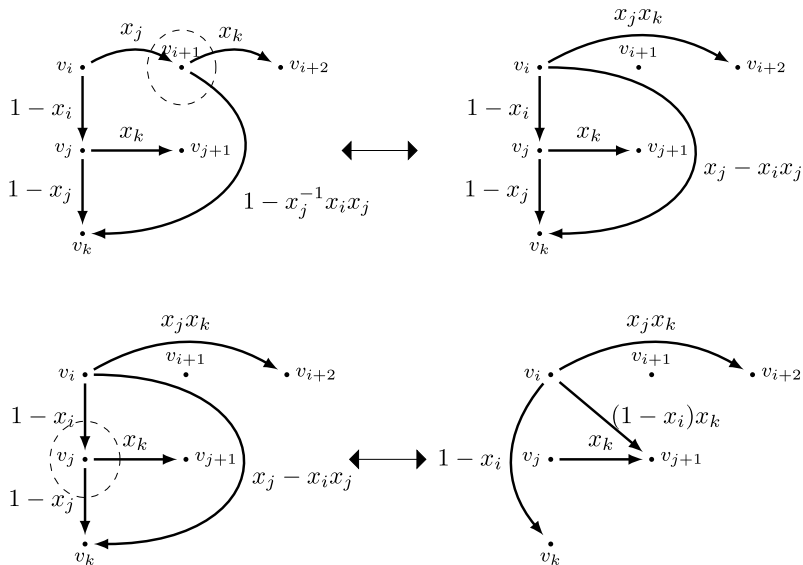
Reidemeister move 3 の前後について調べよう.

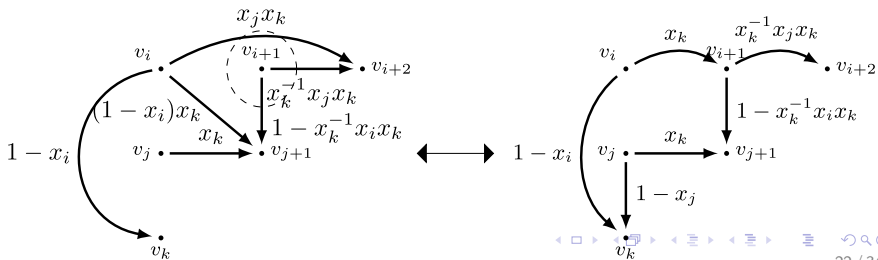
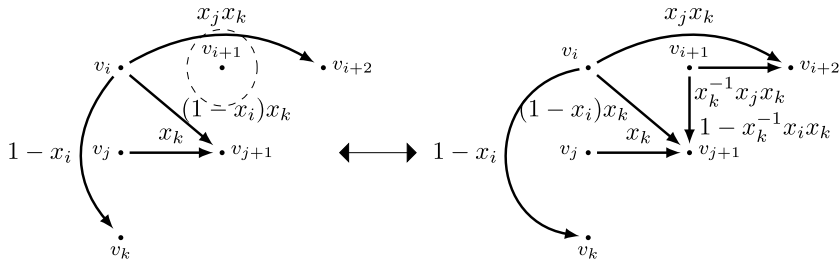
Reidemeister move 3 を用いた  $\Gamma(X, R, B)$  の具体例 2

Reidemeister move 3 の前後に対応するグラフは次の様な形だった:



この二つが基本変形で移り合うことをみよう。





group-weighted graph の基本変形で移り合う

⇒ 表現を乗せた matrix-weighted graph も基本変形で移り合う.

⇒ holonomy は保存する.

⇒ ゼータ関数は一致する.

となり証明が終了する. ■

### Remark

先の列は結び目群の Strongly Tietze 変換の列を作ったことに対応している.

## Question.

Wirtinger 表示から不変量を得るのに本質的に重要な情報は何か？

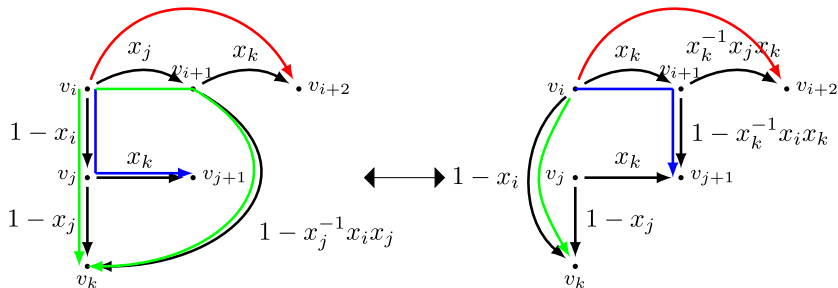


## Question.

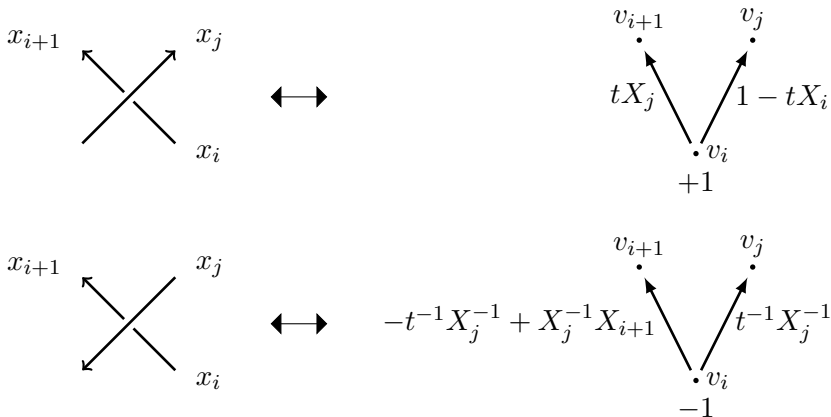
Wirtinger 表示から不変量を得るのに本質的に重要な情報は何か？

## Answer.

次図のそれぞれの色の holonomy が一致していたことが重要だった！



合田氏の定理により、次のような weight で Twisted Alexander 不変量の “分子” を復元できる:



さらに、このように作ったグラフは互いに基本変形で移りあう！

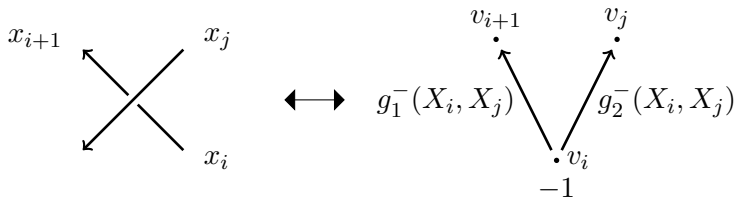
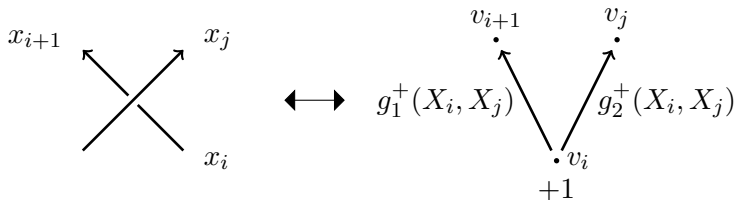
とくに，基本変形の前後のグラフは holonomy を保存していた．  
「Wirtinger 表示に対し不変量を与える」という目標の下，次を考えよう．

### Question.

Reidemeister moves の前後で holonomy を保存する weight はこれしかないのか？

## §5. Weights and Alexander pairs

表現  $\rho : \pi_k \rightarrow GL_k(R)$  と写像  $g_{1,2}^\pm : GL_k(R)^2 \rightarrow M_k(R)$  を用いて weight を定める.



前ページの言葉を使うと先の Question は次の様に言い換えられる.

Question.

$g = (g_1^\pm, g_2^\pm)$  が, Reidemeister moves の前後で holonomy を保つ条件とはなにか?

$g = (g_1^\pm, g_2^\pm)$  を支配するもの 1

## Definition (Ishii-Oshiro)

$Q$  を quandle,  $R$  を (可換とは限らない) 環とし,  
 $f_1, f_2 : Q \times Q \rightarrow R$  が次をみたすとき  $f = (f_1, f_2)$  を Alexander pair という.

- (1) 全ての  $a \in Q$  に対し  $f_1(a, a) + f_2(a, a) = 1$
- (2) 全ての  $a, b \in Q$  に対し  $f_1(a, b)$  は可逆元
- (3) 全ての  $a, b, c \in Q$  に対し次が成り立つ :
  - (ア)  $f_1(a * b, c)f_1(a, b) = f_1(a * c, b * c)f_1(a, c)$
  - (イ)  $f_1(a * b, c)f_2(a, b) = f_2(a * c, b * c)f_1(b, c)$
  - (ウ)  $f_2(a * b, c) = f_1(a * c, b * c)f_2(a, c) + f_2(a * c, b * c)f_2(b, c)$

## $g = (g_1^\pm, g_2^\pm)$ を支配するもの 2

Alexander pair は、次を考えることで自然に出てくる:

Proposition (Andruskiewitsch Nicolás-Matías Grãna)

$Q$  を *quandle*,  $R$  を環とし,  $f = (f_1, f_2)$  を *Alexander pair* とする.  
このとき  $Q \times R$  に

$$(a, x) \star (b, y) := (a * b, f_1(a, b)x + f_2(a, b)y)$$

として *quandle* の構造が入る.

$g = (g_1^\pm, g_2^\pm)$  を支配するもの 3

さらに次が成り立つ.

## Theorem (N.)

$weight\ g$  が, (グラフが self-loop を持たない様な) Reidemster moves の前後に対応するグラフの holonomy を保存することの必要充分条件は Alexander pair  $f = (f_1, f_2)$  を用いて

$$f_1(X_i, X_j) = g_1^-(X_i * X_j, X_j) = g_1^+(X_i, X_j)^{-1}$$

$$f_2(X_i, X_j) = g_2^-(X_i * X_j, X_j) = -f_1(X_i, X_j)g_2^+(X_i, X_j)$$

とかけることである.



## Question.

なぜこのような対応があるのか？どのような解釈ができるか？

## Question.

なぜこのような対応があるのか？どのような解釈ができるか？

## Answer(のうちの一つ)

$Q \times R$  を  $Q$  を底空間,  $R$  を fibre とするような被覆空間と考える.

$$(a, x) \star (b, y) := (a * b, f_1(a, b)x + f_2(a, b)y)$$

を被覆空間上の path だと思えば, 底空間であるグラフの path を持ち上げた時, 被覆空間上で一致する必要充分条件を述べた.

グラフに先の  $f_1, f_2$  を用いて weight を与えたとき，その他の話題として次の様なものがある：

- グラフの change of basis を用いて各 weight を  $h(X_i)wh(X_{i+1})^{-1}$  の形に変化させることで得られる weight の変化は石井氏，大城氏によって定義された cohomologous という概念と一致する.
- $f_2 = 0$  のとき，knot を一周する cycle が一つしかあらわれないことから，

$$\zeta = \det(1 - w(C))^{-1}$$

とかけ， $w(C)$  は 2-cocycle 不変量と関係があり，谷口氏の結果と一致することがわかる.

Thank you for attention!