一葉双曲面上のカンドルと longitudinal map

結び目の数理 IV

米村拳太郎
3MA20009Y@s.kyushu-u.ac.jp

九州大学大学院数理学府

2021 年 12 月 24 日金曜日

目次

目次

講演内容紹介

今講演での話題 1/2

一葉双曲面上に定義されたカンドルの名称に幾何学的形状に関する用語を用いるのは止めた方がよい。

今講演での話題 2/2

[Clark-Saito2018] による結び目の不変量 longitudinal map

$$\mathcal{L}_G^x : \{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) \ : \ f(\mathfrak{m}) = x\} \to G \quad f \mapsto f(\mathfrak{l})$$

の新たな計算例の紹介：次の場合の計算例

$$G = SL(2, \mathbb{R}), \ x = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

講演者の研究目的

目的 1/2

結び目の不変量と結びついた smooth quandle の例の構成

smooth quandle：カンドルにおける Lie 群のようなもの [Ishikawa]

目的 1 の備考

これまでは「球面カンドル」と呼ばれるものしかなかった。

目的 2/2

longitudinal map を線形代数を用いて理解したい。

目的 2 の備考

longitudinal map を定義した Clark-Saito は四元数を用いて Python で計算をしていた。

目次

この節で扱う問題が生まれた経緯

球面カンドルの命名問題

・[Azcan-Fenn1994] は $\mathbb{R}^3$ 上の Euclid 内積を用いて作ったカンドル $S^2_{\mathbb{R}}$ を「球面カンドル」と名付けた。
・一方で、[Clark-Saito2018] は $SU(2)$ の共役類に共役を用いて定めたカンドル $S^2(r)$ を「球面カンドル」と名付けた。ただし、$0 < r < \pi$ である。

[講演者 2021]

以下のカンドルとしての同型により、[Azcan-Fenn1994] の球面カンドルは [Clark-Saito2018] による球面カンドルと整合性がある：

$$S^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cong S^2_{\mathbb{R}}$$

この節で扱う問題の提起

問題提起

[Azcan-Fenn1994] の類似で構成したカンドルと [Clark-Saito2018] の類似で構成したカンドルが、微分同相かつカンドル構造が異なる場合を探せ。

文中の言葉をより正確に記述すると、以下のようになる：

[Azcan-Fenn1994] の類似で構成したカンドル

双線形形式を用いて定まるカンドル

[Clark-Saito] の類似で構成したカンドル

Lie 群の共役類上に共役を用いて構成したカンドル

カンドルの定義

カンドルの定義 [Joyce1982, Matveev1982]

カンドル (quandle) とは空でない集合 X と二項演算 $\triangleright : X \times X \to X$ の組 $(X, \triangleright)$ で次の 1〜3 の条件を満たすものである:

Q1 （冪等性）任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ.

Q2 （逆元）任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する.

Q3 （自己分配性）任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ.

Q1〜Q3 の幾何学的意味

条件 Q1〜Q3 はそれぞれ Reidemeister 移動 I〜III に対応している。

今回の主役

一葉双曲面上のカンドル $S^2_1(r)$

$r > 0$ とする。特殊線形群 $SL(2, \mathbb{R})$ の双曲元

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}$$

の共役類 $S^2_1(r)$ 上に二項演算 $\triangleright : S^2_1(r) \times S^2_1(r) \to S^2_1(r)$ を

$$(g, h) \mapsto h^{-1}gh$$

と定めると $(S^2_1(r), \triangleright)$ はカンドルとなる。

- $S^2_1(r)$ は一葉双曲面となることが知られている。
- カンドル $S^2_1(r)$ は $SL(2, \mathbb{R})$ に関する共役カンドルの部分カンドルである。

比較するカンドル

一葉双曲面上のカンドル $S^2_{1\mathbb{R}}$

双線型形式 $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$\langle (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$$

と定める。一葉双曲面 $S^2_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ 上に二項演算を

$$x \triangleright y = 2\langle x, x \rangle y - x$$

と定めると $(S^2_1, \triangleright)$ はカンドルとなる。これを $S^2_{1\mathbb{R}}$ とかく。

$S^2_{1\mathbb{R}}$ の構成に関する注意

[Azcan-Fenn1994] による球面カンドルの定義の類似である。

一葉双曲面上に構成した 2 つのカンドルの比較

[講演者 2021]

任意の $r > 0$ に対して、$S_1^2(r)$ は $S_{1\mathbb{R}}^2$ とカンドルとして同型でない。

証明: 次の命題を示すことによる：

命題

カンドルの対合性 $^\forall x, y \quad (x \triangleright y) \triangleright y = x$ を $S_{1\mathbb{R}}^2$ は持つが、$S_1^2(r)$ は持たない。

注：2 次元 smooth quandle の分類

K. Ishikawa "On the classification of smooth quandles", preprint.
において 2 次元 smooth quandle（2 次元多様体としての構造を併せ持つカンドル）の分類は既に完了している。

目次

longitudinal map の定義

longitudinal map[Clark-Saito2018]

K：結び目、G：群、$x \in G$ とする。

$$\mathcal{L}_G^x : \{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) \ : \ f(\mathfrak{m}) = x\} \to G \quad f \mapsto f(\mathfrak{l})$$

ただし、$\mathfrak{m}$：メリディアン、$\mathfrak{l}$：ロンジチュード　(取り方によらない)

Clark-Saito による longitudinal map に至る系譜

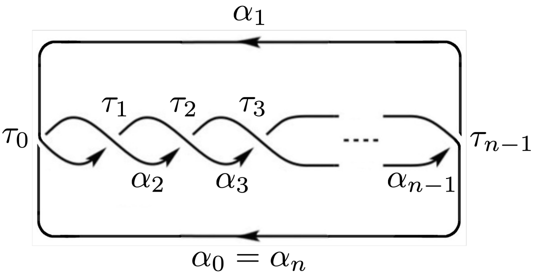
- 1999 年：Carter らがカンドルコサイクル不変量を構成した。
- 2007 年：Eisermann により、カンドルコサイクル不変量の拡張として colouring polynomial が構成される。
- 2018 年：colouring polynomial の拡張として longitudinal map が構成される。

今回の計算例

K を $(2,n)$ トーラス結び目、D を下図、$G = SL(2,\mathbb{R})$、

$$x = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),$$

メリディアン $\mathfrak{m}$ を Wirtinger 表示における α_0 とした場合。



カンドル $S_1^2(r)$ と longitudinal map の関係

[野坂 2015] の結果を用いると次の 2 つの集合が自然に対応する：

- $G = SL(2, \mathbb{R})$, x：双曲元の場合の longitudinal map の定義域
- $S_1^2(r)$ による結び目（の射影図）の彩色の一部

[野坂 2015]：1 対 1 対応の様子

K：結び目、D：K の射影図、$r > 0$
次の 1 対 1 対応を構成することが出来る：

$$\Psi_{K,r} : \mathrm{Col}_{S_1^2(r)}(D) \xrightarrow{\sim} \{ f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) \ : \ f(\mathfrak{m}) \text{ が双曲元} \}.$$

ただし、$\mathfrak{m}$ はメリディアン

$S_1^2(r)$ による彩色を求めれば良い。

$S_1^2(r)$ による $(2,n)$ トーラス結び目の彩色 1/3

メリディアン $\mathfrak{m}$ を Wirtinger 表示における α_0 とした場合を考える。

[野坂 2015] の系：longitudinal map の定義域との 1 対 1 対応

K：結び目、D：K の射影図、$r>0$
1 対 1 対応 $\Psi_{K,r}$ は次の 1 対 1 対応を誘導する：

$$\begin{aligned} &\{C \in \mathrm{Col}_{S_1^2(r)}(D) \mid C(\alpha_0) = x\} \\ \xrightarrow{\sim}\ &\{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G)\ :\ f(\mathfrak{m}) = x\}. \end{aligned}$$

ただし、$\mathfrak{m}$ はメリディアン

$S^2_1(r)$ による $(2,n)$ トーラス結び目の彩色 2/3

longitudinal map の定義域に相当する彩色の決定 [講演者 2021]

K を $(2,n)$ トーラス結び目、D をその射影図とする。

$$\{C \in \mathrm{Col}_{S^2_1(r)}(D) \mid C(\alpha_0) = x\}$$
$$= \quad \{C_0\} \cup \left\{ C_{j,b,c} \ : \ \begin{matrix} j = 1, 3, \cdots, n-2 \\ bc = -\frac{4\sin^2\theta_j(\sin^2\theta_j + \sinh^2 r)}{\sinh^2 r} \end{matrix} \right\}$$

ただし、$\theta_j = \frac{\pi j}{2n}$、$C_0$ は像が $\{x\}$ の定値写像、$C_{j,b,c}$ は

$$C_{j,b,c}(\alpha_0) = x, \quad C_{j,b,c}(\alpha_1) = \begin{pmatrix} \frac{-e^{-r}\cosh r + \cos 2\theta_j}{\sinh r} & b \\ c & \frac{e^r \cosh r - \cos 2\theta_j}{\sinh r} \end{pmatrix}$$

として定まる彩色。(K が 2 本橋結び目であることに注意。)

$S_1^2(r)$ による $(2,n)$ トーラス結び目の彩色 3/3

彩色の決定過程

- $C(\alpha_0)=x$ と $C(\alpha_1)$ で彩色が決定されることに気づく。
- $C(\alpha_0)$ と $C(\alpha_1)$ を用いて彩色が定まる条件を書く。
$(C(\alpha_0)C(\alpha_1))^kC(\alpha_0)=C(\alpha_0)(C(\alpha_0)C(\alpha_1))^k.$
- 行列の対角化と対角行列の冪乗を用いて条件を満たす
$C(\alpha_1)\in SL(2,\mathbb{R})$ を決定する。

条件に三角関数が出てくる要因

$C(\alpha_0)C(\alpha_1)\in SL(2,\mathbb{R})$ の固有値を $j=1,3,\cdots,n$ を用いて

$$\exp\frac{\pi j\sqrt{-1}}{n}\in\mathbb{C}$$

と書けることが分かったため。

longitudinal map の決定

[講演者 2021]

$G = SL(2,\mathbb{R})$, $x = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}$, K：$(2,n)$ トーラス結び目

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^x_{SL(2,\mathbb{R})}\left(\Psi_{K,r}(C_0)\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}^x_{SL(2,\mathbb{R})}\left(\Psi_{K,r}(C_{j,b,c})\right) &= \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

計算の決め手

- Clark-Saito より、$\mathcal{L}(C) = C(\alpha_0)^{-2n}(C(\alpha_0)C(\alpha_1))^n$
- n 乗する項に単位行列が現れた。

目次

まとめ

この講演のまとめ

- 構成が異なると異なるカンドルが生まれる。
- longitudinal map を線形代数の恩恵を受けて計算することが出来た。

将来の課題

- $S^2_{1\,\mathbb{R}}$ に関係した longitudinal map は？
- 曲面結び目に対して longitudinal map のような、カンドルコサイクル不変量の拡張はないか？

まとめ

この講演のまとめ

- 構成が異なると異なるカンドルが生まれる。
- longitudinal map を線形代数の恩恵を受けて計算することが出来た。

将来の課題

- $S^2_{1\,\mathbb{R}}$ に関係した longitudinal map は？
- 曲面結び目に対して longitudinal map のような、カンドルコサイクル不変量の拡張はないか？

ご清聴ありがとうございました。