有向絡み目の dual graph diagram

新井 克典

大阪大学 M1

研究集会「結び目の数理 IV」
December 25, 2021

Contents

1 準備

2 dual graph diagram

3 主結果

Contents

1. 準備
2. dual graph diagram
3. 主結果

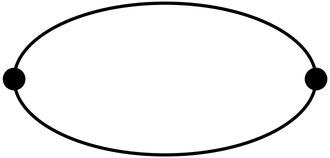
Graph

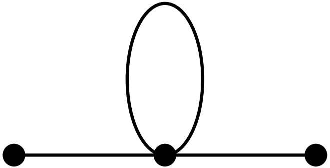
Definition

G : graph.
$\Leftrightarrow$ 頂点の集合 $V(G)$ と頂点を結ぶ辺の集合 $E(G)$ の組.

Remark

本講演では, graph は常に有限で, 多重辺やループを許すものとする.
S^2 に埋め込まれた graph を単に S^2 上の graph と呼ぶことにする.





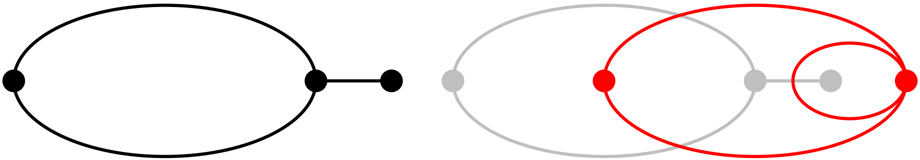
Dual graph

G : S^2 上の graph.
G の領域 $\Leftrightarrow$ $S^2 - |G|$ の連結成分.

Definition

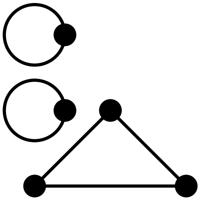
G^d : G の dual graph.
$\Leftrightarrow$ 次の方法で構成される S^2 上の graph:

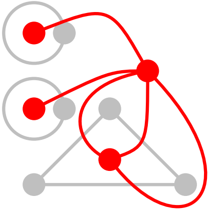
1. G の各領域から 1 点を取り, G^d の頂点とする.
2. 任意の $e \in E(G)$ に対し, e の両側にある G の領域に対応する G^d の頂点を, e の端点以外と 1 点で交わるように結ぶ曲線を G^d の辺とする.

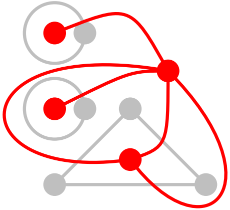


Remark

Dual graph は一意的に定まるとは限らない.

$G =$ 

$G^d =$ 

$G^{d'} =$ 

Remark

Dual graph は常に連結である.

Checkerboard 彩色

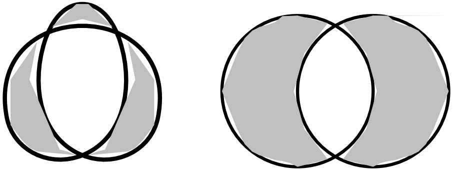
U : S^2 上の link universe $\Leftrightarrow$ S^2 の link diagram から交差の情報を除いたもの.
U の領域 $\Leftrightarrow$ $S^2 - U$ の連結成分.

Definition

U の checkerboard 彩色 $\Leftrightarrow$ U の各領域を白黒で塗る彩色で, 隣接領域を異なる色で塗るもの.

Fact

S^2 上の任意の link universe は checkerboard 彩色可能である.



Checkerboard graph

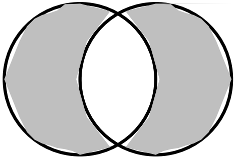
Definition

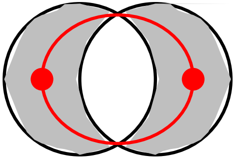
U : S^2 上の link universe で, checkerboard 彩色されたもの.
G_b (resp. G_w) : U の checkerboard graph.
$\Leftrightarrow$ 次の方法により構成される S^2 上の graph:

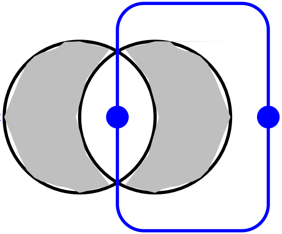
1. 各黒色 (resp. 白色) 領域から 1 点をとり, G_b (resp. G_w) の頂点とする.
2. U の各交点において, 向かい合う黒色 (resp. 白色) 領域を結び, G_b (resp. G_w) の辺とする.

$\{G_b,\ G_w\}$ を checkerboard graph pair と呼ぶことにする.

Example

$U =$ 

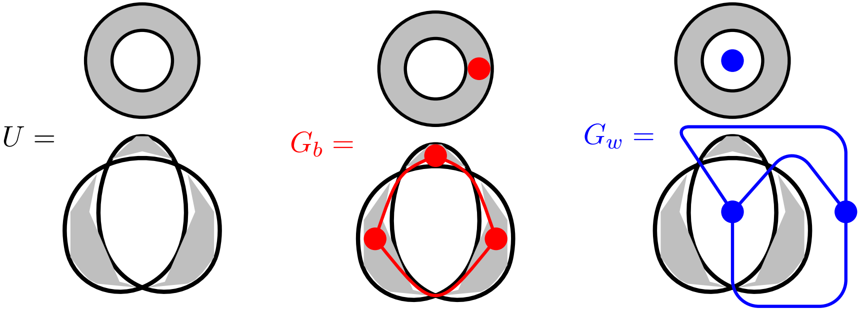
$G_b =$ 

$G_w =$ 

Remark

Remark

一般に G_b と G_w は互いに dual でない.

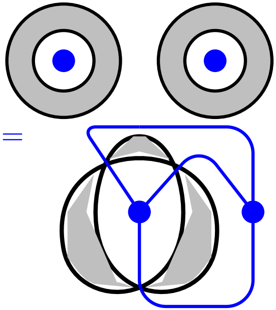


Remark

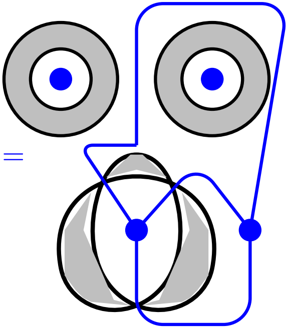
Remark

一般に checkerboard graph は一意的に定まるとは限らない.

$G_w =$



$G_w{}' =$



Checkerboard graph が互いに dual になる条件

Proposition (known)

U : S^2 上の link universe で checkerboard 彩色されたもの.
$\{G_b, G_w\}$: U の checkerboard graph pair.
U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つ $\Rightarrow$ G_b と G_w は互いに dual.

Corollary

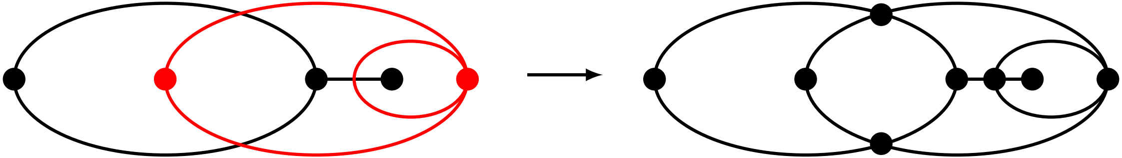
U : S^2 上の link universe で checkerboard 彩色されたもの.
$\{G_b, G_w\}$: U の checkerboard graph pair.
G_b と G_w がともに連結かつ孤立頂点を持たない $\Rightarrow$ G_b と G_w は互いに dual.

Remark

G_b と G_w がともに連結かつ孤立頂点を持たない $\Rightarrow$ U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つ.

$G \cup G^d$ の領域

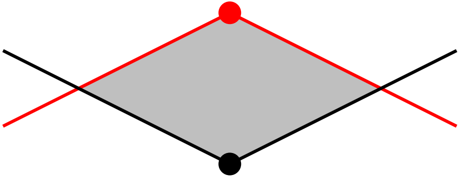
G : S^2 上の graph.
G^d : G の dual graph.
$G \cup G^d$ から得られる S^2 上の graph $\Leftrightarrow$ $G \cup G^d$ の edge crossing も頂点とする S^2 上の graph.

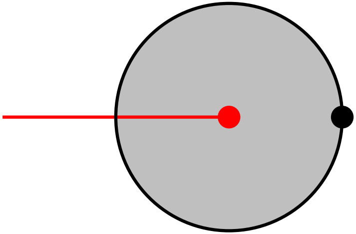


$G \cup G^d$ の領域 $\Leftrightarrow$ $G \cup G^d$ から得られる S^2 上の graph の領域.

$G \cup G^d$ の 4 辺形領域

$G \cup G^d$ の 4 辺形領域は次の場合に限られる.





$\{G,\ G^d\}$ が checkerboard graph pair になる条件

Lemma

G : S^2 上の graph.
G^d : G の dual graph.
G は連結かつ孤立頂点を持たない $\Rightarrow$ $G \cup G^d$ の各領域が 4 辺形である.

Proposition

G : S^2 上の graph.
G^d : G の dual graph.
G が連結かつ孤立頂点を持たない $\Rightarrow$ ある link universe U が存在して, $\{G,\ G^d\}$ は U の checkerboard graph pair になる.

Contents

1 準備

2 dual graph diagram

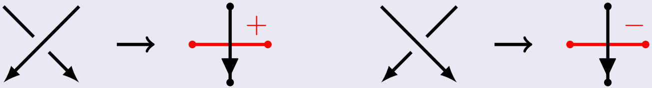
3 主結果

Dual graph diagram

Definition (Needell, Nelson, 2017)

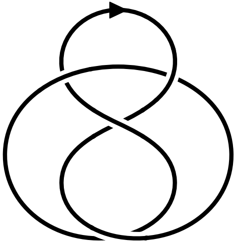
D : S^2 上の oriented link diagram.
$\{G_b,\ G_w\}$: D の checkerboard graph pair.
$(G_b \cup G_w,\ f)$: D の dual graph diagram.
$\Leftrightarrow$ $G_b,\ G_w$ の和 $G_b \cup G_w$ と次を満たす写像
$f : E(G_b) \cup E(G_w) \to \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G_b)) \cup \mathcal{O}(E(G_w))$ の組:

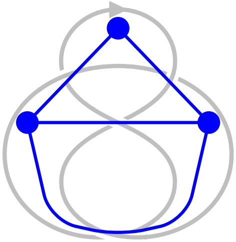
- f は D の各交差において,

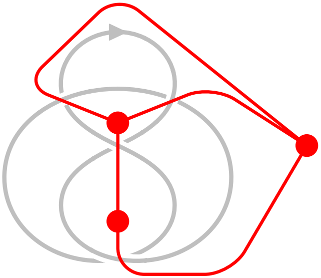


を満たす.
但し, $\mathcal{O}(E(G_b)),\ \mathcal{O}(E(G_w))$ は $G_b,\ G_w$ の辺の向きの集合.

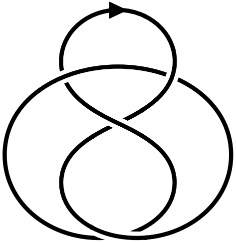
Example

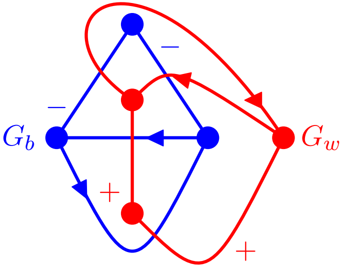
$D =$ 

$G_b =$ 

$G_w =$ 

Example

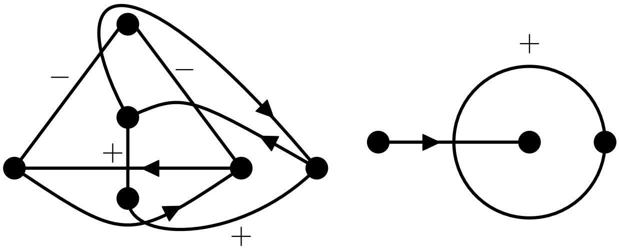
$D =$ 



(一般の) connected dual graph diagram

Definition

$(G \cup G^d,\ f)$: (一般の) connected dual graph diagram.
$\Leftrightarrow$ S^2 上の連結かつ孤立頂点を持たない graph G とその dual graph G^d の和 $G \cup G^d$ と次を満たす写像 $f : E(G) \cup E(G^d) \to \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G)) \cup \mathcal{O}(E(G^d))$ の組:
$e \in E(G),\ e' \in E(G^d)$ が $e \cap e' \neq \varnothing \Rightarrow (f(e), f(e')) \in \{\pm\} \times \mathcal{O}(E(G^d)) \cup \mathcal{O}(E(G)) \times \{\pm\}$

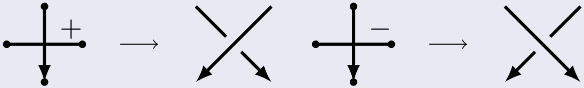


Proposition (cf. Needell, Nelson, 2017)

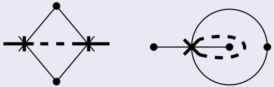
$(G \cup G^d,\ f)$: （一般の）connected dual graph diagram

$(G \cup G^d,\ f)$ は次の方法により, node 付き有向絡み目図式 ( ) を表す.

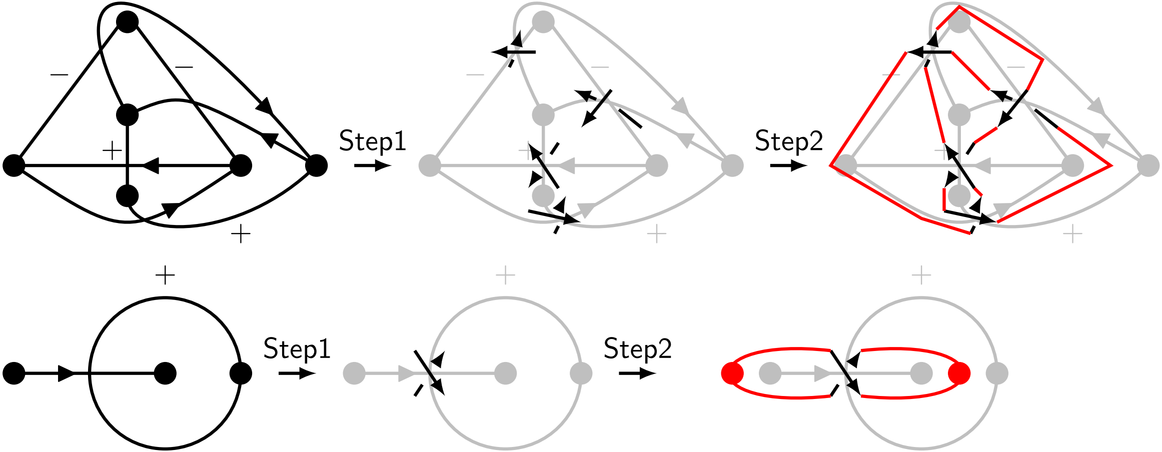
(Step1) $(G \cup G^d,\ f)$ の各 edge crossing 毎に, 局所的に交差を対応させる.



(Step2) 各領域内にある交差の端点を結ぶ.



Example



Contents

1. 準備
2. dual graph diagram
3. 主結果

主結果

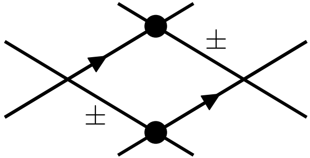
Question

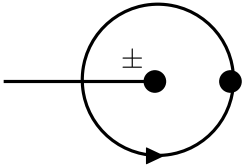
$(G \cup G^d,\ f)$:（一般の）connected dual graph diagram.
$(G \cup G^d,\ f)$ が oriented link diagram を表すための必要十分条件は何か.

Theorem 1 (A.)

$(G \cup G^d,\ f)$:（一般の）connected dual graph diagram. このとき, 次は同値である:

1. $(G \cup G^d,\ f)$ が oriented link diagram を表す
2. 各 4 辺形において, 各頂点の入次数の和と出次数の和が等しくなる.





主結果

Theorem 1 (再掲)

$(G \cup G^d,\ f)$: （一般の）connected dual graph diagram. このとき, 次は同値である:

1. $(G \cup G^d,\ f)$ が oriented link diagram を表す
2. 各 4 辺形において, 各頂点の入次数の和と出次数の和が等しくなる.

Theorem 2 (A.)

$\Big\{$（一般の）connected dual graph diagram $(G \cup G^d,\ f) |\ G$ は Theorem1 の条件 2 を満たす$\Big\}$

$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {oriented link diagram $D |\ D$: 連結, $c(D) \geq 1\}$

ご清聴ありがとうございました.