balanced spatial graph の Υ 不変量

久保田　肇

京都大学大学院理学研究科　修士 2 年

December 25，2021

目次

balanced spatial graph

graph：1 次元 CW 複体で，各辺が向き付けられているもの．
transverse spatial graph：PL なグラフの埋め込み $f\colon G \to S^3$ の像 up to isotopy で，各頂点 v において，v から出る辺と入る辺とを分けるような小さいディスクがとれるもの．

定義

balanced spatial graph：transverse spatial graph かつ各頂点において出る辺と入る辺の数が等しいもの．

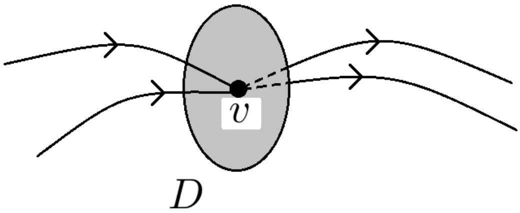


Figure: balanced spatial graph の頂点で辺を分けるディスク

grid diagram

定義

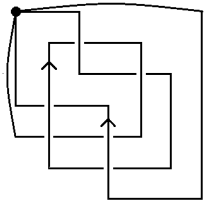
grid diagram g とは $n \times n$ のマス目内に n 個の O または $O*$ マークと n 個以上の X マークを，次を満たすように配置したものをいう；

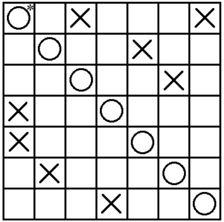
- 各行および列には O マークが 1 つずつ配置されている．
- 同じマス目内に O マークと X マークの両方が配置されていない．
- 同じ行（または列）に複数の X マークが存在するとき，その行（列）に存在する O マークは O^* マークである．

$\mathbb{O} = \{O_i\}_{i=1}^{n}$：$O$ マークの集合.$\mathbb{X} = \{X_i\}_{i=1}^{m}$：$X$ マークの集合．
m_i：O_i と同じ行にある X マークの個数

grid diagram

grid diagram g から transverse spatial graph の diagram が得られる．





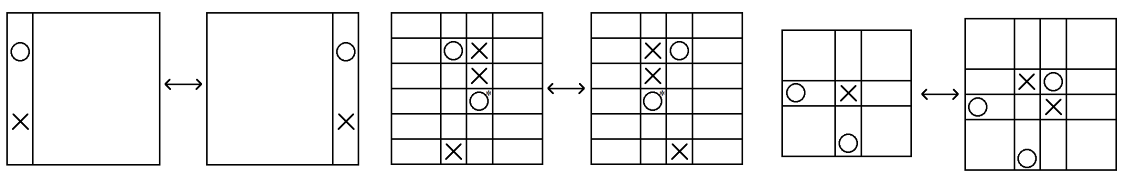
定理（Harvey,O'Donnol,2017）

任意の transverse spatial graph に対し，それを表す grid diagram g が存在する．

grid move

定義

次の 3 つの操作 cyclic permutation，commutation，(de-)stabilization をまとめて grid move という．



定理（Harvey,O'Donnol）

g, g' を，同じ transverse spatial graph を表す 2 つの grid diagram とするとき，これらは grid move の有限回の列で互いに移りあう．

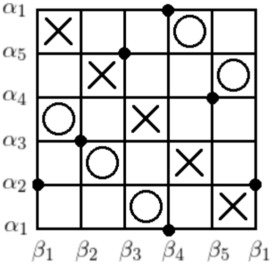
state

grid diagram g を自然にトーラス状の図と見なしたものを **toroidal diagram** という.
g の各マスの境界となっている，垂直方向と水平方向の直線の集合をそれぞれ
$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}, \boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}_{i=1}^{n}$ とする.

定義

g の state とは，$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の間の全単射のこと. g 上では n 個の点で表す.

$\mathbf{S}(g)$: g の state からなる集合，$|\mathbf{S}(g)| = n!$



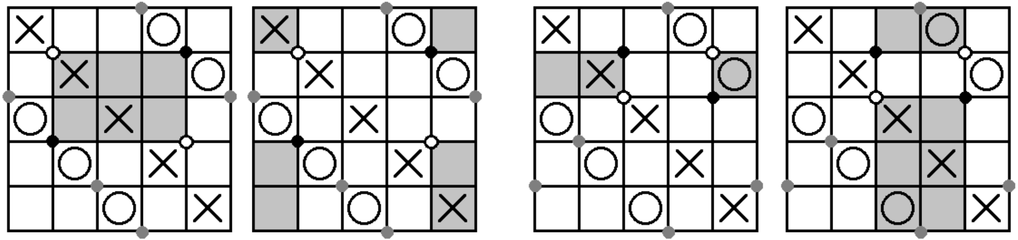
state をつなぐ長方形

定義

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(\mathrm{g})$ を $n-2$ 点が等しい state とする．$(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}) \setminus (\mathbf{x} \cap \mathbf{y})$ の 4 点を頂点とする g に埋め込まれたディスク r で，∂r が $\{\alpha_i\}_i^n, \{\beta_i\}_i^n$ の一部であるものを考える．r が $\mathbf{x}$ から $\mathbf{y}$ へ向かう長方形であるとは，

$$\partial(\partial_\alpha r) = \mathbf{y} - \mathbf{x},\ \partial(\partial_\beta r) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

を満たすときをいう．ただし $\partial_\alpha r = \partial r \cap (\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n)$, $\partial_\beta r = \partial r \cap (\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_n)$



Maslov grade,Alexander grade

定義

各 $\mathbf{x} \in \mathbf{S}(g)$ に対し，整数値関数 Maslov function $M(\mathbf{x})$,Alexander function $A(\mathbf{x})$ を次で定義する；

$$M(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbb{O}, \mathbf{x} - \mathbb{O}) + 1$$

$$A(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbb{X} - \sum_i m_i O_i)$$

ただし $\mathcal{J}(P, Q)$ は grid diagram 上である条件を満たす組 (p, q) $(p \in P, q \in Q)$ を数える関数.

補題

(i) $\mathbf{x}_0$ を g の各 O マークのすぐ左下の点のみからなる state とすると，$M(\mathbf{x}_0) = 0$
(ii) 2 つの state $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)$ とそれらをつなぐ長方形 r が存在するとき，次が成り立つ；

$$M(\mathbf{x}) - M(\mathbf{y}) = 1 - 2|\mathbb{O} \cap r| + 2|\mathbf{x} \cap \mathrm{Int}(r)|$$

$$A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y}) = |\mathbb{X} \cap r| - \sum_{O_i \in \mathbb{O} \cap r} m_i$$

Grid Homology

$\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

定義

$CF^-(g)$ を $\mathbf{S}(g)$ が生成する自由 $\mathbb{F}[V_1, \dots V_n]$ 加群，境界準同型を各 $\mathbf{x} \in \mathbf{S}(g)$ に対し，

$$\partial(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)} \sum_{r \in \mathrm{Rect}(\mathbf{x},\mathbf{y})} V_1^{O_1(r)} \cdots V_n^{O_n(r)} \cdot \mathbf{y}$$

ただし各 i に対し $O_i(r)$ は，r が O_i を内部に含むとき 1，そうでないとき 0 とする．
さらに，$M(V_i\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - 2, A(V_i\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) - m_i$ とすることで，$CF^-(g)$ は 2 重次数つき加群となる．

- $(CF^-(g), \partial)$ は Maslov graded,Alexander filtered 鎖複体となる．

$CF^-(g)$ の Alexander filtration を $\{\mathcal{F}_m^-(g)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ と書く．

Grid Homology

$O_1,\ldots,O_k$ が $O*$ マークであるとし，$V_1,\ldots,V_k$ が対応しているとする．

定義

$\widehat{CF}(g) := \frac{CF^-(g)}{V_1=\cdots=V_k=0}$ とし，∂ が導く写像を $\hat{\partial}$ とする．$(\widehat{CF}(g),\hat{\partial})$ は $\mathbb{F}$ ベクトル空間上の Maslov graded,Alexander filtered 鎖複体となる．

$CF^-(g)$, $\widehat{CF}(g)$ の associated graded object のホモロジー群をそれぞれ $HF^-(g)$, $\widehat{HF}(g)$ とかく．
$\widehat{HF}_{d,s}(g)=\{[\alpha]\in\widehat{HF}(g)|M(\alpha)=d,A(\alpha)=d\}$ とし，$\widehat{HF}(g)\bigoplus_{d,s\in\mathbb{Z}}\widehat{HF}_{d,s}(g)$ と書く．

定理 (Ozsvath,et al)

balanced spatial graph f が結び目を表すとき，$CF^-(g)$ は本来の grid complex と一致する．また，$\widehat{HF}(g)$ の次数つきオイラー標数はアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ と一致する．

$$\sum_{d,s\in\mathbb{Z}}(-1)^d t^s\cdot\dim_{\mathbb{F}}\widehat{HF}(g)_{d,s}=\Delta_K(t)$$

symmetrized Alexander filtration

Maslov grade は絶対的な基準となる state $\mathbf{x}_0$ があるが，Alexander grade はそうでない．ホモロジー群 $HF^-(g)$ を bigraded 加群としての不変量にするために，Alexander grade を修正する必要がある．

定義

g の **symmetrized Alexander filtration** $\{\widehat{\mathcal{F}}^H_m\}_{m\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ とは，$M(g)=-m(g)$ となるように各 $\mathbf{x}\in\mathbf{S}(g)$ の Alexander grade の値を平行移動して固定し直しすことで得られる Alexander filtration のことをいう．ただし，

$$M(g):=\max\left\{s|\widehat{HF}_{d,s}(g)\neq 0\right\},m(g):=\min\left\{s|\widehat{HF}_{d,s}(g)\neq 0\right\}$$

である．

symmetrized Alexander filtration によって Alexander grade を取り直した鎖複体を $CF^{-H}(g),\widehat{CF}^H(g)$，そのホモロジー群を $HF^{-H}(g),\widehat{HF}^H(g)$ などと書く．

Grid Homology の不変性

定理（Vance,2020）

g, g' が同じ balanced spatial graph を表すとき，

$$HF^{-H}(g) \cong HF^{-H}(g')$$
$$\widehat{HF}^{H}(g) \cong \widehat{HF}^{H}(g')$$

ただし前者は Maslov graded,Alexander graded $\mathbb{F}[V_1, \ldots, V_k]$ 加群として，後者は Maslov graded,Alexander graded $\mathbb{F}$ ベクトル空間として同型．

証明の概要）grid move1 回で移りあう g, g' に対し擬同型写像 $f\colon CF^{-}(g) \to CF^{-}(g')$ で，
Maslov graded を保ち，Alexander filtration に関して $f(\mathcal{F}^{-}_{m}(g)) \subset \mathcal{F}^{-}_{m+s}(g')$ を満たすものが存在する．
（ただし s は g, g' から定まるある整数）
この f は $\widehat{CF}(g)$ と $\widehat{CF}(g')$ の間の擬同型写像を導く．
g, g' でそれぞれ symmetrized Alexander filtration を取り直すと $M(g) - m(g) = M(g') - m(g')$ となるから，f は $CF^{-H}(g)$ や $\widehat{CF}^{H}(g)$ の Alexander filtration を保つ擬同型写像となる．

t-modified chain complex $tCF^-(g)$

$t \in [0,2] \cap \mathbb{Q}$ を固定し，$t = \frac{m}{n}$ と表し $\mathcal{R}_t = \mathbb{F}[U^{\frac{1}{n}}]$ とする．

定義

$tCF^-(g)$ を，$\mathbf{S}(g)$ が生成する自由 $\mathcal{R}_t$ 加群で境界準同型 ∂_t を

$$\partial_t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{S}(g)} \sum_{r\in\mathrm{Rect}(\mathbf{x},\mathbf{y})} U^{t|\mathbb{X}\cap r|+2|\mathbb{O}\cap r|-t(\sum_{O_i\in\mathbb{O}\cap r} m_i)} \cdot \mathbf{y}$$

また t-grade gr_t を $\mathrm{gr}_t(U^\alpha \mathbf{x}) = M(\mathbf{x}) - tA(\mathbf{x}) - \alpha$ とすると，$tCF^-(g)$ は t-graded 鎖複体となる．

$tCF^-(g)$ のホモロジー群を $tHF^-(g) = \bigoplus_d tHF^-_d(g)$ とする．
symmetrized Alexander filtration を取り直したホモロジー群を $tHF^{-H}(g)$ と書く．

t-modified chain complex $tCF^{-}(g)$

W_t：2 次元 graded ベクトル空間 $W_t \cong \mathbb{F}_0 \oplus \mathbb{F}_{-1+t}$
$X[a]$ で grade の shift $X[a]_d = X_{d+a}$ を表す；$X \otimes W_t \cong X \oplus X[1-t]$

主定理

balanced spatial graph $f\colon G \to S^3$ を表す 2 つの graph grid diagram g, g' の grid number をそれぞれ n, m $(n > m)$ とするとき，graded $\mathcal{R}_t$-加群として

$$tHF^{-H}(g) \cong tHF^{-H}(g') \otimes W_t^{\otimes(n-m)}$$

証明の方針）
(i) $g \xrightarrow{cyc} g'$ または $g \xrightarrow{com} g'$ のとき，$tCF^{-s}(g)$ と $tCF^{-s}(g')$ が擬同型であり，
(ii) $g \xrightarrow{sta} g'$ のとき，$tCF^{-s}(g')$ と $tCF^{-s}(g) \otimes W_t$ が擬同型であることを示せばよい．
1. symmetrized 前の $tCF^{-}(g)$ と $tCF^{-}(g')$ の間で t-grade が $t\times$(整数) だけずれる擬同型写像を構成する．
2. g, g' を symmetrized したときに，構成した擬同型写像が t-grade を保つようになることを確かめる．

balanced spatial graph の Υ 不変量

定義

g に対し $t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ に対し

$$\Upsilon_g(t) := \max\{\mathrm{gr}_t(x) | x \in tHF^{-H}(g), x \colon \mathrm{homogeneous}, \mathrm{non}-\mathrm{torsion}\}$$

とし，$t \in [1,2] \cap \mathbb{Q}$ に対し $\Upsilon_g(t) = \Upsilon_g(2-t)$ と定める．

定理

$\Upsilon_g(t)$ は balanced spatial graph f を表す g の取り方によらない不変量である．$\Upsilon_f(g)$ と書く．

$g \xrightarrow{sta} g'$ のとき，$tCF^{-H}(g') \cong tCF^{-H}(g) \oplus tCF^{-H}(g)[1-t]$ だが，$t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ならば $tCF^{-H}(g)[1-t]$ の影響は無視できる．

Υ 不変量の特徴，今後の展望

- $\Upsilon_f(t)$ は結び目の Grid Homology で作られた $\Upsilon_K^{Grid}(t)$(Földvári,2021) の拡張となっている．
  $\Upsilon_K^{Grid}(t)$ は Knot Floer Homology の理論で作られた Υ 不変量 (Ozsváth et al,2017) と等しいかは分かっていない．
- balanced spatial graph に対しコンコーダンスの概念をどう拡張するか．
- f がどのような条件なら $\Upsilon_f(t) \equiv 0$ となるか．