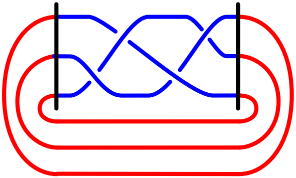
曲面絡み目の plat 表示を用いた結び目群の計算

安田順平

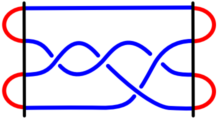
大阪大学大学院 理学研究科

結び目の数理 IV
12 月 26 日

絡み目の plat 表示



ブレイドの閉包.



ブレイドの plat 閉包

曲面絡み目

Definition

F: **曲面絡み目** $:\Longleftrightarrow$ F は $\mathbb{R}^4$ 内に埋め込まれた閉曲面
F: **曲面結び目** $:\Longleftrightarrow$ F は連結な曲面絡み目

Definition

F, F': 曲面絡み目
$F \sim F'$: **同値**である $:\Longleftrightarrow$ F と F' は $\mathbb{R}^4$ 内で ambient isotopic である.

ブレイド状曲面と2次元ブレイド

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$: 2次元円板.　$y_0 \in \partial D_2$: D_2 の基点.
$\mathrm{pr}_i : D_1 \times D_2 \to D_i$ $(i = 1, 2)$: 第 i 成分の射影.
$n \in \mathbb{Z}_{>0}$: 正整数,　Q_n: D_1 内の n 点集合.

Definition (Rudolph, 1983; Viro, 1990)

$S \subset D_1 \times D_2$: n 次の**ブレイド状曲面** $:\Longleftrightarrow$ S は次を満たす.

1. $\pi := \mathrm{pr}_2|_S : S \to D_2$: n 次の単純分岐被覆写像,
2. $\partial S \subset D_1 \times \partial D_2$: 閉ブレイド,
3. $\mathrm{pr}_1(\pi^{-1}(y_0)) = Q_n$.

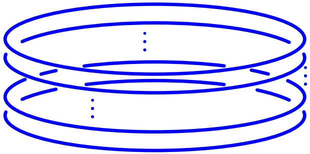
特に $\partial S = Q_n \times \partial D_2$ であるとき, S を2**次元ブレイド** という.

Remark

ブレイド状曲面が自明である $\Leftrightarrow$ ブレイド状曲面は分岐点を持たない.

曲面絡み目の plat 表示

S: 次数 $2m$ の 2 次元ブレイド
$\rightarrow \partial S = Q_{2m} \times \partial D_2$
$A \subset \mathbb{R}^4$: m 本のアニュラスの非交和
$\widetilde{S} := S \cup A$: 曲面絡み目.



Definition

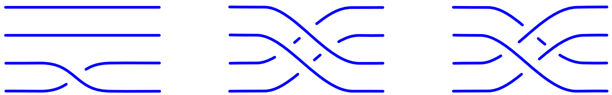
2 次元ブレイド S の **plat 閉包**を $\widetilde{S}$ として定める.

Theorem (Y., 2021)

全ての向き付け可能な曲面絡み目はある 2 次元ブレイドの *plat* 閉包と同値である.

曲面絡み目の plat 表示

2 次元ブレイドの plat 閉包をブレイド状曲面へ拡張する．
$K_{2m} := \left\langle \sigma_1,\ \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2,\ \sigma_{2i}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i+1}^{-1}\sigma_{2i}^{-1}\ (i = 1, 2, \ldots, m-1) \right\rangle \subset B_{2m}$
: **Hilden 部分群.**



S : 次数 $2m$ のブレイド状曲面.
β_S : 境界 ∂S を基点で切り開いて得られるブレイド

Definition

ブレイド状曲面 S が**適切 (adequate)** $:\Longleftrightarrow \beta_S \in K_{2m}$.

曲面絡み目の plat 表示

$A \subset \mathbb{R}^4$: アニュラスと Möbius の帯の非交和 (**wicket 型**の曲面)
$\to \widetilde{S} := S \cup A$: 曲面絡み目.

Definition

適切なブレイド状曲面 S の **plat 閉包**を $\widetilde{S}$ として定める.

Theorem (Y., 2021)

全ての曲面絡み目はあるブレイド状曲面の *plat* 閉包と同値である.

曲面絡み目群の表示

F: 曲面絡み目，　$G(F) = \pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$: F の結び目群
S: 次数 n のブレイド状曲面，　$G(S) := \pi_1(D_1 \times D_2 \setminus S)$: S の結び目群
$x_1, \dots, x_n$: $D_1 \times \{y_0\} \setminus S = D_1 \setminus Q_n$ のメリディアンループ

Proposition (cf. Kamada, 2002)

ブレイド状曲面 S の結び目群は次の群表示を持つ．

$$G(S) = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, r_1, \dots, r_k \rangle .$$

Theorem (Y.)

次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，曲面絡み目 $\widetilde{S}$ の結び目群は次の群表示を持つ．

$$G(\widetilde{S}) = \left\langle x_1, \dots, x_{2m} \,|\, r_1, \dots, r_k,\ x_{2i-1} = x_{2i}^{-1}\ (i = 1, \dots, m) \right\rangle .$$

カンドルと対称カンドル

Definition (Joyce, Matveev, 1982)

X: (空でない) 集合,　$* : X \times X \to X$

$X = (X, *)$: **カンドル** $:\Longleftrightarrow$ 次を満たす.

1. ${}^{\forall} x \in X,\ x * x = x,$
2. ${}^{\forall} x, y \in X, {}^{\exists !} z \in X$ s.t. $x * z = y,$
3. ${}^{\forall} x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z).$

Definition (Kamada, 2006)

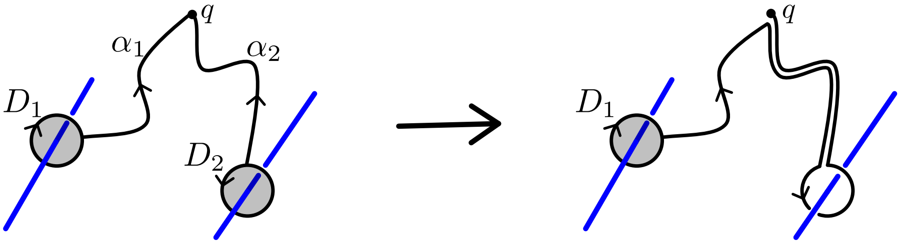
X: カンドル,　$\rho : X \to X$: 対合写像 ($\rho \circ \rho = \mathrm{id}_X$)

(X, ρ): **対称カンドル** $:\Longleftrightarrow$ 次を満たす.

1. ${}^{\forall} x, y \in X\ \rho(x * y) = \rho(x) * y,$
2. ${}^{\forall} x, y \in X\ x * \rho(y) = x \bar{*} y.$

結び目対称カンドル

$F \subset \mathbb{R}^4$: 曲面絡み目,　$q \in \mathbb{R}^4 \setminus F$: 基点.
$X(F) :=$
$\{(D, \alpha) \mid D$: F のメリディアン円板, α: ∂D から q への path$\}$/homotopy.
$[(D_1, \alpha_1)] * [(D_2, \alpha_2)] = [(D_1, \alpha_1 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \partial D_2 \alpha_2)]$.
すると $X(F) := (X(F), *)$ はカンドルになる.
$\rho : X(F) \to X(F); \rho([(D, \alpha)]) := [(-D, \alpha)]$: 対合写像.
$X(F) := (X(F), \rho)$: 曲面絡み目 F の**結び目対称カンドル**



主定理

Theorem (Y.)

次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，曲面絡み目 $\widetilde{S}$ の結び目対称カンドルは次の対称カンドル表示を持つ．

$$G(\widetilde{S}) \; = \; \langle x_1, \ldots, x_{2m} \,|\, r_1, \ldots, r_k,\; x_{2i-1} = \rho(x_{2i})\ (i = 1, \ldots, m) \rangle_{\mathrm{sq}} \, .$$