

Symmetries of spatial graphs and Simon invariants

谷山 公規 (早稲田大学教育学部)
(新國 亮 氏 (金沢大学教育学部) との共同研究)

§1. 研究の動機

3次元球面内の2成分絡み目 L は、その鏡像に無向絡み目としてアンビエント・アイソトピックであるときアキラルであると呼ばれます。Kirk-Livingston は [2] において、 L がアキラルならば L の絡み数は 4 を法として 2 と合同ではないことを示しました。一方、空間グラフのホモロジー分類においては、2成分絡み目の絡み数、及び空間 5 頂点完全グラフと空間 $3+3$ 頂点完全 2 部グラフの Simon 不変量が基本的な役割を果たすことが知られています。金沢大学の新國亮氏は [5] において空間 5 頂点完全グラフと空間 $3+3$ 頂点完全 2 部グラフのアキラル性と Simon 不変量の間に関する研究を始められました。縁あって筆者もその研究に加わることが出来まして今回、2成分絡み目、空間 5 頂点完全グラフ、空間 $3+3$ 頂点完全 2 部グラフのそれぞれの、アキラル性を含む各種対称性について、それらがその対称性を持つときの絡み数や Simon 不変量を取り得る値の範囲を完全に決定することが出来ましたのでご報告致します。尚、本研究について詳しくは [6] に発表する予定です。

§2. 2成分絡み目のアキラル性と絡み数

$L = J \cup K$ を 3次元球面 S^3 内の 2成分の有向絡み目とします。 S^3 の向きを逆転する自己同相写像 $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ で $\varphi(J) = J$, $\varphi(K) = K$ をともに満たすものが存在するとき L は CPA (component preserving achiral) と呼ばれます。また S^3 の向きを逆転する自己同相写像 $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ で $\varphi(J) = K$, $\varphi(K) = J$ をともに満たすものが存在するとき L は CSA (component switching achiral) と呼ばれます。ここで J や K の向きは考えていません。 L が CPA または CSA であるとき L はアキラル (achiral) であると云います。次の定理が知られています。

定理 2.1.[2] 2成分絡み目 L がアキラルならばその絡み数 $\text{lk}(L)$ は 4 を法として 2 と合同ではない。

また最近 Kidwell は次の定理を示しました。

定理 2.2.[1] 2成分絡み目 L が CPA で $\text{lk}(L) \neq 0$ ならば $\text{lk}(L)$ は奇数である。

これらの定理は2成分絡み目 L が CPA や CSA になるために $\text{lk}(L)$ が満たすべき必要条件を与えています。では $\text{lk}(L)$ に関する必要条件はこれで全てか? という問題が考えられます。この問題に関してこれまで分かっていたことは以下の3つです ([2][3][1] を参照)。

1 . $\text{lk}(L) = 0$ の2成分絡み目 L で CPA でありかつ CSA であるものが存在する。(実際、2成分自明絡み目はこの例になっています。)

2 . 任意の奇数 n に対して、 $\text{lk}(L) = n$ の2成分絡み目 L で CPA でありかつ CSA であるものが存在する。

3 . 任意の奇数 n に対して、 $\text{lk}(L) = 4n$ の2成分絡み目 L で CSA であるものが存在する。

次のことは未解決問題となっていました。

問題 2.3. 0以外の任意の偶数 n に対して、 $\text{lk}(L) = 4n$ の2成分絡み目 L で CSA であるものは存在するか?

今回この問題 2.3 の答えが肯定的であることが以下に示す例を発見したことによって分かりました。これで2成分絡み目 L が CPA や CSA になるための $\text{lk}(L)$ に関する必要条件是上述の2つの定理で与えられるもので全てであることが分かりました。

例 2.4. 2成分絡み目 $L(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ を図 2.1 のものとする。ここで m は整数、 ε_i は +1 または -1 で、図中の四角や丸に図 2.2 のように図形が代入されたものを表していることとする。このとき $L(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ は $m, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ によらずに CSA である。また $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ であれば CPA でもある。そして

$$\text{lk}(L(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2)) = 4m + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

である。

よって $L(n, +1, -1)$ が問題 2.3 の答えとなります。また $L(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ の $m, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ をいろいろ動かすことによって上述の 1 . 2 . 3 . の例も全て得られることを注意しておきます。

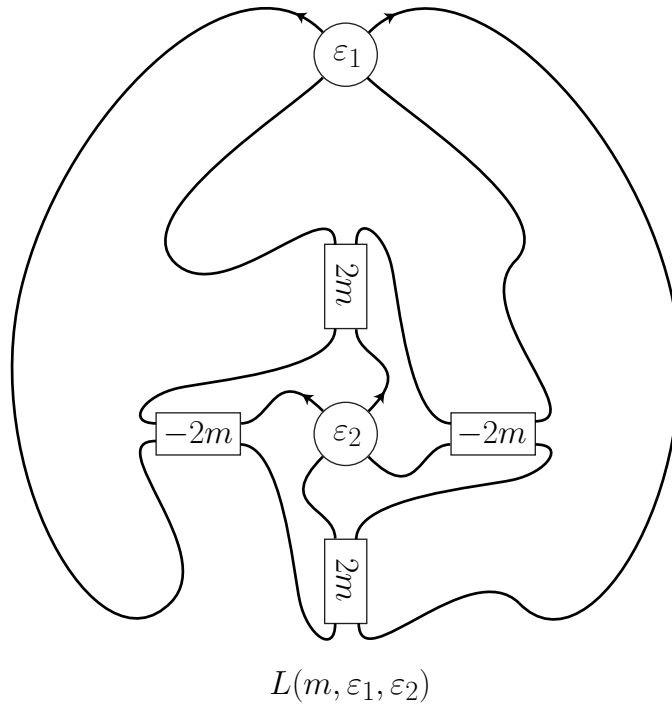


図 2.1

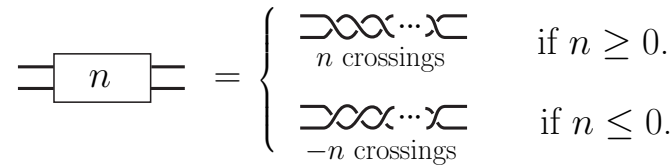
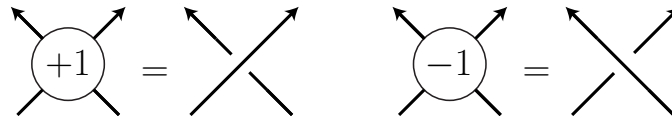


図 2.2

注意 2.5. 2 成分有向絡み目 $L = J \cup K$ に対して S^3 上の自己同相写像 $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ が $\varphi(L) = L$ を満たすときに J と K の向きまで考えた場合には対 $(\varphi(J), \varphi(K))$ としては $(J, K), (K, J), (-J, -K), (-K, -J), (-J, K), (J, -K), (-K, J), (K, -J)$ と 8 通りの可能性があります。これら 8 つのそれぞれについて、その対称性を持つ 2 成分有向絡み目の絡み数の取り得る範囲を決定するという問題が考えられます。前の 4 つは絡み数を変

えないこと、後の4つは絡み数の符号を変えることに注意すると、 L の絡み数が0でない場合には前の4つは φ が S^3 の向きを保つときに起こり、後の4つは φ が S^3 の向きを逆転するときに、つまり L がCPAまたはCSAであるときに起こることが分かります。前の4つについては例えば $(2, 2n)$ -トーラス絡み目を考えることにより、絡み数は全ての整数を取り得ることが分かります。また後の4つについても、例2.4の $L(m, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ は可逆な絡み目であることから、定理2.1と定理2.2だけが絡み数に関する制限を与えていることが分かります。

§3. 空間5頂点完全グラフと空間3+3頂点完全2部グラフの対称性とSimon不変量

空間グラフの分類問題の基礎となるホモロジー分類は[10]においてWu不変量を用いてなされました。ホモロジー分類はデルタ分類(デルタ変形による分類)と同じであることが[4]によって知られています。このホモロジー分類は空間グラフに部分空間グラフとして含まれる2成分絡み目の絡み数と空間5頂点完全グラフの細分のSimon不変量と空間3+3頂点完全2部グラフの細分のSimon不変量とによってもなされることが分かっています[7]。このことから空間グラフの対称性の研究においても、2成分絡み目と空間5頂点完全グラフと空間3+3頂点完全2部グラフの対称性の研究が重要であることが予想されます。そこでここでは空間5頂点完全グラフと空間3+3頂点完全2部グラフの対称性とSimon不変量の関係について考察します。尚、絡み数もSimon不変量もWu不変量の特別な場合であることを注意しておきます。この辺りのことやSimon不変量の定義については[9][10]をご参照願います。

K_5 を5頂点完全グラフ、 $K_{3,3}$ を3+3頂点完全2部グラフとします。 G を K_5 または $K_{3,3}$ とします。埋め込み $f: G \rightarrow S^3$ に対してそのSimon不変量を $\mathcal{L}(f)$ と記すことにします。 $\mathcal{L}(f)$ は常に奇数であることが知られています[9]。また $\varphi: S^3 \rightarrow S^3$ を S^3 の向きを逆転する自己同相写像としたときに $\mathcal{L}(\varphi \circ f) = -\mathcal{L}(f)$ となることもすぐに分かります。 $\text{Aut}(G)$ をグラフ G の自己同型群とします。 $\text{Aut}(G)$ の元 σ を G 上の自己同相写像と考えることにします。

定義3.1. σ を $\text{Aut}(G)$ の元とし、 $f: G \rightarrow S^3$ を埋め込みとする。自己同相写像 $\varphi: S^3 \rightarrow S^3$ が存在して $f \circ \sigma = \varphi \circ f$ となるとき f は σ -対称であると云う。

問題 3.2. $G = K_5$ または $G = K_{3,3}$ のそれぞれについて、 $\text{Aut}(G)$ の元 σ と奇数 n が与えられたときに、 σ -対称な埋め込み $f : G \rightarrow S^3$ で $\mathcal{L}(f) = n$ であるものは存在するか？

定義 3.3. $\text{Aut}(G)$ の元 σ と奇数 n の対 (σ, n) が実現可能であるとは、ある σ -対称な埋め込み $f : G \rightarrow S^3$ で $\mathcal{L}(f) = n$ であるものが存在することとする。

次の 2 つの命題が成立します。

命題 3.4. $\text{Aut}(G)$ の元 σ_1 と σ_2 が共役であるとき、 (σ_1, n) が実現可能ならば (σ_2, n) も実現可能である。

命題 3.5. (1) $\text{Aut}(K_5)$ の元を K_5 の頂点 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 のラベルの集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の置換と自然に同一視する。つまり $\text{Aut}(K_5)$ を 5 次対称群と自然に同一視する。このとき $\text{Aut}(K_5)$ の共役類は、 $\text{id}, (123), (12345), (12)(34), (12), (1234), (12)(345)$ によって代表される。

(2) $K_{3,3}$ の頂点集合を v_1, v_2, v_3 と v_4, v_5, v_6 からなる 2 部集合とし、 $\text{Aut}(K_{3,3})$ の元を頂点のラベルの集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 上の置換と自然に同一視する。つまり $\text{Aut}(K_{3,3})$ を 6 次対称群の部分群と考える。このとき $\text{Aut}(K_{3,3})$ の共役類は、 $\text{id}, (123), (12)(45), (123)(456), (14)(25)(36), (142536), (12), (12)(456), (1425)(36)$ によって代表される。

ここで主定理を述べます。

主定理.

(A) $G = K_5$ のとき

(1) 奇数 n について、 $((123), n)$ が実現可能であるための必要十分条件は n が 6 を法として 3 と合同でないことである。

(2) 任意の奇数 n について $((12345), n)$ は実現可能である。

(3) 任意の奇数 n について $((12)(34), n)$ は実現可能である。

(4) 任意の奇数 n について $((1234), n)$ は実現可能である。

(5) 奇数 n について、 $((12), n)$ が実現可能であるための必要十分条件は $n = \pm 1$ である。

(6) 奇数 n について、 $((12)(345), n)$ が実現可能であるための必要十分条件は $n = \pm 1$ である。

(B) $G = K_{3,3}$ のとき

(7) 奇数 n について、 $((123), n)$ が実現可能であるための必要十分条件は n が 6 を法として 3 と合同でないことである。

(8) 任意の奇数 n について $((12)(45), n)$ は実現可能である。

(9) 任意の奇数 n について $((123)(456), n)$ は実現可能である。

(10) 任意の奇数 n について $((14)(25)(36), n)$ は実現可能である。

(11) 任意の奇数 n について $((142536), n)$ は実現可能である。

(12) 任意の奇数 n について $((1425)(36), n)$ は実現可能である。

(13) 奇数 n について、 $((12), n)$ が実現可能であるための必要十分条件は $n = \pm 1$ である。

(14) 奇数 n について、 $((12)(456), n)$ が実現可能であるための必要十分条件は $n = \pm 1$ である。

命題 3.4 と命題 3.5 を合わせると、主定理は問題 3.2 に対する完全解答を与えていることが分かります。

命題 3.6. (1) $f : K_5 \rightarrow S^3$ を埋め込みとする。 $\text{Aut}(K_5)$ の元 σ が $\text{id}, (123), (12345), (12)(34)$ のどれかと共役ならば $\mathcal{L}(f \circ \sigma) = \mathcal{L}(f)$ であり、 $(12), (1234), (12)(345)$ のどれかと共役ならば $\mathcal{L}(f \circ \sigma) = -\mathcal{L}(f)$ である。

(2) $f : K_{3,3} \rightarrow S^3$ を埋め込みとする。 $\text{Aut}(K_{3,3})$ の元 σ が $\text{id}, (123), (12)(45), (123)(456), (14)(25)(36), (142536)$ のどれかと共役ならば $\mathcal{L}(f \circ \sigma) = \mathcal{L}(f)$ であり、 $(12), (12)(456), (1425)(36)$ のどれかと共役ならば $\mathcal{L}(f \circ \sigma) = -\mathcal{L}(f)$ である。

命題 3.6 と、Simon 不変量は常に奇数であること、よって 0 でないこと、また自己同相写像 $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ が S^3 の向きを保つときに $\mathcal{L}(\varphi \circ f) = \mathcal{L}(f)$ 、逆転するときに $\mathcal{L}(\varphi \circ f) = -\mathcal{L}(f)$ となることから、主定理の (1) ~ (3) と (7) ~ (11) を実現する自己同相写像は S^3 の向きを保つものであり、(4) ~ (6) と (12) ~ (14) を実現する自己同相写像は S^3 の向きを逆転するものであることが分かります。一般に空間グラフを集合として保つ S^3 の向きを逆転する自己同相写像が存在するときに、その空間グラフはアキラルであると云います。(4) ~ (6) と (12) ~ (14) を実現する空間グラフはアキラルであることになります。

§4. 主定理の証明の概略

(3)(4) 図4.1の埋め込み $f_{m,\pm}$ は (1234)-対称かつ (13)(24)-対称です。ここで (13)(24) は (12)(34) と共役です。そして $\mathcal{L}(f_{m,\pm}) = 4m \pm 1$ であることから分かります。

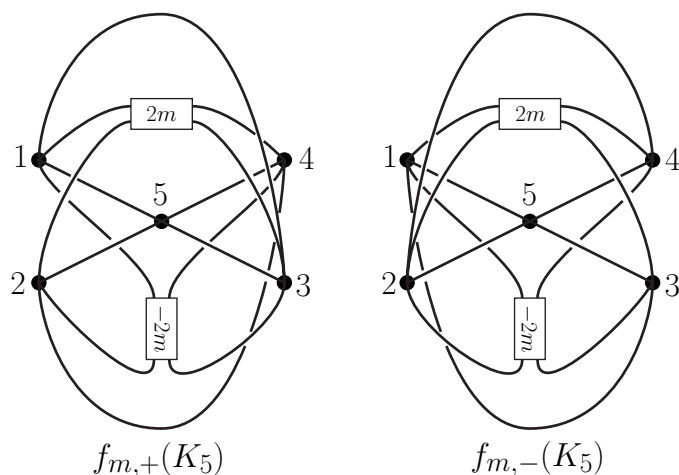


図 4.1

(8)(12) 図4.2の埋め込み $f_{m,\pm}$ は (1425)(36)-対称かつ (12)(45)-対称です。そして $\mathcal{L}(f_{m,\pm}) = 4m \pm 1$ であることから分かります。

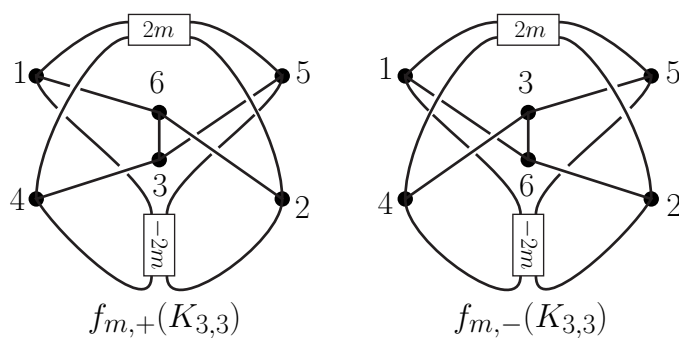


図 4.2

(2) 図4.3の埋め込み f_m は中心線が自明な結び目であるメビウスの帯にのっていることから (12345)-対称であることが分かります。そして $\mathcal{L}(f_m) = 2m + 1$ であることから分かります。

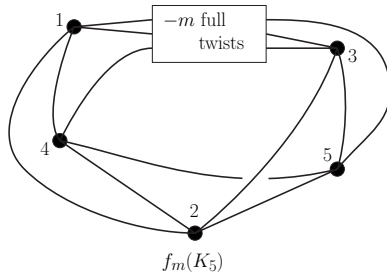


図 4.3

(9)(10)(11) 図4.4の埋め込み f_m は中心線が自明な結び目であるメビウスの帯にのっていることから (142536)-対称であることと (123)(456)-対称であることが分かります。また (15)(26)(34)-対称であることもすぐに分かります。(15)(26)(34) は (14)(25)(36) と共役です。そして $\mathcal{L}(f_m) = 2m + 1$ であることから分かります。

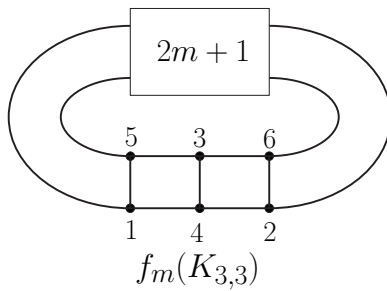


図 4.4

(1)(十分性) 図4.5の埋め込み $f_{m,\pm}$ は (123)-対称です。そして $\mathcal{L}(f_{m,\pm}) = 6m \pm 1$ であることから分かります。

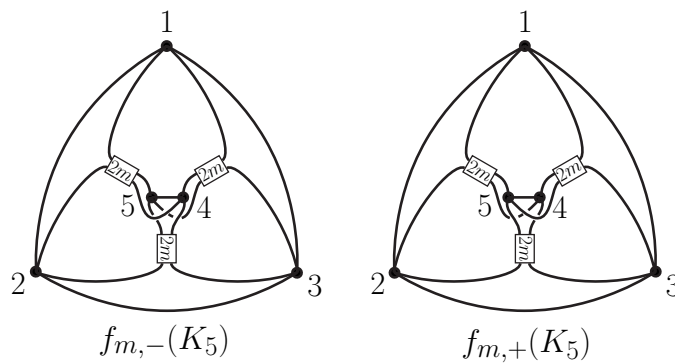


図 4.5

(7)(十分性) 図 4.6 の埋め込み $f_{m,\pm}$ は (123)-対称です。そして $\mathcal{L}(f_{m,\pm}) = 6m \pm 1$ であることから分かります。

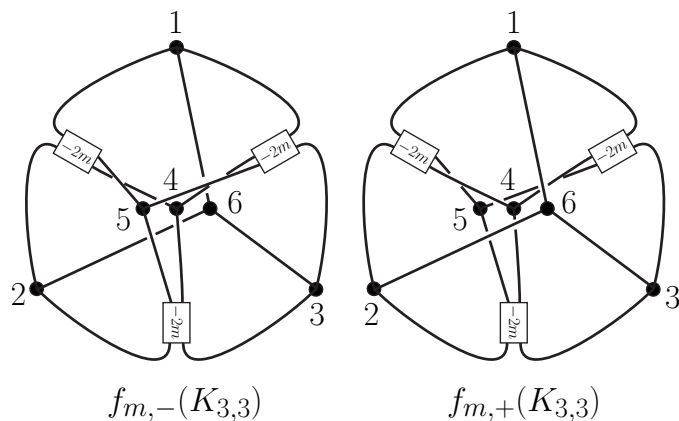


図 4.6

(5)(6)(十分性) 図 4.7 の埋め込み f_{\pm} は (12)-対称かつ (12)(345)-対称です。そして $\mathcal{L}(f_{\pm}) = \pm 1$ であることから分かります。

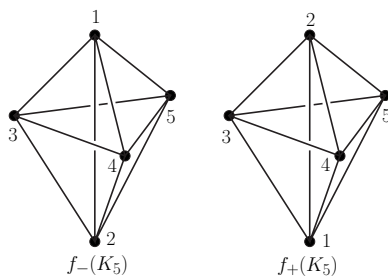


図 4.7

(1 3)(1 4)(十分性) 図 4.8 の埋め込み f_{\pm} は (12)-対称かつ (12)(456)-対称です。そして $\mathcal{L}(f_{\pm}) = \pm 1$ であることから分かります。

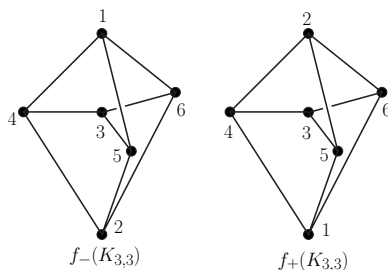


図 4.8

(1)(5)(6)(7)(13)(14)(必要性)

定理 4.1.[8] G を 3-連結グラフとし、 σ を $\text{Aut}(G)$ の元、 $f : G \rightarrow S^3$ を σ -対称埋め込みとする。このとき f とホモロガスな (デルタ同値な) 埋め込み $g : G \rightarrow S^3$ と S^3 上の有限位数の自己同相写像 $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ で $g \circ \sigma = \varphi \circ g$ を満たすものが存在する。

この定理において $G = K_5$ または $G = K_{3,3}$ としたとき g は f とホモロガスなので $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f)$ となります。そして S^3 上の有限位数の自己同相写像については Smith 理論と Smith 予想の肯定的解決から具体的な形が分かるので、 g の形がある程度決まり、そこから $\mathcal{L}(g)$ の取り得る範囲が定理のものとなることが分かります。□

尚、(1)と(7)の(必要性)については定理 4.1 を経由せずに α 不変量と Simon 不変量の関係を用いた別証明もあります。

References

- [1] M. Kidwell: Two types of amphicheiral links, *J. Knot Theory Ramifications*, **15** (2006), 651-658.
- [2] P. Kirk and C. Livingston: Vassiliev invariants of two component links and the Casson-Walker invariant, *Topology*, **36** (1997), 1333-1353.
- [3] C. Livingston: Enhanced linking numbers, *Amer. Math. Monthly*, **110** (2003), 361-385.
- [4] T. Motohashi and K. Taniyama: Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in R^3 , *Proceedings of Knots 96 Tokyo*, (S. Suzuki ed.), World Scientific Publ. Co., (1997), 185-200.
- [5] R. Nikkuni: Achirality of spatial graphs and the Simon invariant, to appear in the *Proceedings of Intelligence of Low Dimensional Topology 2006*, World Scientific Publishing Co. in the *Knots and Everything Book Series*.
- [6] R. Nikkuni and K. Taniyama: Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, in preparation.
- [7] R. Shinjo and K. Taniyama: Homology classification of spatial graphs by linking numbers and Simon invariants, *Topology Appl.*, **134** (2003), 53-67.
- [8] T. Soma: Symmetries of minimum graphs in the 3-sphere, *J. Knot Theory Ramifications*, **7** (1998), 651-657.
- [9] K. Taniyama: Cobordism, homotopy and homology of graphs in R^3 , *Topology*, **33**(1994), 509-523.
- [10] K. Taniyama: Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topology Appl.*, **65**(1995), 205-228.

〒 169-8050 東京都新宿区西早稲田 1-6-1 早稲田大学教育学部数学教室
taniyama@waseda.jp