数並べ（素人の数遊び）*

早稲田大学教育学部数学科　谷山 公規

要旨

整数を平面や空間に適当に配置することでいろいろな命題を直観的に理解出来ることを紹介します。

先ずは高校数学で習う次の 3 乗和の公式について考えてみます。

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

上式で例えば $k=1$ から 4 までを実際に足してみると、

$$1^3+2^3+3^3+4^3 = 1+8+27+64 = 100 = (10)^2 = (1+2+3+4)^2 = \left(\frac{4\times 5}{2}\right)^2$$

と 100 という切りのいい数になっています。この公式で不思議に思うのは右辺が 2 乗になるのはどういう事情からなのだろうかということです。これに対して以下のように数字を並べて考える方法があります。意外と知られていないようですのでここで紹介いたします。実際私も最近まで知らず、川口直也さんに教えて頂きました。図 1 のように $n\times n$ 個の数字を正方形状に並べるとその総和が 3 乗和になります。図 1 は $n=4$ の場合ですので総和は 100 になっています。

先ずこれを図 2 のように分けて考えます。すると公式の左辺の 3 乗和になっています。何故 3 乗になるのかを例えば $4+8+12+16+12+8+4$ について考えてみましょう。図 3 のように、$4+8+12+16+12+8+4 = 4(1+2+3+4+3+2+1)$ と 4 で括ることが出来て、さらに $1+2+3+4+3+2+1 = (1+2+3+4)+(1+2+3)$ はサイズの 1 違う 2 つの三角数の和であることから平方数 4^2 になることから分かります。ところで三角数 $1+2+3+4=10$ については「これはボウリングのピンの数だな！」とピンと来る方も多いのではないでしょうか。

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{array}$$

図 1

*初出：早稲田大学数学教育学会会誌第３５巻（２０１７年）（２０１６年１２月の同学会大会の講演記録）

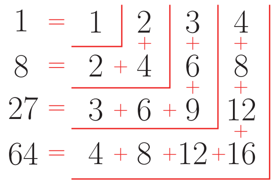

図 2

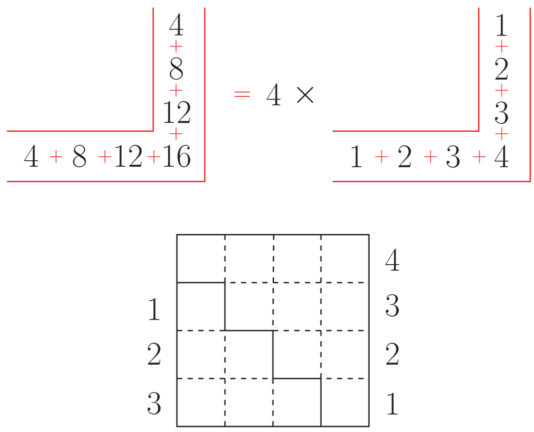

図 3

次にこれを図 4 のように最初に横に足し、次にその和を縦に足すことで 1 乗和 $1+2+3+4$ の 2 乗になっていることが分かります。これで 3 乗和が 1 乗和の 2 乗になっている事情の一つの説明が出来ました。このような数の正方形状の配置を一種の図形として認識することで、私はこの公式について以前よりも親しみを持てるようになりました。

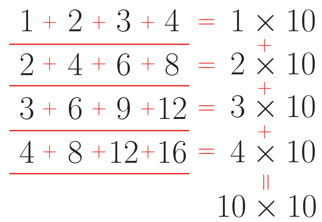

図 4

次に Stanislaw Ulam によって発見された素数螺旋について紹介致します。図 5 のように正の整数を 1 から順番に平面に螺旋状に配置して素数を色塗りしたものです。この素数螺旋についても私は最近その存在を知ったのですが、初めて見たときに素数の分布の神秘を垣間みたような感銘を受けました。インターネットで検索すればもっと大域的なものを見ることが出来ます。素数の分布については素数定理など多少は知ってはいたのですが素数螺旋を見てはじめて感じるところがありました。この素数の並びについてはいろいろと分かっていないことがたくさんあるようです。しかし例えば図 6 に示しましたように、平方数が斜めに並んでいるこ

とや、合成数しか並ばない行や列があることはすぐに分かります。図 6 で $26, 51, 84, \cdots$ と続く行の一般項は $4n^2 + 5n = n(4n+5)$ と合成数となり、その上の $10, 27, 52, 85, \cdots$ と続く行の一般項も $4n^2 + 5n + 1 = (4n+1)(n+1)$ と合成数となることは因数分解の出来る高校生ならば分かります。また $21, 44, 75, 114, \cdots$ と続く列の一般項は $4n^2 + 3n - 1 = (4n-1)(n+1)$ と合成数となり、その右の $22, 45, 76, 115, \cdots$ と続く列の一般項も $4n^2 + 3n = n(4n+3)$ と合成数となることが分かります。

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

図 5

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

図 6

さて、ここからが本題です。ダイヤル数 142857 について考えてみます。

$$
\begin{aligned}
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 1 &= 1\,4\,2\,8\,5\,7 \\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 2 &= 2\,8\,5\,7\,1\,4 \\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 3 &= 4\,2\,8\,5\,7\,1 \\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 4 &= 5\,7\,1\,4\,2\,8 \\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 5 &= 7\,1\,4\,2\,8\,5 \\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 6 &= 8\,5\,7\,1\,4\,2
\end{aligned}
$$

このように 142857 という数字の並びが巡回的に出て来ます。ここで巡回的というのは図 7 のように数字が円周状に並んでいるという意味です。

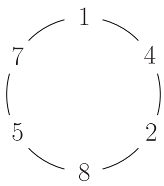

図 7

これは不思議ですね。単なる偶然でしょうか。試しに 142857 を 7 倍してみましょう。

$$142857 \times 7 = 999999$$

実は 142857 は $\dfrac{1}{7}$ を無限循環小数表示したときの循環部分の 6 桁の数字なのです。

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7} = 0.142857142857142857\cdots$$

すると

$$1 = \frac{1}{7} \times 7 = 0.\dot{1}4285\dot{7} \times 7 = 0.\dot{9}9999\dot{9} = 0.999999999999999999\cdots$$

ですから $1 = 0.999999999999999999\cdots$ という等式が得られます。この式の右辺は数列 $0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ \cdots$ の極限値ですから確かに左辺の 1 と一致しています。

さて、142857 の 1 倍から 6 倍までについて何故上記のような現象が起こるのかを説明しましょう。先ず 1 割る 7 と、例えば 2 割る 7 を実際に筆算で計算してみましょう。図 8 のように 1 割る 7 を計算すると、先ず 0 が立って余りが 1、これを 0.1 の 10 倍とみて、つまり 1 に 10 を掛けて 10。10 を 7 で割って 1 が立って余りが 3、3 に 10 を掛けて 30。30 を 7 で割って 4 が立って余りが 2、2 に 10 を掛けて 20。20 を 7 で割って 2 が立って余りが 6、6 に 10 を掛けて 60。60 を 7 で割って 8 が立って余りが 4、4 に 10 を掛けて 40。40 を 7 で割って 5 が

立って余りが 5、5 に 10 を掛けて 50。50 を 7 で割って 7 が立って余りが 1 になり、あとは繰り返しになります。同様に 2 割る 7 を計算すると、1 割る 7 の計算の途中からと同じ計算になっています。ですから

$$\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4} = 0.285714285714285714\cdots$$

と 142857 と巡回的には同じ並びになっています。これを $\frac{1}{7}$ の無限循環小数表示と小数点以下 6 桁ごとに区切って見比べると、$142857 \times 2 = 285714$ でなければならないことが分かります。3 倍から 6 倍までについても同様にして説明がつきます。

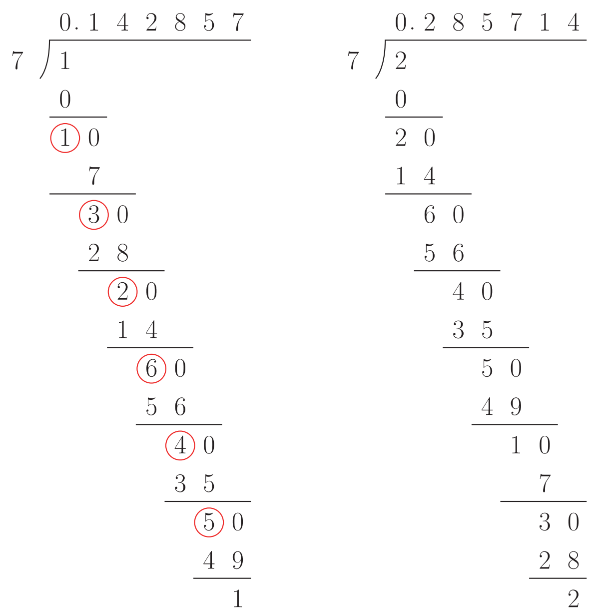

図 8

さてここで図 8 で赤丸で示した 132645 という数字の並びに注目しましょう。この並びは、$1 \times 10 = 10$ を 7 で割った余りが 3、$3 \times 10 = 30$ を 7 で割った余りが 2、$2 \times 10 = 20$ を 7 で割った余りが 6、$6 \times 10 = 60$ を 7 で割った余りが 4、$4 \times 10 = 40$ を 7 で割った余りが 5、$5 \times 10 = 50$ を 7 で割った余りが 1 となって元に戻る、というものでした。ではこの順番で 142857 の倍数を並べてみましょう。

$$\begin{aligned}
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 1 &= 1\,4\,2\,8\,5\,7\\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 3 &= 4\,2\,8\,5\,7\,1\\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 2 &= 2\,8\,5\,7\,1\,4\\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 6 &= 8\,5\,7\,1\,4\,2\\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 4 &= 5\,7\,1\,4\,2\,8\\
1\,4\,2\,8\,5\,7 \times 5 &= 7\,1\,4\,2\,8\,5
\end{aligned}$$

となって右辺はちょうど 1 つずつ数字が巡回的にずれています。小学校の夏休みの宿題の計

算練習として、この形で出題したら面白いのではないでしょうか。それではこの 132645 を図 9 のように 142857 とともに円周状に並べてみましょう。すると左図では直線分で結ばれている 2 つの数の和は全て 9 になっています。右図では直線分で結ばれている 2 つの数の和は全て 7 になっています。実は左図で 9 になることは右図で 7 になっていることから説明出来ます。その説明は難しくありませんがここでは省きます。注目すべきは右図では赤丸の 3 つの数の和も 7 ですし、緑丸の 3 つの数の和も 14 と 7 の倍数になっていることです。実はこのような現象は 7 以外の素数に対しても一般に存在します。それを見るまえに 132645 についてもう一度考えてみます。10 と 3 は差が 7 であることから、ある数を 10 倍して 7 で割ったときの余りと 3 倍して 7 で割ったときの余りは一致します。ですから 132645 は 1 からはじめて順に 3 倍したものを 7 で割った余りが並んでいます。数学の専門用語を使って説明すれば図 9 の右図は、体 $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ の 3 を生成元とした Cayley graph です。ただしここでは数 a の 7 を法とした合同類を単に a と略記しています。では一般に 7 以外の例を見てみましょう。図 10（左図）では 1 から 10 までが、（右図）では 1 から 12 までが、奇妙な順番で並んでいます。それぞれ体 $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times$ の 2 を生成元とした Cayley graph と、体 $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ の 2 を生成元とした Cayley graph です。実際に 1 から時計回りに、$1, 2, 4, 8$ までは公比 2 の等比数列です。左図で次の 5 というのは $8 \times 2 = 16$ を 11 で割った余りです。また右図で次の 3 というのは $8 \times 2 = 16$ を 13 で割った余りです。このあと全て同様のルールで数字が並んでいます。これは小学生にも説明出来るルールです。さて、左図では 1 と 10、2 と 9、4 と 7、8 と 3、5 と 6 のように、円の反対側にある数を足すとちょうど 11 になります。同様に右図では 1 と 12、2 と 11、4 と 9、8 と 5、3 と 10、6 と 7 のように、円の反対側にある数を足すとちょうど 13 になります。さらに左図で 2 つおきに並んでいる 5 個の数を足すと $1 + 4 + 5 + 9 + 3 = 22$、$2 + 8 + 10 + 7 + 6 = 33$ とどちらも 11 の倍数になります。右図でも同様に 2 つおきに並んでいる 6 個の数を足すとどちらも 39 と 13 の倍数になります。これは上述の反対側の数を足すと 13 になることから分かります。同様に 3 つおきに並んでいる 4 個の数を足すと全て 26 になります。さらには、4 つおきに並んでいる 3 個の数を足すと $1 + 3 + 9 = 13$、$2 + 6 + 5 = 13$、$4 + 12 + 10 = 26$、$8 + 11 + 7 = 26$ と全て 13 の倍数になっています。実に不思議で美しいと私は思います。

何故このようなことが成り立つのかを説明します。p を素数とすると有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ は位数 $p-1$ の巡回群になることは大学の代数学で習うことです。X をこの乗法群の元で $X \neq 1$ であるものとします。X の位数を n とします。n は $p-1$ の約数です。すると $X^n = 1$ です。よって $X^n - 1 = 0$ です。$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$ と因数分解出来ます。よって $(X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1) = 0$ ですが、$X \neq 1$ ですから $X - 1 \neq 0$ です。よって $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = 0$ です。ここで体は整域であるという性質を使いました。この $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$ は円周等分多項式、略して円分多項式と呼ばれています。逆に並べると $1 + X + \cdots + X^{n-2} + X^{n-1}$ となりますが、例え

ば $p=11$ として $X=4$ とすると $4^2=5$、$4^3=9$、$4^4=3$、$4^5=1$ ですから $n=5$ となり、$1+X+X^2+X^3+X^4=1+4+5+9+3=22=0$ と実際に $1+X+X^2+X^3+X^4=0$ が成立していることが確認されます。これが左図における赤丸の 5 つの数 $1,4,5,9,3$ の和が 22 と 11 の倍数になっていることを示しています。以上で説明がつきました。ところで円周等分多項式は円分多項式ですから「とうぶん」でもあり「えんぶん」でもあり、あまじょっぱい多項式ということになりますね。

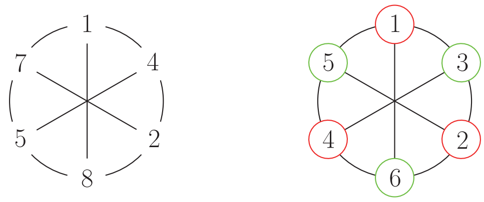

図 9

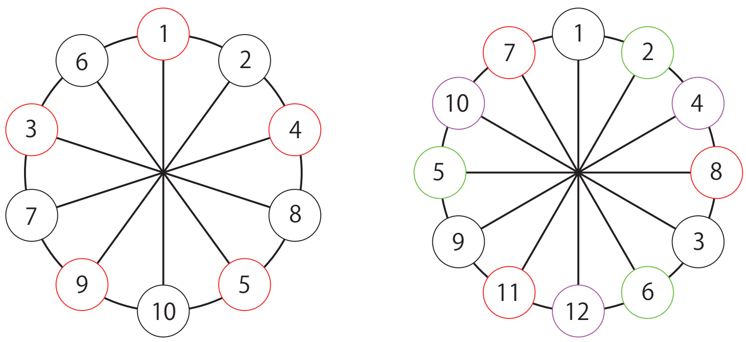

図 10　変な時計（右図）とその友達（左図）

以上数並べの例をいくつか見てきましたが、他にもパスカルの三角形を整数 n の倍数であるかないかによって塗り分けた図とか、John H. Conway の考えた look and say sequence など興味深い例があります。これらについてはインターネットで検索するといろいろと出てきます。また私の知らない数並べもたくさんあると思います。

謝辞　講演の機会を与えて下さいました早稲田大学の瀧澤武信先生に感謝します。