

# 企業所得成長モデルと投資戦略 —経済物理学の紹介—

富士投信投資顧問(株)クオンツ運用部 斎藤 健

平成 18 年 11 月 26 日

## 1 はじめに

経済現象を物理学の視点から研究する分野を「経済物理学<sup>1</sup>」と呼び、1990年代後半から盛んに研究されるようになった。経済物理学は、物理学の手法のなかでも特に、集団の性質を研究する「統計物理学」の最近の手法や成果を用いるのが特徴である。

統計物理学は、分子や原子といったミクロな要素のダイナミクスと、それらの集団である固体や液体などのマクロな物質の性質を関係付けることを目的として発展してきた。20世紀後半になりコンピュータが研究のツールとして使われるようになると、カオスやフラクタルという複雑な現象を扱う概念が誕生し、統計物理学の対象もそれまでの物質系から、生命現象や人間社会、気象現象などといった、より広範で複雑な現象に広がっていった。経済現象も個人や企業の経済活動とそれらが相互作用し合う集団が示す複雑な現象であり、統計物理学の対象として認識され、研究されるようになったものが経済物理学である<sup>2</sup>。

本稿では、経済物理学の考え方を紹介し、その考え方を応用したものとして企業所得成長モデルを取り上げる。また、そこで得られた成果を実際の投資戦略に応用する試みにも言及する。以下、本稿の構成を述べる。

第2章では経済物理学の初期から研究され、経済物理学の概念が培われる場ともなってきた価格変動を例にとり、経済物理学の基本的な手法とモデル、現象の捉え方などを確認する。続いて第3章では、企業所得の統計的性質を調べ、これまで報告されている企業所得分布と企業所得成長率分布に関する規則を確認する。第4章では前章で確認した統計則を説明する企業所得成長モデルを紹介し、モデルのパラメータを実データから推定する方法をまとめる。また、モデルによる企業所得成長のシミュレーションをもととして、どのような投資戦略が可能となるかについて触れる。最後に、まとめと考察を行い、今後の課題を挙げる。

## 2 経済物理学のアプローチ—価格変動を例に

経済物理学では統計物理学で発展してきた概念や手法を用いる。そのなかでも代表的な概念が、カオス、フラクタル、相転移である。価格変動の分析を通して、カオス、フラクタル、相転移をキーワードに現象を理解する経済物理学の特徴を見る。

<sup>1</sup>英語では econophysics と。これを片仮名にした「エコノフィジックス」という名称も用いられている。

<sup>2</sup>経済物理学の研究が始まった当初(1990年代初め)は、経済現象を扱った論文が物理学の論文誌に投稿されると、物理学の論文ではないという理由で門前払いにされたそうである [1]。しかし、今では、物理学の代表的な論文誌で経済物理学の論文が掲載されるようになっている。

## 2.1 価格変動

株価や為替は時々刻々、不規則な変動を行う。図1は東証1部上場企業の株式時価総額を指数化した TOPIX(東証株価指数)の変動である。なぜ、このような不規則な変動を行うのか。ニュース

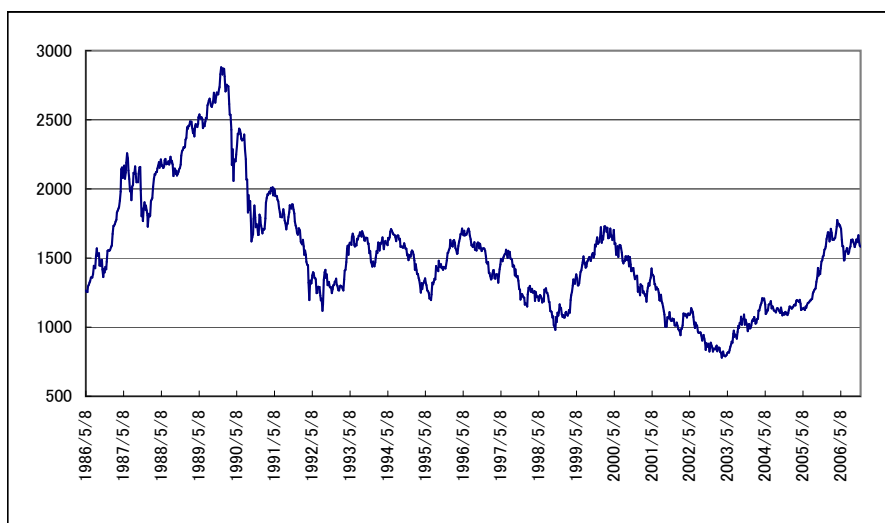


図1: TOPIX の変動。1986年5月8日から2006年11月16日までの木曜日の週次データをプロットしたもの。

では、1日の変動の要因を、その日発表された経済指標、政府や日銀の要人による発言、国際的な事件、等々を挙げて説明している。それらを積み上げていけば、価格変動の理由となるのかもしれない。

一方、経済学では合理的に判断する市場参加者を仮定してうえで、需要と供給が釣り合う価格で安定する、という考え方をする。しかし、現実には価格は一時たりとも安定しておらず、不規則な変動をしている。これは、市場参加者が合理的に判断していないため、もしみんなが合理的に判断するようになれば均衡価格で安定するはずだ、という言い方もできる。しかし、これでは現実を直視しておらず、不規則な価格変動とそのメカニズムを何も説明していない。

いったい、なぜ価格は不安定で、常に不規則に変動するのか。この問題に対して経済物理学はどのように考えるのか。実際に価格変動の分析を通してそれを見ていこう。

## 2.2 価格変動のフラクタル性

図1はTOPIXの20年分の週次データである。その一部を拡大してみると図2のようになる。これは3年分の日次データをプロットしたものである。図1と図2を比較すると、時間のスケールが異なるにもかかわらず、よく似た変動をしていることが分かる。さらに、取引ごとのデータ(ティックデータ)を使用すると、数ヶ月間のデータ、数日分のデータに対しても同じような変動をしていることが確認される[2]。このように、拡大しても縮小しても同じように見える性質を、自己相似性、あるいは、フラクタル性と呼ぶ<sup>3</sup>。

<sup>3</sup>株価変動の自己相似性の発見がきっかけとなって、マンデルブロはフラクタルという概念を作った。

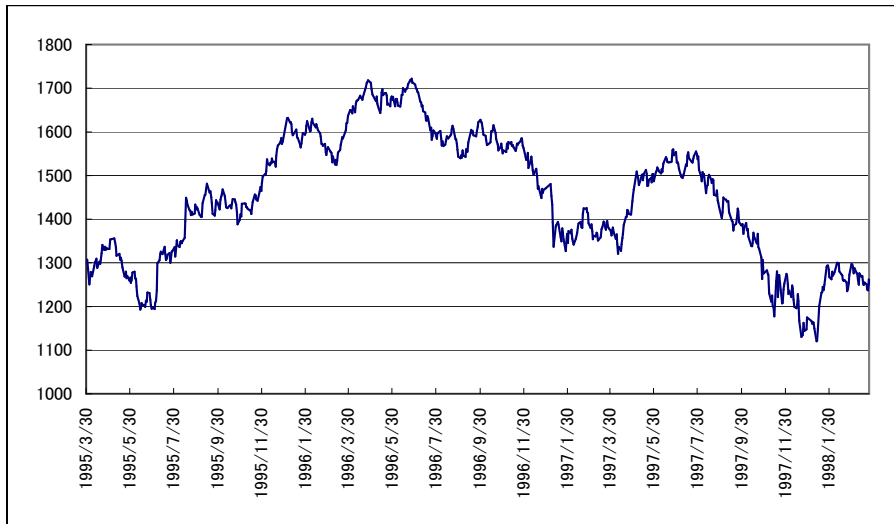


図 2: TOPIX の変動。1995 年 3 月末から 1998 年 3 月末までの日次データをプロットしたもの。

株価変動のグラフのフラクタル性は、フラクタル次元により特徴付けられる。フラクタル次元は次のように測定される。グラフの領域を一辺が  $r$  の細胞に分割し、グラフの一部を含むような細胞の数  $N(r)$  を数える。  $r$  を変えて  $N(r)$  を求めたときに、

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (1)$$

なる関係を満たす場合、グラフのフラクタル次元は  $D$  となる<sup>4</sup>。株価変動のグラフのフラクタル次元は、 $D \sim 1.5$  程度である。

式 (1) の関数  $N(r)$  は、実数  $\lambda$  に対して

$$N(r) \propto N(\lambda r) \quad (2)$$

を満たしていることが分かる。一般にフラクタル性は、ある関数  $F(x)$  が  $x$  のスケール変換に対して同じ形になるという性質により特徴付けられる。すなわち、 $\lambda$  を実数として、

$$F(x) \propto F(\lambda x) \quad (3)$$

を満たすことがフラクタル性の条件である。任意の  $\lambda$  に対して (3) を満たす関数は、

$$F(x) = C \cdot x^\alpha \quad (4)$$

というべき乗型の関数である。

経済物理学では、価格変化の頻度分布という統計則に注目し、その分布がべき乗型になることから価格変動のフラクタル性を特徴付けることが行われる。次にそれを見てみよう。

<sup>4</sup>このように、図形を細胞 (ボックス) で覆うのに必要な数をボックスのサイズの関数として求めた式 (1) から決定される次元  $D$  を、特にボックスカウンティング次元という。

## 2.3 価格変動の統計的性質

株式や債券などの価格  $x(t)$  の時間 1 単位<sup>5</sup>当たりの変化  $\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t)$  に注目する。価格変化のデータ  $\{\Delta x(t)\}$  の変域を複数の区間に分割し、幅  $\delta x$  の区間  $[\Delta x, \Delta x + \delta x]$  に入るデータ数を  $n(\Delta x, \Delta x + \delta x)$  とする。データ総数を  $M$  とすれば、確率密度関数  $p(\Delta x)$  は

$$p(\Delta x) = \frac{n(\Delta x, \Delta x + \delta x)}{M\delta x} \quad (5)$$

と定義される。TOPIX の週次データから求めた確率密度関数を図 3 に示す。TOPIX の指数変化の

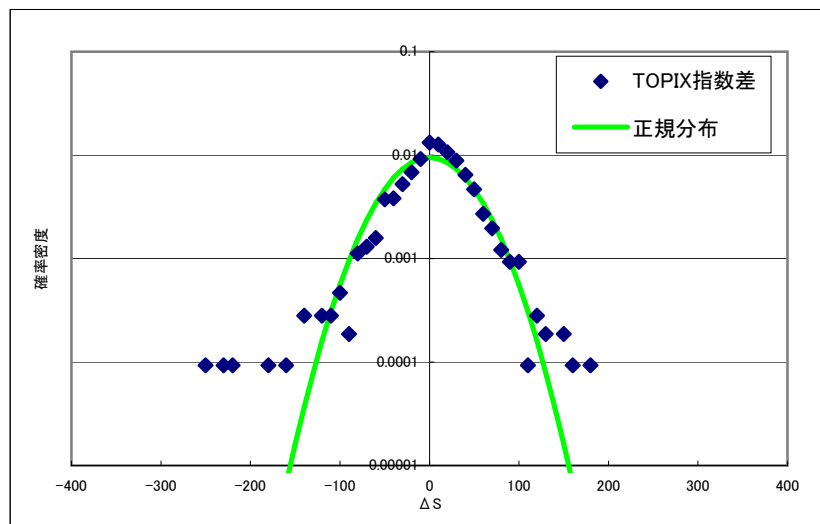


図 3: TOPIX の 1 週間あたりの変化の確率密度関数。1986 年 5 月 8 日から 2006 年 11 月 16 日までの木曜日の週次データより作成。

確率密度関数は正規分布より裾の厚い分布であることが分かる<sup>6</sup>。これは、正規分布ではほとんど観測されないような大変動が起こっていることを意味する。

このような大変動を特徴付けるには、確率密度関数よりも、次に示す累積分布を用いるのが便利である。価格変化のデータ  $\{\Delta x(t)\}$  を大きい順に並べ順位をつける。データ  $\Delta x$  の順位を  $N(\Delta x)$  と書くと、 $N(\Delta x)$  は  $\Delta x$  以上のデータ数であるから、これをデータ総数で割った量は累積分布  $P(> \Delta x)$  である。すなわち、

$$P(> \Delta x) = \frac{N(\Delta x)}{M} = \int_{\Delta x}^{\infty} d\Delta x p(\Delta x) \quad (6)$$

である。価格変化の分布は図 3 から分かる通り、正の領域と負の領域でほぼ対称である。このような場合には、負の領域に対しては絶対値をとり、正負をともに表示することがしばしば行われる。図 4 は、このように正負をともに表した TOPIX の 1 週間の変化の累積分布、図 5 は国債の指数である NOMURA-BPI の 1 週間の変化の累積分布である。TOPIX の場合は指数変化が 50 以上の領域で、BPI の場合には 3 以上の領域で累積分布が

$$P(> |\Delta x|) \propto |\Delta x|^{-\beta} \quad (7)$$

<sup>5</sup>1 年、1 カ月、1 週間、1 日、1 分、1 秒など。経済物理学では 1 つの取引当たり (ティック当たり) の価格変化も扱われる。

<sup>6</sup>ファットテール (fat tail) と呼ばれている。

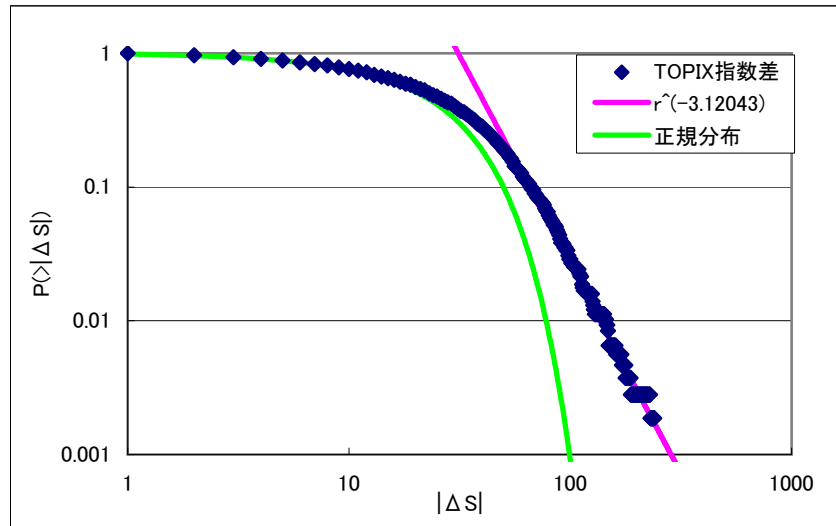


図 4: 1 週間の TOPIX 変化の累積分布。1986 年 5 月 8 日から 2006 年 11 月 16 日までの木曜日の週次データより作成。

のようにベキ乗型の分布になることが分かる。分布の指数  $\beta$  は、TOPIX では  $\beta \sim 3.12$ 、BPI の場合は  $\beta \sim 2.88$  である。

このように、価格変化の累積分布はベキ乗型の分布、ベキ分布で記述される。ベキ分布はフラクタルの一般的性質であるスケール不変性 (3) を満たすことが分かる。この意味でベキ分布はフラクタル分布とも呼ばれる。ベキの指数  $\beta$  が分布のフラクタル次元を与える<sup>7</sup>。このようなベキ分布は、物質系の相転移という現象で広く見られるゆらぎの性質と共通している。相転移とは、例えば、 $0^\circ\text{C}$  で固体の氷から液体の水に変化するように、物質の状態が、特定のパラメータの値 (相転移点) を境に異なる状態へ急激に変化する現象である。相転移点ではゆらぎの大きさが最も大きくなり、ベキ分布が観測されることが一般に知られている。この事実は、価格変動を次のように相転移におけるゆらぎという視点で理解できることを示している。

市場は需要と供給が釣り合う点にあると考えられるが、これは超過需要相と超過供給相という 2 つの異なる状態の境界、すなわち相転移点である。したがって、物質系の場合と同じように、価格のゆらぎが最大となって価格差のベキ分布が観測される (図 6 参照)。このような見方は、需要と供給の均衡点で価格が安定するという従来の経済学の視点とは全く異なる描像を与える。規制をなくし市場が理想的な自由市場に近づけば安定な均衡価格が実現するという期待に反し、市場が自由になればなるほど市場は相転移点に近づいてゆき、市場価格はより不安定に大きくゆらぐことになるのである。この相転移点におけるゆらぎという見方が、市場の価格が不安定に変動することに対する経済物理学の理解である。

<sup>7</sup> 分布のベキ  $\beta$  は価格変化  $|\Delta x|$  空間のボックスカウンティング次元になっている。なぜなら、 $P(>|\Delta x|)$  はサイズ  $|\Delta x|$  で見たときに観測される価格変化の個数  $N(|\Delta x|)$  に比例するからである。

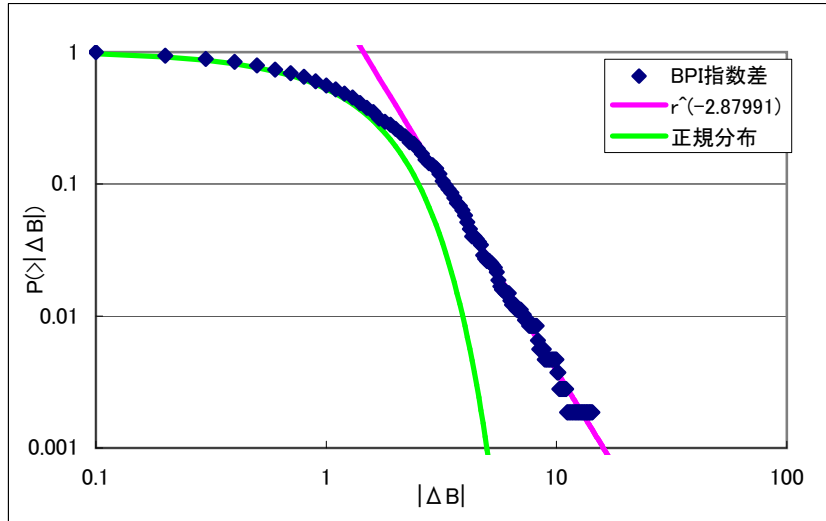


図 5: 1 週間の NOMURA-BPI 長期国債指数変化の累積分布。1986 年 5 月 8 日から 2006 年 11 月 16 日までの木曜日の週次データより作成。

## 2.4 価格変動の確率過程モデル

以上のようなベキ分布で特徴付けられる価格変動を説明するモデルとして、次のような確率差分方程式で記述されるものが知られている [3]。

$$\Delta x(t + \Delta t) = b(t)\Delta x(t) + f(t). \quad (8)$$

ただし、 $b(t)$  は乗法的ノイズ、 $f(t)$  は加法的ノイズである。(8) について次の事実が成り立つ。乗法的ノイズ  $b(t)$  について、

$$\langle b(t)^\beta \rangle = 1 \quad (0 < \beta < 2) \quad (9)$$

が成り立つならば、累積分布  $P(> \Delta x)$  はベキ分布となり、その指数は  $\beta$  である。すなわち、

$$P(> \Delta x) \propto \Delta x^{-\beta} \quad (10)$$

となる。

式 (8) の特性を理解するために、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限を考える。このとき、

$$\frac{d}{dt} \Delta x(t) = -\nu \Delta x(t) + F(t) \quad (11)$$

を得る。ただし、

$$\nu = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - b(t)}{\Delta t}, \quad F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\Delta t} \quad (12)$$

である。 $\Delta x(t)$  を粒子の速度と考えると、(11) はランダムな力  $F(t)$  と抵抗力  $-\nu \Delta x(t)$  を受けながら不規則に運動する粒子を記述する運動方程式とみなせる。 $\nu$  は粘性係数に対応し、通常は正の値である。

一方、条件 (9) は、

$$\langle b(t)^2 \rangle > 1 \quad (13)$$

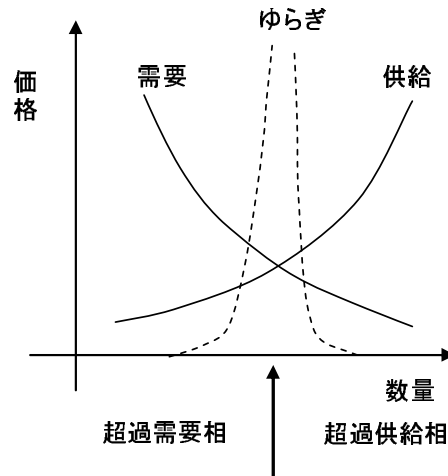


図 6: 需要と供給の均衡点近傍の様子。均衡点でゆらぎが最大となる。

となることを意味する。これは、大きな確率で  $b(t) > 1$  となることを示しており、上記の連続極限では、粘性係数  $\nu$  が負になることを表す。粘性係数が負になるような状況では、速度がどんどん増幅されるような不安定な運動が起こり、粒子の速度のゆらぎも増幅され正規分布から外れることになる。すなわち、条件 (9) を満たす (8) は、確率的に粘性係数が正にも負にもなることでゆらぎが増幅され、正規分布から外れたベキ分布になるという描像を与える。

式 (8) で与えられるモデルは、ディーラー同士が資産を売買し合う人工市場モデル (ディーラーモデル [4]) のシミュレーションから基礎付けが行われている [5]。ディーラーモデルから得られた価格変動のメカニズムを以下に結果のみ記す。

1. ディーラー間の売買では、ある特定の価格を境に取引ができるかできないかという違いが生じる。このような閾値の存在により小さな変化が増幅されカオスが生じる。このようなカオスを生むメカニズムが、価格変動の不規則性の起源である。
2. 市場価格の変化に追随して価格の先読みをするトレンドフォロアーの存在が、暴落や暴騰といった大きな価格変動を生じさせ、ゆらぎを増幅させる。これは、確率差分方程式の係数  $b(t)$  がランダムに変動し、連続系の正の抵抗と負の抵抗の両方が生じる状況に対応する。

このように、ディーラー間の売買に潜む閾値の存在が価格変動の不規則性を生み、さらにトレンドフォロアーの存在によりゆらぎが増幅されベキ分布を生む。このようなディーラーのマイクロなダイナミクスを取り入れたマクロなモデルが、係数  $b(t)$  がランダムに変動する確率差分方程式 (8) で記述されるモデルである。

以上、経済物理学がカオス、フラクタル、相転移の概念を用いて、価格変動のメカニズムを理解する様子を見てきた。次章からは、経済物理学の視点で企業所得を議論する。

### 3 企業所得の統計的性質

企業所得  $I$  は、収入  $R$  と費用  $E$  の差

$$I = R - E \quad (14)$$

である。ある企業の営業利益<sup>8</sup>の推移を図7に示す。営業利益は不規則に変化しているように見え

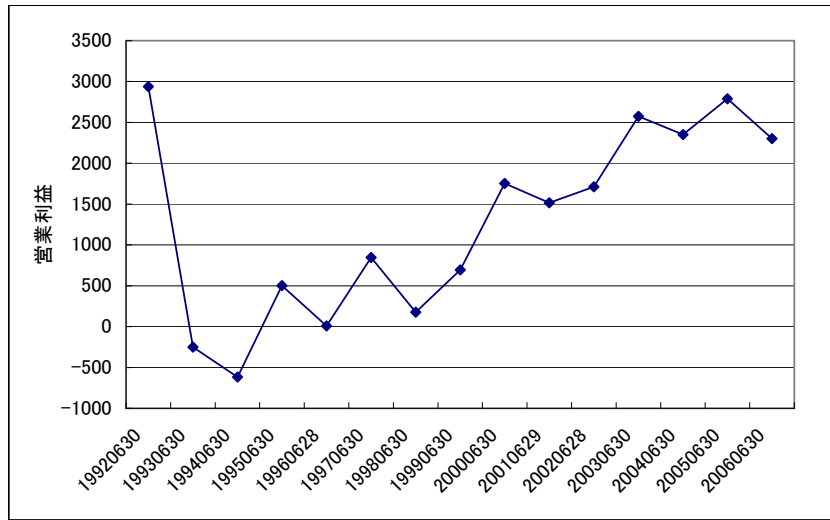


図7: 営業利益の推移の例。1992年6月から2006年6月の年次データより作成。

る。企業所得  $I$  について次のような統計法則が知られている。

#### 3.1 Zipf 則

企業所得の累積分布について Zipf 則

$$P(> I) \sim I^{-1} \quad (15)$$

が成り立つ [6]。東証上場企業の営業利益について累積分布を調べた結果を図8に示す。営業利益が  $10^3$  から  $10^5$  の領域で両対数グラフの傾きが  $-1$  になっており、Zipf 則が成立していることが分かる。

#### 3.2 Gibrat 則

所得成長率  $r(t) = \log[I(t+1)/I(t)]$  は所得  $I(t)$  と無関係である。これを Gibrat 則という [7]。東証上場企業の営業利益の成長率分布をいくつかの営業利益の規模別に見たものを図9に示す。成長率分布は所得の大きさにあまり依存しないことが分かる。

<sup>8</sup>売上高から売上原価(原材料費や人件費)と営業費用(宣伝広告費などの製品やサービスの販売に関連する間接費用)を差し引いたもの。



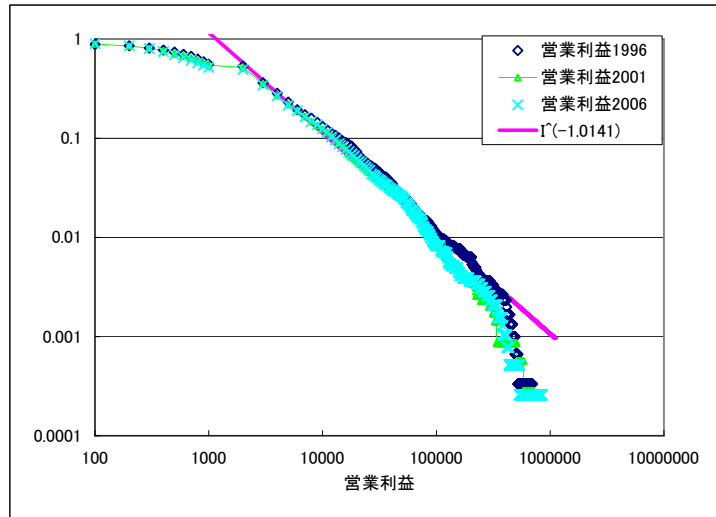


図 8: 営業利益の累積分布。東証上場企業の 1992 年 6 月から 2006 年 6 月の年次データより作成。

## 4 企業所得成長の確率過程モデル

### 4.1 確率差分方程式

以上の統計法則を説明するモデルとして、確率差分方程式

$$I(t+1) = \alpha(t)B(t)I(t) + f(t) \quad (16)$$

により記述されるモデルがある [8, 9]。ただし、 $B(t)$  は所得の成長を表す乗法的ノイズ、 $f(t)$  は加法的ノイズである。係数  $\alpha(t)$  は 1 または  $-1$  をとる乱数であり、所得の符号の変化、すなわち、利益から損失、損失から利益への変化を記述する。乱数  $B(t)$ 、 $f(t)$ 、 $\alpha(t)$  の確率分布は、所得データから推定する。

(16) は価格変動の確率差分方程式 (8) と同じ形の方程式であり、(8) と同様に次の事実が成り立つ。 $B(t)$  について

$$\langle B(t)^\beta \rangle = 1 \quad (17)$$

が成り立つならば、累積分布  $P(> I)$  はベキ分布となり、その指数は  $\beta$  である。すなわち、

$$P(> I) \sim I^{-\beta} \quad (18)$$

が成り立つ。

### 4.2 乱数の確率分布の推定

東証上場企業の営業利益データから乱数  $B(t)$ 、 $f(t)$ 、 $\alpha(t)$  の確率分布を決める。

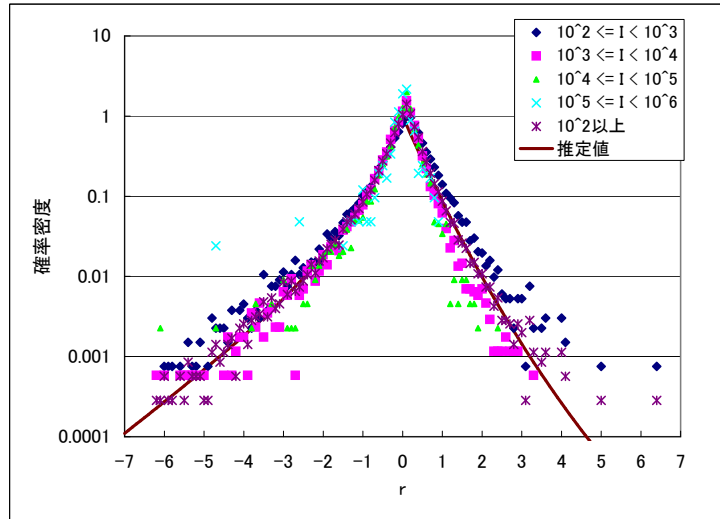


図 9: 営業利益成長率の確率密度関数。東証上場企業の 1992 年 6 月から 2006 年 6 月の年次データより作成。

#### 4.2.1 所得成長係数 $B(t)$ の確率分布の推定

$I(t)$  が  $f(t)$  に比べて十分大きいときには、

$$B(t) \sim \frac{I(t+1)}{I(t)} = \exp[r(t)] \quad (19)$$

の関係式が成り立つことに注意すると、所得成長係数  $B(t)$  の確率分布は所得成長率  $r(t)$  の確率分布より求めればよいことが分かる。図 9 の営業利益成長率の確率密度関数  $p(r)$  は、次の関数で表される。

$$p(r) = \frac{1}{N} 10^{A(r)}. \quad (20)$$

ただし、

$$A(r) = -a(1 - e^{-br}) - cr. \quad (21)$$

パラメータ  $a$ 、 $b$ 、 $c$  は次の表のようになる。

	a	b	c
$r \geq 0$ のとき	9.36592	0.12140	-0.00572
$r < 0$ のとき	1.28100	-0.70587	-0.38373

$N$  は

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dr 10^{A(r)} \quad (22)$$

である。

#### 4.2.2 加法的ノイズ $f(t)$ の分散と $\alpha(t)$ の確率の推定

所得  $I(t)$  の符号の変化は、加法的ノイズ  $f(t)$  と  $\alpha(t)$  により引き起こされる。そのうち、 $f(t)$  により符号が変化するのは、 $I(t)$  の大きさが  $f(t)$  の影響が及ぶ範囲内にある場合である。 $I(t)$  がそれよりも大きい場合には、 $\alpha(t)$  により  $I(t)$  の符号が変化することになる。

図 10 は、所得  $I(t)$  の符号が変化する確率を所得の大きさ  $|I|$  の関数として求めたものである。上の

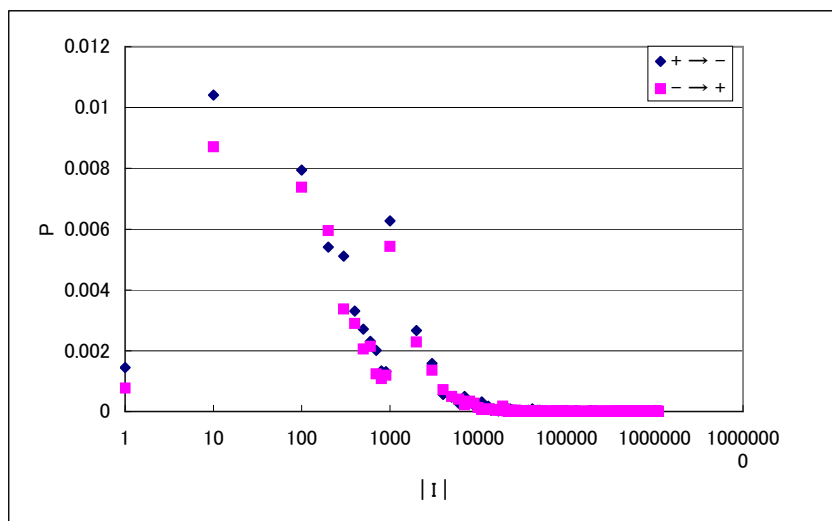


図 10: 所得の符号変化の確率を所得の大きさの関数として求めたもの。東証上場企業の 1992 年 6 月から 2006 年 6 月の年次データより作成。

考察を踏まえると、図 10 より  $|I|$  が 1000 程度までは  $f(t)$  の影響で所得の符号が変化し、 $|I| > 1000$  では、 $\alpha(t)$  の影響で所得の符号の変化が起きるといモデル化が可能である。したがって、 $f(t)$  を正規乱数と仮定したとき、その標準偏差を 1000 程度とし、 $\alpha(t)$  が 1 から  $-1$ 、または  $-1$  から 1 へ変化する確率を  $|I| > 1000$  の領域での所得の符号変化の確率に選べばよいことになる。

### 4.3 所得成長シミュレーションによる投資戦略の可能性

$B(t)$ 、 $f(t)$ 、 $\alpha(t)$  の確率分布が決定できれば、それぞれの確率分布に従った乱数を発生させることにより、(16) 式にしたがった企業所得のシミュレーションを行うことができる。そのシミュレーション結果をもとに、所得の成長という観点からどのような企業に投資するのがよいかという、投資戦略を引き出すことができる。

例えば、東証上場企業を投資対象とした場合、所得の初期値  $I(0)$  を 2006 年 6 月の営業利益とし、同じデータから推定した  $B(t)$ 、 $f(t)$ 、 $\alpha(t)$  をもつ (16) にしたがって各企業の将来の所得を求める。その結果を分析することで、投資すべき企業の所得水準に関する情報が得られると期待される。文献 [10] では、1989 年から 1995 年の米国企業のデータを用いてモデルのパラメータ推定を行い、米国企業の 5 年後および 15 年後の所得成長シミュレーションを行っている。その結果より、所得成長率の観点から特定の所得水準をもつ企業に投資する投資戦略を提案している。

## 5 まとめ

本稿では、価格変動を例に、カオス、フラクタル、相転移の概念を用いて現象を理解する経済物理学の方法と考え方を紹介した。また、その応用として企業所得成長モデルを紹介し、それを利用した投資戦略の可能性に言及した。

経済物理学のアプローチの特徴として特に重要な点は、観測データの分析から得られた経験則を重視することであろう。現象を説明するモデルも、経験則を説明するように構成される。

経済物理学のこのようなアプローチは、経済学の伝統的なアプローチとは異なる。経済学では、合理的に判断する市場参加者や、理想的な自由市場などを仮定して、それらの仮定のもとで演繹的な推論を行い、体系を作ってゆく。物理学や生物学よりもより数学に近い研究の進め方であるといえる。それに対して、経済物理学ではデータの分析から得られた経験則を重視する実証科学の立場をとる。したがって、たとえモデルがどんなにすばらしくても、経験則を説明できなければそのモデルは採用されない。

また、経済物理学では、現象にゆらぎの存在を認め、そのゆらぎに対する統計則を重視する。その統計則をもとに、統計物理学で発展してきたカオス、フラクタル、相転移という概念を用いて現象を理解し、モデル化を行う。モデルを作る際、価格変動の確率過程モデルのように、その統計則を再現できることを重要視する。これは、計量経済学などで使用される AR モデルなどの時系列モデルや回帰モデルのような、統計的推定をベースにしたモデル化のアプローチとはやや異なるように思われる。時系列モデルでは、必ずしも観測される統計的性質を再現していない場合があり、トレンド成分、周期成分、季節性といった、分析者の対象の見方、切り口をより重視してモデルを構成する。これは、数学や実証科学のアプローチと比較して、より人間の意図が入ったアプローチであるという意味で、工学的アプローチといえるであろう。以上の経済現象に対するアプローチを分類すると以下ようになる。

1. 数学的アプローチ … 経済学
2. 実証科学的アプローチ … 経済物理学
3. 工学的アプローチ … 計量経済学

これまで、経済現象に対しては 1 と 3 のアプローチが行われてきた。今後、2 の実証科学的アプローチである経済物理学が進展することで経済現象の理解がより進むことが期待される。

企業所得成長モデルと投資戦略について、本稿ではその簡単な紹介程度にとどまった。今後は、文献 [10] で提案されているような、企業所得成長モデルのシミュレーションから得られる投資戦略が有効な投資戦略であるかどうかを、実際にポートフォリオを作成して検証してみることが必要である。また、この企業所得成長に注目した投資戦略を、株式投資のスタイルの観点から検証してみることも重要である。

経済物理学はまだ若く、これから、その成果が期待できる分野である。今後の動向を注視していきたい、実務への応用の可能性を探っていきたいと考える<sup>9</sup>。

## 参考文献

- [1] 「経済物理学の発見」高安秀樹、光文社新書 (2004)
- [2] 「エコノフィジックス—市場に潜む物理法則—」高安秀樹、日本経済新聞社 (2001)
- [3] H. Takayasu, A-H. Sato and M. Takayasu, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 966-969.  
*Stable Infinite Variance Fluctuations in Randomly Amplified Langevin Systems*

<sup>9</sup>リサーチ陣に物理学者をそろえ、物理学の手法を用いた分析と運用モデルの開発を行い、実際にファンドを運用している資産運用会社がヨーロッパに存在する。そのホームページ <http://www.science-finance.fr/> には、彼らのリサーチの成果をまとめた論文や本の情報が多数あり、参考になる。

- [4] H. Takayasu, H. Miura, T. Hirabayashi and K. Hamada, *Physica A* **184** (1992) 127-134.  
*Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements—the Case of Market Price*
- [5] A-H. Sato and H. Takayasu, *Physica A* **250** (1998) 231-252.  
*Dynamic Numerical Models of Stock Market Price: from Microscopic Determinism to Macroscopic Randomness*
- [6] K. Okuyama, M. Takayasu and H. Takayasu, *Physica A* **269** (1999) 125-131.  
*Zipf's Law in Income Distribution of Companies*
- [7] Y. Fujiwara, C. D. Guilmi, H. Aoyama, M. Gallegati and W. Souma, cond-mat/0310061 v2 (2003).  
*Do Pareto-Zipf and Gilbrat laws Hold True? An Analysis with European Firms*
- [8] T. Mizuno, M. Katori, H. Takayasu and M. Takayasu, Proceedings of "Empirical Science of Financial Fluctuations" in Tokyo (edited by H. Takayasu, Springer, 2001) 321-330.  
*Statistical Laws in the Income of Japanese Companies*
- [9] T. Mizuno, M. Takayasu and H. Takayasu, *Physica A* **332** (2004) 403-411.  
*The Mean-Field Approximation Model of Company's Income Growth*
- [10] T. Mizuno, S. Kurihara, M. Takayasu and H. Takayasu, Proceedings of "Application of Econophysics" (edited by H. Takayasu, Springer, 2003) 256-261.  
*Investment Strategy based on a Company Growth Model*