テキスト７９ページ命題 2.27 のタイプミスの訂正

テキスト７９ページ命題 2.27 の（１）と（２）の証明にタイプミスがあるので、以下のように訂正します。

命題 1. 区間 I 上の有界関数 f, g はリーマン可積分とする。このとき

(1) $f+g$ もリーマン可積分で、$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ となる。

(2) 任意の実数 $c \in \mathbb{R}$ に対し cf もリーマン可積分で、$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ となる。

証明. (1) I の任意の分割 Δ に対し、$U(\Delta, f+g) \leqq U(\Delta, f)+U(\Delta, g)$ かつ $L(\Delta, f+g) \geqq L(\Delta, f)+L(\Delta, g)$ となる。f と g はリーマン可積分より任意の $\varepsilon > 0$ に対し I の分割 Δ_1 と Δ_2 が存在して、$U(\Delta_1, f) - L(\Delta_1, f) < \varepsilon$ かつ $U(\Delta_2, g) - L(\Delta_2, g) < \varepsilon$ を満たす。そこで Δ_1 と Δ_2 の共通の細分（例えば Δ_1 と Δ_2 の和集合）Δ_3 を取れば、$U(\Delta_3, f+g) - L(\Delta_3, f+g) < 2\varepsilon$ となり $f+g$ もリーマン可積分である。よって $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = U(f+g) = L(f+g)$ とすると、$U(\Delta_3, f+g) \geqq U(f+g) = L(f+g) \geqq L(\Delta_3, f+g)$ より、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)+g(x)\,dx &= U(f+g) \leqq U(\Delta_3, f+g) \leqq L(\Delta_3, f) + L(\Delta_3, g) + 2\varepsilon \\ &\leqq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + 2\varepsilon\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)+g(x)\,dx &= L(f+g) \geqq L(\Delta_3, f+g) \geqq U(\Delta_3, f) + U(\Delta_3, g) - 2\varepsilon \\ &\geqq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - 2\varepsilon\end{aligned}$$

となり、$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ が分かる。

(2) $c > 0$ の場合に示す。I の任意の分割 Δ に対し、$U(\Delta, cf) = cU(\Delta, f)$ かつ $L(\Delta, cf) = cL(\Delta, f)$ となる。f はリーマン可積分より任意の $\varepsilon > 0$ に対し I の分割 Δ_1 が存在して、$U(\Delta_1, f) - L(\Delta_1, f) < \varepsilon$ を満たすので $U(\Delta_1, cf) - L(\Delta_1, cf) < c\varepsilon$ となり cf もリーマン可積分である。よって $\int_a^b cf(x)\,dx = U(cf) = L(cf)$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)\,dx &= U(cf) \leqq U(\Delta_1, cf) \leqq cL(\Delta_1, f) + c\varepsilon \\ &\leqq c\int_a^b f(x)\,dx + c\varepsilon\end{aligned}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}\int_a^b cf(x)\,dx &= L(cf) \geqq L(\Delta_1, cf) \geqq cU(\Delta_1, f) - c\varepsilon \\ &\geqq c\int_a^b f(x)\,dx - c\varepsilon\end{aligned}$$

となり、$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ が分かる。$c \leqq 0$ の場合も同様である。

□